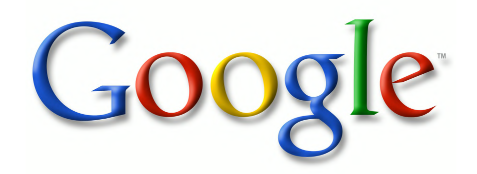




Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Band 101.

In vier Heften.

Berlin, 1887.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des Bandes 101.

Seite

Cardinaal, J. Ein specieller $F^{(2)}$-Bündel und der dazu gehörige Bündel Raumcurven dritter Ordnung. . . . . 142—153

Cayley, A. Note on the Theory of Linear Differential Equations. . . . . 209—213

Frobenius, G. Ueber die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul. 273—299

Hensel, K. Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches für einen beliebigen algebraischen Primdivisor. . . . 99—141

Königsberger, L. Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des *Abel*schen. (Fortsetzung des Aufsatzes im Band 100 S. 121.) . . . . 1— 72

Kronecker, L. Ueber den Zahlbegriff. . . . . 337—355

Lipschitz, R. Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale. Auszug eines an Herrn *L. Kronecker* gerichteten Schreibens. . . . . 214—226

Minkowski, H. Zur Theorie der positiven quadratischen Formen. . . . 196—202

Schottky, F. Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt. . . . . 227—272

Schoute, P. H. Ein *Steiner*sches Problem. . . . . 154—161

Stahl, W. Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse. . . . . 73— 98

— — Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung. . . . . . 300—325

Seite

Sturm, R. Ueber Strahlencongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrade . . . . 162—195

Thomae, J. Ueber Integrale zweiter Gattung . . . . 326—336

Thomé, L. W. Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. 203—208

Druckfehler und Berichtigungen zu Band 100. 356

Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des *Abel*schen.

(Fortsetzung des Aufsatzes im Band 100 S. 121.)

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Heidelberg.)

Lassen wir nunmehr die Beschränkung fallen, dass in das Functionaltheorem der gesuchten Functionen die unabhängigen Variabeln nicht eingehen, so wird sich auch, wie oben gezeigt worden, das allgemeine Integral als eine algebraische Function eines particulären, der unabhängigen Variabeln und der willkürlichen Constanten ergeben, und wir wollen dann die unter dieser allgemeinen Voraussetzung hergeleitete Gleichung (25.) in die Form bringen

$$(37.)\qquad \frac{\partial\varphi(x,z_1)}{\partial z_1}+\varphi(x,z_1)\frac{\partial}{\partial z_1}\log\left[\frac{\frac{\partial\psi}{\partial z_1}}{\frac{\partial\psi}{\partial c}}\right]=-\frac{\partial}{\partial x}\log\left[\frac{\frac{\partial\psi}{\partial z_1}}{\frac{\partial\psi}{\partial c}}\right],$$

welche, da sie eine in x und z_1 identische sein muss, durch Integration

$$(38.)\qquad \varphi(x,z_1)=\Omega(x,c)\frac{\frac{\partial\psi}{\partial c}}{\frac{\partial\psi}{\partial z_1}}-\frac{\frac{\partial\psi}{\partial c}}{\frac{\partial\psi}{\partial z_1}}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\frac{\partial\psi}{\partial z_1}}{\frac{\partial\psi}{\partial c}}dz_1$$

liefert, worin $\Omega(x,c)$ eine algebraische Function von x und c bedeutet, und die rechts stehende Differentiation nach x als eine partielle — z_1 als von x unabhängig betrachtet — aufzufassen ist. Setzt man daher zur Abkürzung

$$(39.)\qquad \frac{\frac{\partial\psi(x,z,c)}{\partial c}}{\frac{\partial\psi(x,z,c)}{\partial z}}=\omega(x,z,c),$$

so ist die nothwendige Form der Differentialgleichung erster Ordnung (20.)

$$\frac{dz}{dx}=\Omega(x,c)\omega(x,z,c)-\omega(x,z,c)\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dz}{\omega(x,z,c)},$$

oder wenn man beachtet, dass die rechte Seite von c unabhängig sein muss, man also einen bestimmten Werth c_0 einführen darf, und sodann

$$\Omega(x, c_0) = \Omega(x), \quad \frac{\dfrac{\partial\psi(x, z, c_0)}{\partial c_0}}{\dfrac{\partial\psi(x, z, c_0)}{\partial z}} = \omega(x, z, c_0) = \omega(x, z)$$

setzt,

$$(40.) \quad \frac{dz}{dx} = \Omega(x)\omega(x, z) - \omega(x, z)\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dz}{\omega(x, z)} \text{ *)}.$$

Seien nun z und z_1 das allgemeine und ein particuläres Integral der Differentialgleichung (40.), für welche also die algebraische Beziehung (21.) stattfinden soll **), so wird neben (40.) noch die Beziehung statthaben

$$(41.) \quad \frac{dz_1}{dx} = \Omega(x)\omega(x, z_1) - \omega(x, z_1)\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dz_1}{\omega(x, z_1)};$$

multiplicirt man die Gleichung (40.) mit $\omega(x, z_1)$ und die Gleichung (41.) mit $\omega(x, z)$, so folgt durch Subtraction

$$\omega(x, z_1)\frac{dz}{dx} - \omega(x, z)\frac{dz_1}{dx} = -\omega(x, z)\omega(x, z_1)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dz}{\omega(x, z)} - \frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dz_1}{\omega(x, z_1)}\right\},$$

oder

$$\frac{\dfrac{dz}{dx}}{\omega(x, z)} - \frac{\dfrac{dz_1}{dx}}{\omega(x, z_1)} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int\frac{dz}{\omega(x, z)} - \int\frac{dz_1}{\omega(x, z_1)}\right\} = 0,$$

---

*) So wird z. B. für die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = \varphi(x),$$

für welche der Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und dem particulären Integrale durch $z = z_1 + \frac{c - c_1}{x}$ dargestellt wird, wegen $\omega(x, z, c) = \frac{1}{x}$ die Gleichung (40.) in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\Omega(x)}{x} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\int x\,dz = \frac{\Omega(x)}{x} - \frac{z}{x},$$

also in die gegebene Differentialgleichung übergehen, wenn $\Omega(x) = x\varphi(x)$ gesetzt wird.

**) Wenn eine solche Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem bestimmten particulären Integrale besteht, so bleibt sie auch für das allgemeine und jedes andere particuläre Integral erhalten; denn aus (21.) folgt

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z_1}\varphi(x, z_1) = \varphi(x, \psi),$$

und da diese Gleichung, weil z_1 nicht eine algebraische Function von x sein soll, eine in x und z_1 identische sein muss, so wird sie bestehen bleiben, wenn für z_1 irgend ein anderes particuläres Integral der Gleichung (20.) gesetzt wird, und man erhält somit

$$\frac{\partial\psi_{z_2}}{\partial x} + \frac{\partial\psi_{z_2}}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx} = \varphi(x, \psi_{z_2}),$$

oder es ist $z = \psi(x, z_2, c)$ wieder ein Integral, also vermöge der willkürlichen Constanten ein allgemeines Integral der Differentialgleichung (20.).

oder endlich, da z und z_1 Functionen von x sind,

$$(42.)\quad \frac{d}{dx}\left\{\int\frac{dz}{\omega(x,z)}-\int\frac{dz_1}{\omega(x,z_1)}\right\} = 0.$$

Die aus (42.) hervorgehende Beziehung

$$(43.)\quad \int\frac{dz}{\omega(x,z)}-\int\frac{dz_1}{\omega(x,z_1)} = C\,^{*)},\ \text{oder}\ \int^{z}\frac{dt}{\omega(x,t)}-\int^{z_1}\frac{dt}{\omega(x,t)} = C,$$

in welcher C eine Constante bedeutet, wird somit, wenn

$$\omega(x,t) = \frac{\frac{\partial\psi(x,t,c_0)}{\partial c_0}}{\frac{\partial\psi(x,t,c_0)}{\partial t}}$$

gesetzt wird, durch die algebraische Beziehung

$$(44.)\quad z = \psi(x, z_1, c)$$

befriedigt, oder, was dasselbe ist, es findet die Relation statt

$$(45.)\quad \int_{z_1}^{\psi(x,z_1,c)}\frac{dt}{\omega(x,t)} = C.$$

Setzt man nun x einer willkürlichen, aber bestimmten Constanten ξ gleich, so bleibt z_1, weil diese Grösse in (44.) ein beliebiges particuläres Integral bezeichnen durfte, ebenfalls noch eine willkürliche Grösse, die mit ζ_1 bezeichnet werden mag, und es wird das von dem willkürlichen ζ_1 abhängige $z = \zeta$ durch die Gleichung definirt sein

$$(46.)\quad \zeta = \psi(\xi, \zeta_1, c),$$

für welche die Beziehung stattfindet

$$(47.)\quad \int^{\zeta}\frac{dt}{\omega(\xi,t)}-\int^{\zeta_1}\frac{dt}{\omega(\xi,t)} = C;$$

sei für den willkürlich gewählten Werth $\zeta_1 = \alpha$ die Grösse $\zeta = \gamma$, so wird man wieder (47.) in die Form setzen können

$$(48.)\quad \int_{\alpha}^{\zeta}\frac{dt}{\omega(\xi,t)}-\int_{\alpha}^{\zeta_1}\frac{dt}{\omega(\xi,t)} = \int_{\alpha}^{\gamma}\frac{dt}{\omega(\xi,t)},$$

---

*) In dem obigen Beispiel war $\omega(x,z) = \frac{1}{x}$, in Folge dessen geht die Gleichung (43.) über in

$$xz - xz_1 = C \quad\text{oder}\quad z = z_1 + \frac{C}{x},$$

welches in der That der Zusammenhang der Integrale war.

worin γ durch den Ausdruck bestimmt ist

$$(49.)\qquad \gamma = \psi(\xi, \alpha, c),$$

so dass sich, wenn zwischen (46.) und (49.) die Grösse c eliminirt wird, die Beziehung ergiebt

$$(50.)\qquad \gamma = \varphi_1(\xi, \zeta, \zeta_1),$$

welche für (48.) wieder aussagt, dass eine algebraische Substitution $t = \chi(\xi, u)$ existirt, welche die Differentialien derselben in elliptische Normaldifferentiale erster Gattung umformt, für welche der Multiplicator und Modul algebraisch von ξ abhängen — immer wieder von dem Falle der algebraischen und logarithmischen Integrabilität abgesehen. Dann geht aber die Gleichung (47.), wenn die den Werthen $t = \zeta_1$ und $t = \zeta$ entsprechenden Werthe von u mit η_1 und η bezeichnet werden, in

$$\frac{1}{M(\xi)}\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\mu(\xi)^2u^2)}} = C$$

über, worin $M(\xi)$ und $\mu(\xi)$ algebraische Functionen von ξ bedeuten, oder wenn $\mu(\xi) = \varkappa$, $M(\xi) = M_1(\varkappa)$ gesetzt wird, in

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2u^2)}} = C.M_1(\varkappa),$$

worin für einen beliebigen Werth η_1 die Grösse $\varkappa$ auch noch jeden beliebigen Werth annehmen kann; da aber C von ξ unabhängig ist, so müsste das links stehende elliptische Integral eine algebraische Function des Moduls sein, was nicht der Fall ist. Somit werden $\mu(\xi)$ und $M(\xi)$ in die von ξ unabhängigen Grössen λ und M übergehen, und vermöge $z = \chi(x, u)$

$$\frac{dz}{\omega(x, z)} = \frac{1}{M}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda^2u^2)}}$$

sein, so dass die Differentialgleichung (40.) die Form annimmt

$$(51.)\qquad \frac{du}{dx} = \omega(x)\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda^2u^2)},$$

worin $\omega(x)$ eine algebraische Function bedeutet; da aber, wie früher gezeigt worden, einer Differentialgleichung von der Form (51.) stets eine von der unabhängigen Variabeln freie algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale zukommt, so muss die Elimination von ζ und ζ_1 zwischen den drei Gleichungen

$$\zeta = \psi(x, \zeta_1, c),\quad \zeta = \chi(x, \eta),\quad \zeta_1 = \chi(x, \eta_1)$$

eine von x freie Beziehung

$$\eta = \Psi(\eta_1, c)$$

zwischen η und η_1 liefern; oder anders ausgedrückt:

eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären Integrales, der unabhängigen Variabeln und einer willkürlichen Constanten ist, lässt sich stets durch eine in der abhängigen und unabhängigen Variabeln algebraische Substitution in eine Differentialgleichung erster Ordnung verwandeln, für welche eine von der unabhängigen Variabeln freie algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen, einem particulären Integrale und einer willkürlichen Constanten besteht, ist somit stets in eine Differentialgleichung der Form (51.) *transformirbar, wenn nicht das transformirte Differential eine algebraische oder logarithmische Integrabilität zulässt.*

Hat nun die gegebene Differentialgleichung ein durch die Gleichungen (5.) und (6.) dargestelltes Functionaltheorem, so wird auch die durch algebraische Transformation aus dieser hergeleitete Differentialgleichung (51.) ein solches haben müssen, und wir legen uns somit die Frage vor, welches sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Differentialgleichung (51.) ein Functionaltheorem im angegebenen Sinne besitze?

Seien x_1 und x_2 zwei willkürliche Werthe der unabhängigen Variabeln x, u_1 und u_2 die zwei zugehörigen Werthe eines particulären Integrales der Differentialgleichung (51.), ferner X ein von x_1 und x_2 algebraisch abhängiger Werth von x und U der zugehörige Werth jenes particulären Integrales, so würde ein Functionaltheorem im angegebenen Sinne durch die beiden algebraischen Gleichungen definirt sein

$$(52.) \qquad U = F\{u_1, u_2, x_1, x_2\}, \quad X = f(x_1, x_2).$$

Da aber vermöge (51.)

$$\frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-\lambda^2 u_1^2)}} = \omega(x_1)dx_1, \qquad \frac{du_2}{\sqrt{(1-u_2^2)(1-\lambda^2 u_2^2)}} = \omega(x_2)dx_2,$$

$$\frac{dU}{\sqrt{(1-U^2)(1-\lambda^2 U^2)}} = \omega(X)dX,$$

und hieraus sich die Beziehungen ergeben

$$u_1 = \sin\text{am}\int^{x_1}\omega(x)dx, \quad u_2 = \sin\text{am}\int^{x_2}\omega(x)dx, \quad U = \sin\text{am}\int^{X}\omega(x)dx,$$

so wird die Gleichung (52.) ersetzt werden können durch

$$(53.)\qquad \sin\operatorname{am}\int^X \omega(x)dx = F\left\{\sin\operatorname{am}\int^{x_1}\omega(x)dx,\ \sin\operatorname{am}\int^{x_2}\omega(x)dx,\ x_1,\ x_2\right\},$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\int^{x_1}\omega(x)\,dx = y_1,\quad \int^{x_2}\omega(x)\,dx = y_2,\quad \int^X\omega(x)dx = Y,$$

$$\text{also } u_1 = \sin\operatorname{am} y_1,\quad u_2 = \sin\operatorname{am} y_2,\quad U = \sin\operatorname{am} Y$$

gesetzt wird, durch

$$(54.)\qquad \sin\operatorname{am} Y = F\{\sin\operatorname{am} y_1,\ \sin\operatorname{am} y_2,\ x_1,\ x_2\}.$$

Beachtet man nun, dass bei unverändert festgehaltenen x_1 und x_2 das nach x_1 laufende Integral beliebig oft die Querschnitte der zu $\omega(x)$ gehörigen *Riemann*schen Fläche durchschneiden kann, so dass y_1 um beliebige Vielfache der Periodicitätsmoduln zunimmt, während y_2 unverändert bleibt, und Y, da solche Wege gewählt werden können, welche X unverändert lassen, sich ebenfalls nur um ganze Vielfache derselben Periodicitätsmoduln ändert, so wird, wenn wir annehmen, dass $\omega(x)$ zu einem höheren Geschlecht als $p=1$ gehört *), aus der Gleichung (54.) die Beziehung hervorgehen

$$(55.)\qquad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(Y+m_1\omega_1+m_2\omega_2+\cdots+m_\varrho\omega_\varrho) \\ = F\{\sin\operatorname{am}(y_1+\mu_1\omega_1+\mu_2\omega_2+\mu_3\omega_3),\ \sin\operatorname{am} y_2,\ x_1,\ x_2\}, \end{cases}$$

worin ω_1, ω_2, ω_3 drei beliebige der ϱ Periodicitätsmoduln, μ_1, μ_2, μ_3 drei willkürliche und $m_1, m_2, \dots m_\varrho$ davon abhängige ganze Zahlen bedeuten. Entwickelt man die rechte und die linke Seite dieser Gleichung nach dem *Taylor*schen Satze, so erhält man

$$(56.)\qquad \begin{cases} \sin\operatorname{am} Y + (m_1\omega_1+m_2\omega_2+\cdots+m_\varrho\omega_\varrho)\cos\operatorname{am} Y\,\Delta\operatorname{am} Y+\cdots \\ = F\{\sin\operatorname{am} y_1,\ \sin\operatorname{am} y_2,\ x_1,\ x_2\} \\ +(\mu_1\omega_1+\mu_2\omega_2+\mu_3\omega_3)\dfrac{\partial F\{\sin\operatorname{am} y_1,\ \sin\operatorname{am} y_2,\ x_1,\ x_2\}}{\partial \sin\operatorname{am} y_1}\cos\operatorname{am} y_1\,\Delta\operatorname{am} y_1+\cdots; \end{cases}$$

---

*) Die Annahme $p=1$ lässt für die Gleichung (51.) oder für die Beziehung

$$\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda^2u^2)}} = \int\omega(x)dx,$$

da die linke Seite ein Integral erster Gattung ist, erkennen, dass auch die rechte Seite durch eine algebraische Substitution auf ein elliptisches Normalintegral erster Gattung führen müsse, und sich somit wieder wie oben als nothwendige Form

$$\frac{du}{dt} = m\frac{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda^2u^2)}}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}}$$

ergiebt. Für den Fall, dass $\int\omega(x)dx$ eine logarithmische oder eine algebraische Function ist, werden wir, wie unmittelbar zu sehen, wieder auf die früher behandelten Fälle zurückgeführt.

bekanntlich kann man nun auf unendlich viele Arten die ganzen Zahlen μ_1, μ_2, μ_3 so bestimmen, dass $\mu_1\omega_1+\mu_2\omega_2+\mu_3\omega_3$ eine unendlich kleine Grösse ist, und da dann die rechte Seite der Gleichung also auch die linke sich nur um unendlich wenig ändern, also $m_1\omega_1+m_2\omega_2+\cdots+m_\varrho\omega_\varrho$ ebenfalls unendlich klein sein muss, und die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung, welche die folgenden Glieder der *Taylor*schen Reihe bilden, gegen die ersteren vernachlässigt werden können, so geht (56.) mit Hülfe von (54.) in

$$(57.)\qquad a_1.\cos\operatorname{am} Y.\Delta\operatorname{am} Y = \frac{\partial \sin\operatorname{am} Y}{\partial \sin\operatorname{am} y_1}\cdot\cos\operatorname{am} y_1.\Delta\operatorname{am} y_1$$

über, worin a_1 eine Constante bedeutet, oder nach den obigen Bezeichnungen in

$$(58.)\qquad \frac{\partial U}{\partial u_1} = a_1\cdot\frac{\sqrt{(1-U^2)(1-\lambda^2U^2)}}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-\lambda^2u_1^2)}}.$$

Genau ebenso folgt durch Abänderung des Weges des nach x_2 führenden Integrales

$$(59.)\qquad \frac{\partial U}{\partial u_2} = a_2\cdot\frac{\sqrt{(1-U^2)(1-\lambda^2U^2)}}{\sqrt{(1-u_2^2)(1-\lambda^2u_2^2)}};$$

da ferner

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{\partial U}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_1}+\frac{\partial U}{\partial x_1}\qquad\text{oder}\qquad \frac{dU}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx_1}+\frac{\partial U}{\partial x_1},$$

so folgt aus (51.) und (58.)

$$(60.)\qquad \frac{\partial U}{\partial x_1} = \sqrt{(1-U^2)(1-\lambda^2U^2)}\left\{\omega(X)\frac{\partial X}{\partial x_1}-a_1\omega(x_1)\right\},$$

ebenso

$$(60^a.)\qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \sqrt{(1-U^2)(1-\lambda^2U^2)}\left\{\omega(X)\frac{\partial X}{\partial x_2}-a_2\omega(x_2)\right\};$$

da nun U nach (52.) eine algebraische Function von u_1, u_2, x_1, x_2 sein soll, so wird, indem wir x_2 und u_2 als Parameter betrachten, $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ und U eine algebraische Function von u_1 und x_1 sein, und es würde somit die Gleichung (60.) u_1 als algebraische Function von x_1 definiren, was nicht sein sollte; diese Gleichung muss somit eine in u_1 und x_1 identische sein. Bestimmt man nun u_1 als algebraische Function von x_1 derart, dass $\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0$ wird, so wird für diesen Werth von u_1 auch die rechte Seite von (60.) verschwinden, und da der Fall von $U = \pm 1$ und $U = \pm\lambda$ ausgeschlossen werden kann,

indem, wie wir wissen, Fälle existiren, in denen U überhaupt von einem expliciten x frei ist, ohne constant zu sein, so folgt, dass für ein willkürliches x_1, und ebenso zufolge der Gleichung (60^a.) für ein willkürliches x_2

$$(61.)\quad \omega(X)\frac{\partial X}{\partial x_1}-a_1\omega(x_1)=0,\quad \omega(X)\frac{\partial X}{\partial x_2}-a_2\omega(x_2)=0$$

sein muss — nur in einem Falle würde dieser Schluss unstatthaft sein, wenn nämlich $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ von u_1 unabhängig wäre; dann würde aber $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ eine algebraische Function von x_1 sein und sich aus (60.) U als eine algebraische Function von x_1, x_2 und u_2 ergeben, in welcher u_1 nicht vorkommt, was nicht sein soll. Aus den beiden Gleichungen (61.), in welchen x_1 und x_2 willkürliche Grössen sind, folgt aber durch Multiplication mit dx_1 und dx_2 und Addition

$$(62.)\quad \omega(X)dX = a_1\omega(x_1)dx_1+a_2\omega(x_2)dx_2,$$

und aus der Beziehung

$$dU = \frac{\partial U}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial U}{\partial u_2}du_2+\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2,$$

weil vermöge der Gleichungen (61.) $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial U}{\partial x_2}$ für beliebige Werthe von x_1 und x_2 identisch Null sein müssen, mit Hülfe von (58.) und (59.)

$$(63.)\quad \frac{dU}{\sqrt{(1-U^2)(1-\lambda^2U^2)}} = a_1\frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-\lambda^2u_1^2)}}+a_2\frac{du_2}{\sqrt{(1-u_2^2)(1-\lambda^2u_2^2)}},$$

wobei für (62.) und (63.), weil in letzterer Beziehung x_1 und x_2 nicht explicite vorkommen dürfen, die algebraischen Relationen bestehen

$$(64.)\quad U_1 = F(u_1, u_2),\quad X = f(x_1, x_2).$$

Da aber, wie oben nachgewiesen worden, für eine Differentialgleichung von der Form (51.) nur dann ein durch die Gleichungen (64.) definirtes Functionaltheorem stattfindet, wenn sich dieselbe durch eine algebraische Substitution in die Form (33.) überführen lässt, so ergiebt sich wiederum, dass der oben bewiesene und gleich nachher auszusprechende Satz allgemein gültig bleibt auch für den Fall, dass die unabhängigen Variabeln in das Functionaltheorem explicite eintreten, auch hier wiederum den Fall ausgenommen, dass die Differentialgleichung

$$(65.)\quad \frac{dz}{dx} = \omega(x).\chi(z),$$

welche die Form der Differentialgleichungen aller Functionen angab, welche

überhaupt ein Functionaltheorem im angegebenen Sinne zulassen, so beschaffen ist, dass $\int\frac{dz}{\chi(z)}$ eine algebraische oder rein logarithmische Function ist; in diesem Falle kann in der That ein Functionaltheorem von der Art bestehen, dass auch die unabhängigen Variabeln selbst explicite in dasselbe eintreten, wie dies z. B. bekanntlich für

$$(66.)\qquad \frac{dz}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

der Fall ist, für welche

$$(67.)\qquad Z = z_1+z_2+x_1x_2X$$

ist, wenn

$$(68.)\qquad X = \frac{x_1\sqrt{(1-x_2^2)(1-\varkappa^2x_2^2)}+x_2\sqrt{(1-x_1^2)(1-\varkappa^2x_1^2)}}{1-\varkappa^2x_1^2x_2^2}$$

gesetzt wird. Fassen wir nun diesen Fall ins Auge und nehmen zunächst an, dass

$$(69.)\qquad \int\frac{dz}{\chi(z)} = \psi(z)$$

eine algebraische Function sei, so wird die Bedingung zu untersuchen sein, unter welcher die durch die Gleichung

$$(70.)\qquad \psi(z) = \int\omega(x)dx$$

definirte Function z ein Functionaltheorem von der Art besitzt, dass die zu x_1, x_2, X gehörigen Werthe z_1, z_2, Z mit eben diesen unabhängigen Variabeln in einer algebraischen Beziehung stehen, oder wann die Relation existiren kann

$$(71.)\qquad \int^X\omega(x)dx = F\left\{\int^{x_1}\omega(x)dx,\ \int^{x_2}\omega(x)dx,\ x_1,\ x_2\right\},$$

in welcher F eine algebraische Function bedeutet. Seien die Integrale zunächst wieder nicht durch algebraische Substitutionen in elliptische transformirbar, so erhalten wir, wenn der nach x_1 führende Integrationsweg drei der Querschnitte so oft durchläuft, dass der hinzukommende Periodicitätsmodul unendlich klein ist, wiederum durch Entwicklung nach der ***Taylor***schen Reihe und mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2+m_3\omega_3 = \frac{\partial F}{\partial\int^{x_1}\omega(x)dx}\cdot(\mu_1\omega_1+\mu_2\omega_2+\mu_3\omega_3),$$

und daher ist F eine lineare Function der beiden in ihr vorkommenden Inte-

grale, so dass die Gleichung (71.) in

$$(72.)\qquad \int^{X}\omega(x)dx = a_1\int^{x_1}\omega(x)dx + a_2\int^{x_2}\omega(x)dx + \pi(x_1, x_2)$$

übergeht *), worin $\pi(x_1, x_2)$ eine algebraische Function ihrer Argumente bedeutet. Die Gleichung (72.) verlangt aber bekanntlich, dass $p=1$ oder dass $\omega(x)$ sich durch eine algebraische Substitution auf ein elliptisches Integral zurückführen lasse, welches nur algebraische Unstetigkeiten besitzt, und es bleibt somit nur noch der Fall zu erledigen übrig, in welchem

$$(73.)\qquad \int\frac{dz}{\chi(z)} = \log\mathfrak{F}(z),$$

und $\mathfrak{F}(z)$ eine algebraische Function von z bedeutet. In diesem Falle wird aber das durch die Gleichungen (5.) und (6.) ausgedrückte Functionaltheorem wegen

$$(74.)\qquad \log\mathfrak{F}(z) = \int\omega(x)dx \quad\text{oder}\quad z = \mathfrak{G}(e^{\int\omega(x)dx}),$$

worin $\mathfrak{G}$ wiederum eine algebraische Function darstellt, die Gestalt annehmen

$$(75.)\qquad e^{\int^{X}\omega(x)dx} = G\left\{e^{\int^{x_1}\omega(x)dx}, e^{\int^{x_2}\omega(x)dx}, x_1, x_2\right\};$$

setzt man nun mit Beibehaltung der oben eingeführten Grössen y_1, y_2, Y

$$e^{\int^{x_1}\omega(x)dx} = u_1,\quad e^{\int^{x_2}\omega(x)dx} = u_2,\quad e^{\int^{X}\omega(x)dx} = U,\quad\text{also}\quad U = G\{u_1, u_2, x_1, x_2\},$$

so erhält man genau wie oben aus den Gleichungen (54.), (55.), (56.), (57.), zunächst wieder unter der Annahme $p>1$,

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = a_1\frac{U}{u_1},\quad \frac{\partial U}{\partial u_2} = a_2\frac{U}{u_2},$$

und ferner wie früher

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = U\left\{\omega(X)\frac{\partial X}{\partial x_1} - a_1\omega(x_1)\right\},\quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = U\left\{\omega(X)\frac{\partial X}{\partial x_2} - a_2\omega(x_2)\right\},$$

woraus wieder den an die Gleichung (60.) geknüpften Schlüssen entsprechend $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial U}{\partial x_2}$ identisch Null sich ergeben, und wir somit wieder auf ein von den unabhängigen Variabeln freies Functionaltheorem geführt werden. Was endlich den Fall $p=1$ betrifft, in welchem $\int\omega(x)dx$ in ein

*) Dass die Gleichung (71.) diese in den Integralen lineare Form annehmen muss, ist schon aus dem bekannten Satze ersichtlich, dass eine Relation zwischen Integralen algebraischer Functionen mit algebraisch von einander abhängigen Grenzen stets nur eine lineare mit constanten Coefficienten sein kann.

elliptisches Integral übergeht, so ist aus der Gleichung (74.) unmittelbar zu erkennen, dass dann und nur dann ein Functionaltheorem existirt, in welches auch die unabhängigen Variabeln eintreten, wenn $\int \omega(x)dx$ ein nur logarithmisch unstetig werdendes Integral darstellt, indem sich dann vermöge des Additionstheorems der elliptischen Integrale aus

$$\log \mathfrak{F}(z_1) = \int^{x_1} \omega(x)dx, \quad \log \mathfrak{F}(z_2) = \int^{x_2} \omega(x)dx, \quad \log \mathfrak{F}(Z) = \int^{X} \omega(X)dX,$$

wenn

$$\int^{X} \omega(x)\,dx = \int^{x_1} \omega(x)dx + \int^{x_2} \omega(x)dx + \log H(x_1, x_2)$$

ist, worin H eine algebraische Function bedeutet, die Gleichung

$$(76.) \qquad \mathfrak{F}(Z) = \mathfrak{F}(z_1).\mathfrak{F}(z_2).H(x_1, x_2)$$

ergiebt, welche das Functionaltheorem darstellt.

Fassen wir nunmehr all' die gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function einer Variabeln ein Functionaltheorem in dem Sinne besitzt, dass der Werth der Function für eine algebraische Verbindung zweier unabhängiger Variabeln sich durch die Werthe dieser Function für eben jene Variabeln und diese Variabeln selbst ausdrücken lasse, ist die, dass die Function das Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung ist, welche durch eine in der abhängigen und unabhängigen Variabeln algebraische Substitution aus der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = m\frac{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2u^2)}}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}}$$

abgeleitet ist; einen Ausnahmefall bilden allein die Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x)\chi(z)$$

für die beiden Fälle, dass $\int \frac{dz}{\chi(z)}$ *eine algebraische Function und* $\int \omega(x)dx$ *ein nur algebraisch unstetig werdendes elliptisches Integral ist oder* $\int \frac{dz}{\chi(z)}$ *den Logarithmus einer algebraischen Function darstellt, während* $\int \omega(x)dx$ *ein elliptisches Integral mit nur logarithmischen Unstetigkeiten bedeutet; in allen Fällen dürfen die Functionen, welche einem Functionaltheorem unterliegen, als algebraische Verbindungen algebraischer, logarithmischer und elliptischer Functionen bezeichnet werden.*

Nachdem wir die Frage nach den Functionen einer Variabeln beantwortet haben, für welche die Function einer algebraischen Verbindung von unabhängigen Argumenten sich algebraisch durch die Functionen der einzelnen Argumente und diese selbst ausdrücken lässt, schreiten wir *zur Untersuchung derjenigen Functionen weiter vor, welche ein Functionaltheorem in dem Sinne besitzen, dass ihre Functionalwerthe für drei oder mehr unabhängige Variable in einer algebraischen Beziehung stehen zu zwei dieser Functionalwerthe für Argumente, welche von den gegebenen Variabeln algebraisch abhängen* *), wie dies z. B. für *Abel*sche Integrale erster Gattung für $p=2$ in der Form gegeben ist

$$\int^{x_1} f(x)dx + \int^{x_2} f(x)dx + \int^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int^{x_\mu} f(x)dx = \int^{X_1} f(x)dx + \int^{X_2} f(x)dx,$$

worin dem *Abel*schen Theorem gemäss X_1 und X_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind, deren Coefficienten rational aus $x_1, x_2, \dots x_\mu$, $f(x_1)$, $f(x_2), \dots f(x_\mu)$ zusammengesetzt sind.

Wenn jene Functionen der Bedingung unterworfen werden, dass die gesuchte Eigenschaft für eine willkürliche Anzahl unabhängiger Variabeln stattfinde, so muss dieselbe auch bestehen, wenn die Anzahl derselben drei beträgt. Um nun wiederum eine charakteristische Eigenschaft aller derjenigen Functionen zu finden, welche, wenn x_1, x_2, x_3 beliebige Argumente, z_1, z_2, z_3 die zugehörigen Functionalwerthe, X_1 und X_2 zwei mit x_1, x_2, x_3 algebraisch durch die Gleichungen

$$(77.)\qquad X_1 = f_1(x_1, x_2, x_3),\quad X_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

verbundene Grössen, und Z_1, Z_2 die zu X_1 und X_2 gehörigen Functionalwerthe bedeuten, der Beziehung Genüge leisten

$$(78.)\qquad F\{Z_1, Z_2, z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3\} = 0,$$

differentiire man die letztere Gleichung zweimal nach x_1, x_2, x_3, und erhält sieben Gleichungen, aus denen man die sechs Grössen $Z_1, Z_2, \frac{\partial Z_1}{\partial X_1}, \frac{\partial Z_2}{\partial X_2}, \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X_1^2}, \frac{\partial^2 Z_2}{\partial X_2^2}$ eliminiren kann, so dass sich eine algebraische Gleichung von der Form ergiebt

*) Der allgemeinere Fall, in welchem eine algebraische Beziehung zu mehr als zwei Functionalwerthen für algebraisch mit den Variabeln verbundene Argumente stattfindet, wird durch die nachfolgenden Methoden genau ebenso erledigt; das Resultat der Untersuchung wird später angegeben werden.

$$(79.)\quad \mathfrak{F}\left\{z_1, z_2, z_3, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{dz_3}{dx_3}, \frac{d^2z_1}{dx_1^2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}, \frac{d^2z_3}{dx_3^2}, x_1, x_2, x_3\right\} = 0,$$

und hieraus, wenn x_2, x_3, z_2, z_3 als Parameter betrachtet werden

$$(80.)\quad \varphi\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2z_1}{dx_1^2}\right) = 0;$$

wir erhalten somit den folgenden Satz:

Soll eine Function ein Functionaltheorem im oben angegebenen Sinne besitzen, so muss sie das Integral einer algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung sein.

Integralen von irreductibeln Differentialgleichungen höherer Ordnung als der zweiten kann also ein derartiges Functionaltheorem für zwei feste Reductionsintegrale oder für das Geschlecht $p = 2$ nicht zukommen.

Sei nun die algebraische Differentialgleichung zweiter Ordnung, von der die in Frage stehende Function ein Integral ist,

$$(81.)\quad \varphi\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0,$$

so dass

$$(82.)\quad \varphi\left(X_1, Z_1, \frac{dZ_1}{dX_1}, \frac{d^2Z_1}{dX_1^2}\right) = 0, \quad \varphi\left(X_2, Z_2, \frac{dZ_2}{dX_2}, \frac{d^2Z_2}{dX_2^2}\right) = 0$$

ist, so wird man, wenn die Gleichung (78.) viermal nach x_2 und die beiden Gleichungen (82.) zweimal nach X_1 resp. X_2 differentiirt werden, elf Gleichungen erhalten, die wir kurz durch

$$(83.)\quad \begin{cases} F = 0, \ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 0, \ \dfrac{\partial^3 F}{\partial x_2^3} = 0, \ \dfrac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0, \\ \bar{\varphi} = 0, \ \dfrac{d\bar{\varphi}}{dX_1} = 0, \ \dfrac{d^2\bar{\varphi}}{dX_1^2} = 0, \ \bar{\bar{\varphi}} = 0, \ \dfrac{d\bar{\bar{\varphi}}}{dX_2} = 0, \ \dfrac{d^2\bar{\bar{\varphi}}}{dX_2^2} = 0 \end{cases}$$

bezeichnen wollen, und aus denen die zehn Grössen Z_1, Z_2 und deren erste, zweite, dritte, vierte Differentialquotienten nach X_1 resp. X_2 genommen eliminirt werden mögen. Es ergiebt sich somit eine algebraische Differentialgleichung vierter Ordnung in z_2, da z_1, z_3, x_1, x_3 wegen der willkürlichen, von x_2 völlig unabhängigen Werthe von x_1 und x_3 als Parameter betrachtet werden dürfen, und diese Differentialgleichung sei dargestellt durch

$$(84.)\quad \omega\left(x_2, z_2, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}, \frac{d^3z_2}{dx_2^3}, \frac{d^4z_2}{dx_2^4}\right) = 0.$$

Nun könnten zwei Fälle eintreten, indem z_2, welches nach (81.) der Differentialgleichung

$$(85.) \quad \varphi\left(x, z_2, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}\right) = 0$$

genügt, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in Bezug auf $\frac{d^2z_2}{dx_2^2}$ als algebraisch irreductibel voraussetzen dürfen, schon eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung befriedigt — der Fall, dass es selbst algebraisch ist, kann aus oben angegebenen Gründen ausgeschlossen werden — oder es genügt erst einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und zwar (85.). Sei

I. die algebraische, im ersten Differentialquotienten algebraisch irreductible Differentialgleichung erster Ordnung, von welcher z_2 für $x = x_2$ ein Integral ist,

$$(86.) \quad \psi\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

so differentiire man die Gleichung (78.) zweimal nach x_2, die zu X_1 und X_2 gehörigen Differentialgleichungen (86.) einmal nach X_1 resp. X_2, so erhält man ein System von sieben Gleichungen

$$(87.) \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 0, \quad \bar{\psi} = 0, \quad \frac{d\bar{\psi}}{dX_1} = 0, \quad \bar{\bar{\psi}} = 0, \quad \frac{d\bar{\bar{\psi}}}{dX_2} = 0,$$

aus denen Z_1, Z_2 und deren erste und zweite Differentialquotienten nach X_1 resp. X_2 eliminirt werden mögen, so dass sich, indem wieder z_1, z_3, x_1, x_3 als Parameter betrachtet werden,

$$(88.) \quad \omega\left(x_2, z_2, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}\right) = 0$$

als Eliminationsresultat ergeben wird. Da nun z_2 der algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(89.) \quad \psi\left(x_2, z, \frac{dz}{dx_2}\right) = 0$$

genügt, so wird jedes Integral dieser Differentialgleichung ebenfalls der Gleichung (88.) Genüge leisten *). Da sich nun bei dem algebraischen Eliminationsprocesse, welcher auf die Gleichung (88.) führte, die Grössen $Z_1, Z_2, \frac{dZ_1}{dX_1}, \frac{dZ_2}{dX_2}, \frac{d^2Z_1}{dX_1^2}, \frac{d^2Z_2}{dX_2^2}$ im allgemeinen als rationale, jedenfalls als algebraische Functionen der in den Gleichungen (87.) enthaltenen Grössen,

*) Vergl. § 1 meiner Allgemeinen Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen.

also, von den Parametern abgesehen, von x_2, z_2, $\frac{dz_2}{dx_2}$, $\frac{d^2z_2}{dx_2^2}$ ergeben, so mögen sich, wenn statt z_2 in diesen algebraischen Ausdrücken irgend ein anderes Integral z_2' der Differentialgleichung (89.) substituirt wird, statt der oben hingeschriebenen Grössen die folgenden

$$(\alpha.) \quad Z_1', Z_2', \left(\frac{dZ_1}{dX_1}\right)', \left(\frac{dZ_2}{dX_2}\right)', \left(\frac{d^2Z_1}{dX_1^2}\right)', \left(\frac{d^2Z_2}{dX_2^2}\right)'$$

ergeben, welche die Gleichungen (87.) befriedigen werden; war aber z. B.

$$(90.) \quad Z_1 = \Omega_1\left(x_2, z_2, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}\right), \frac{dZ_1}{dX_1} = \Omega_{11}\left(x_2, z_2, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}\right),$$

so dass

$$(91.) \quad Z_1' = \Omega_1\left(x_2, z_2', \frac{dz_2'}{dx_2}, \frac{d^2z_2'}{dx_2^2}\right), \left(\frac{dZ_1}{dX_1}\right)' = \Omega_{11}\left(x_2, z_2', \frac{dz_2'}{dx_2}, \frac{d^2z_2'}{dx_2^2}\right)$$

wird, so folgt aus (90.)

$$(92.) \quad \Omega_{11}\left(x_2, z_2, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}\right) = \frac{1}{\frac{\partial X_1}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_2} \Omega_1\left(x_2, z_2, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}\right),$$

und da diese Differentialgleichung dritter Ordnung wieder durch jedes Integral von (89.), also auch durch z_2' befriedigt werden muss, so wird dieselbe vermöge (91.) die Beziehung liefern

$$\left(\frac{dZ_1}{dX_1}\right)' = \frac{dZ_1'}{dX_1};$$

da nun die Schlüsse für die anderen Grössen (α.) dieselben bleiben, so erhalten wir dem Integrale z_2' zugehörig als System der Eliminationsgrössen die folgenden:

$$(\beta.) \quad Z_1', Z_2', \frac{dZ_1'}{dX_1}, \frac{dZ_2'}{dX_2}, \frac{d^2Z_1'}{dX_1^2}, \frac{d^2Z_2'}{dX_2^2},$$

und es werden daher die Gleichungen befriedigt sein

$$(93.) \quad F\{Z_1', Z_2', z_1, z_2', z_3, x_1, x_2, x_3\} = 0,$$

$$(94.) \quad \psi\left(X_1, Z_1', \frac{dZ_1'}{dX_1}\right) = 0, \quad \psi\left(X_2, Z_2', \frac{dZ_2'}{dX_2}\right) = 0,$$

d. h. *die das Functionaltheorem für die Differentialgleichung* (86.) *definirende Gleichung* (78.) *bleibt bestehen, wenn statt eines der Integrale* z_1, z_2, z_3 *irgend ein anderes particuläres Integral der betr. Differentialgleichung, für* Z_1 *und* Z_2 *passende Integrale der dazu gehörigen Differentialgleichungen gesetzt werden.*

Setzt man nun in (78.) für z_2 und z_3 die allgemeinen zu den Argumenten x_2 und x_3 gehörigen Integrale, welche je eine willkürliche Constante

μ und ν enthalten, für Z_1 und Z_2 passende Integrale, deren Integrationsconstanten m und n bestimmte Functionen

$$(95.)\quad m = \varphi_1(\mu, \nu), \quad n = \varphi_2(\mu, \nu)$$

jener beiden Constanten sein werden, und wählen wir zwischen μ und ν eine solche Beziehung, dass n einen beliebigen, aber fest gegebenen Werth annimmt, so wird, x_2 und x_3 als Parameter betrachtet, z_2 als Werth des wegen der Willkürlichkeit von μ allgemeinen Integrals mit der willkürlichen Constanten C_2 bezeichnet werden dürfen, während der mit C_3 zu bezeichnende Werth von z_3 so von C_2 abhängt, dass n unverändert bleibt, und es wird sich somit aus (78.) die Beziehung ergeben

$$(96.)\quad F\{Z_1, Z_2, z_1, C_2, C_3, x_1, x_2, x_3\} = 0.$$

Setzt man nun hierin für C_2 und C_3 zwei Werthepaare, so wird Z_2 wegen des constant bleibenden n unverändert bleiben, und man erhält die beiden Gleichungen

$$(97.)\quad \begin{cases} F\{Z_1^{(1)}, Z_2, z_1, C_2^{(1)}, C_3^{(1)}, x_1, x_2, x_3\} = 0, \\ F\{Z_1^{(2)}, Z_2, z_1, C_2^{(2)}, C_3^{(2)}, x_1, x_2, x_3\} = 0; \end{cases}$$

die Elimination von Z_2 und z_1 zwischen den Gleichungen (96.) und (97.) liefert, wenn man zugleich vermittels der ersten der Gleichungen (77.) x_1 durch X_1 und die Parameter x_2, x_3 ausgedrückt substituirt, die Beziehung

$$(98.)\quad Z_1 = \Phi\{Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, X_1, C\},$$

worin Z_1, $Z_1^{(1)}$, $Z_1^{(2)}$ Integrale der Differentialgleichung

$$\psi\left(X, Z, \frac{dZ}{dX}\right) = 0$$

sind und C eine willkürliche Constante bedeutet, für welche wir auch das frühere C_2 einführen könnten.

Es ergiebt sich somit der folgende Satz:

A. *Ein Functionaltheorem im angegebenen Sinne für das Geschlecht* 2 *kann nur Integralen solcher Differentialgleichungen erster Ordnung zukommen, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale, der unabhängigen Variabeln und einer willkürlichen Constanten ist* —

worin natürlich der Fall, dass nur *ein* particuläres Integral in den Ausdruck eintritt, zugleich eingeschlossen ist.

Lassen wir nunmehr die ad I gemachte Annahme fallen, dass z_2 schon einer Differentialgleichung erster Ordnung (86.) genügt und nehmen an,

II. z_2 genüge der Gleichung (85.) und nicht schon einer Differentialgleichung erster Ordnung; dann wird, weil z_2 auch die Gleichung (84.) befriedigt, wiederum nach § 1 meiner „Allg. Untersuchungen" jedes Integral von (85.) auch ein Integral von (84.) sein müssen, und es wird in Folge von Schlüssen, welche genau den ad I gemachten analog sind, gefolgert werden können, *dass die Beziehung* (78.) *auch in diesem Falle erhalten bleibt, wenn* z_1, z_2, z_3 *durch beliebige andere particuläre Integrale,* Z_1 *und* Z_2 *durch passende Integrale der dazugehörigen Differentialgleichungen ersetzt werden.*

Setzt man nun in (78.) für z_2 und z_3 die zu x_2 und x_3 gehörigen Integrale mit je zwei willkürlichen Constanten μ_1, μ_2 und ν_1, ν_2, für Z_1, Z_2 passende zu den Argumenten X_1 und X_2 gehörige Integrale, deren Integrationsconstanten m_1, m_2 und n_1, n_2 mit jenen vier Constanten durch die Beziehungen verknüpft sind

$$m_1 = \varphi_1(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2), \quad m_2 = \varphi_2(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2),$$
$$n_1 = \psi_1(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2), \quad n_2 = \psi_2(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2),$$

so können wir die vier Grössen $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ so wählen, dass n_1 und n_2 beliebige aber fest gegebene Werthe annehmen, in welchem Falle für alle diesen beiden Bedingungen genügenden Werthe noch zwei jener vier Werthe völlig willkürlich bleiben, also — x_2 und x_3 wieder als Parameter aufgefasst — z_2 und z_3 durch je eine willkürliche Constante in (78.) ersetzt werden dürfen, während bei verändertem Z_1 die Grösse Z_2 ihren Werth beibehält, da n_1 und n_2 unverändert bleiben. Wir erhalten daher die drei Gleichungen

$$(99.) \quad \begin{cases} F\{Z_1, Z_2, z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3\} = 0, \\ F\{Z_1^{(1)}, Z_2, z_1, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, x_1, x_2, x_3\} = 0, \\ F\{Z_1^{(2)}, Z_2, z_1, C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, x_1, x_2, x_3\} = 0, \end{cases}$$

aus denen sich durch Elimination von Z_2 und z_1 und durch Substitution von X_1 durch x_1 vermittels der ersten der Gleichungen (77.) die Beziehung ergiebt

$$(100.) \quad Z_1 = \Phi\{Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, X_1, C_1, C_2\},$$

worin Z_1, $Z_1^{(1)}$, $Z_1^{(2)}$ Integrale der Differentialgleichung

$$\varphi\left\{X_1, Z, \frac{dZ}{dX_1}, \frac{d^2Z}{dX_1^2}\right\} = 0$$

sind, und C_1, C_2 willkürliche Constanten bedeuten. Daraus folgt:

B. *Ein Functionaltheorem im angegebenen Sinne für das Geschlecht* $p=2$ *kann nur Integralen, wenn sie nicht schon einer Differentialgleichung erster*

Ordnung genügen, von solchen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zukommen, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale, der unabhängigen Variabeln und zweier willkürlicher Constanten ist —

worin natürlich wiederum der Fall, dass nur *ein* particuläres Integral in den Ausdruck eintritt, mit eingeschlossen ist.

Wir haben somit, um die mögliche Existenz der Functionaltheoreme festzustellen, uns mit der Aufsuchung derjenigen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung zu beschäftigen, für welche Theoreme wie die in A. und B. ausgesprochenen statthaben.

Suchen wir zunächst

I. *für alle algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung*

a) diejenigen auf, für welche das allgemeine Integral algebraisch von nur *einem* particulären Integrale abhängt, so war bereits oben (51.) gefunden worden, dass eine solche Differentialgleichung nothwendig durch eine algebraische Substitution auf die Form gebracht werden kann

$$(101.)\qquad \frac{du}{dt} = \omega(t).\chi(u),$$

worin $\chi(u) = \sqrt{(1-u^2)(1-\lambda^2u^2)}$ ist, wenn $\int\frac{du}{\chi(u)}$ nicht eine algebraische oder rein logarithmische Function war, und es bleibt für diesen Fall somit die Frage zu beantworten übrig, ob eine Differentialgleichung dieser Form für eines ihrer particulären Integrale ein Functionaltheorem von der Form (78.) liefern könne. Sei zunächst

$$(102.)\qquad \frac{du}{dt} = \omega(t).\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda^2u^2)},$$

und bestehe für ein Integral derselben, wenn t_1, t_2, t_3 drei willkürliche Argumente, T_1 und T_2 zwei von diesen durch die Beziehungen

$$(103.)\qquad T_1 = f_1(t_1, t_2, t_3),\quad T_2 = f_2(t_1, t_2, t_3)$$

algebraisch abhängige, endlich u_1, u_2, u_3, U_1, U_2 die zugehörigen Functionalwerthe bezeichnen, ein Functionaltheorem von der Form

$$(104.)\qquad F\{U_1, U_2, u_1, u_2, u_3, t_1, t_2, t_3\} = 0,$$

oder wie aus (102.) hervorgeht,

$$(105.)\qquad \begin{cases} F\Big\{\sin\operatorname{am}\int^{T_1}\omega(t)\,dt,\ \sin\operatorname{am}\int^{T_2}\omega(t)\,dt, \\ \sin\operatorname{am}\int^{t_1}\omega(t)\,dt,\ \sin\operatorname{am}\int^{t_2}\omega(t)\,dt,\ \sin\operatorname{am}\int^{t_3}\omega(t)\,dt,\ t_1, t_2, t_3\Big\} = 0; \end{cases}$$

dann folgt durch genau dieselben Schlüsse, wie es die an die Gleichung (53.) geknüpften waren, dass

$$(106.)\quad \begin{cases} a_1 \dfrac{\partial F}{\partial U_1} \sqrt{(1-U_1^2)(1-\lambda^2 U_1^2)} + a_2 \dfrac{\partial F}{\partial U_2} \sqrt{(1-U_2^2)(1-\lambda^2 U_2^2)} \\ \qquad = -\dfrac{\partial F}{\partial u_1} \sqrt{(1-u_1^2)(1-\lambda^2 u_1^2)}, \\ b_1 \dfrac{\partial F}{\partial U_1} \sqrt{(1-U_1^2)(1-\lambda^2 U_1^2)} + b_2 \dfrac{\partial F}{\partial U_2} \sqrt{(1-U_2^2)(1-\lambda^2 U_2^2)} \\ \qquad = -\dfrac{\partial F}{\partial u_2} \sqrt{(1-u_2^2)(1-\lambda^2 u_2^2)}, \\ c_1 \dfrac{\partial F}{\partial U_1} \sqrt{(1-U_1^2)(1-\lambda^2 U_1^2)} + c_2 \dfrac{\partial F}{\partial U_2} \sqrt{(1-U_2^2)(1-\lambda^2 U_2^2)} \\ \qquad = -\dfrac{\partial F}{\partial u_3} \sqrt{(1-u_3^2)(1-\lambda^2 u_3^2)}. \end{cases}$$

Nun ist aber nach (104.) durch partielle Differentiation nach t_1

$$\frac{\partial F}{\partial U_1}\frac{dU_1}{dT_1}\frac{\partial T_1}{\partial t_1} + \frac{\partial F}{\partial U_2}\frac{dU_2}{dT_2}\frac{\partial T_2}{\partial t_1} + \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt_1} + \frac{\partial F}{\partial t_1} = 0$$

oder nach (102.) und der ersten der Gleichungen (106.)

$$(107.)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial F}{\partial t_1} = \dfrac{\partial F}{\partial U_1} \sqrt{(1-U_1^2)(1-\lambda^2 U_1^2)} \left\{\omega(T_1)\dfrac{\partial T_1}{\partial t_1} - a_1\omega(t_1)\right\} \\ \qquad + \dfrac{\partial F}{\partial U_2} \sqrt{(1-U_2^2)(1-\lambda^2 U_2^2)} \left\{\omega(T_2)\dfrac{\partial T_2}{\partial t_1} - a_2\omega(t_1)\right\}, \end{cases}$$

und genau ebenso durch partielle Differentiation nach t_2 und t_3

$$(108.)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial F}{\partial t_2} = \dfrac{\partial F}{\partial U_1} \sqrt{(1-U_1^2)(1-\lambda^2 U_1^2)} \left\{\omega(T_1)\dfrac{\partial T_1}{\partial t_2} - b_1\omega(t_2)\right\} \\ \qquad + \dfrac{\partial F}{\partial U_2} \sqrt{(1-U_2^2)(1-\lambda^2 U_2^2)} \left\{\omega(T_2)\dfrac{\partial T_2}{\partial t_2} - b_2\omega(t_2)\right\}, \end{cases}$$

$$(109.)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial F}{\partial t_3} = \dfrac{\partial F}{\partial U_1} \sqrt{(1-U_1^2)(1-\lambda^2 U_1^2)} \left\{\omega(T_1)\dfrac{\partial T_1}{\partial t_3} - c_1\omega(t_3)\right\} \\ \qquad + \dfrac{\partial F}{\partial U_2} \sqrt{(1-U_2^2)(1-\lambda^2 U_2^2)} \left\{\omega(T_2)\dfrac{\partial T_2}{\partial t_3} - c_2\omega(t_3)\right\}, \end{cases}$$

woraus

$$(110.)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial t_1} & \omega(T_1)\dfrac{\partial T_1}{\partial t_1} - a_1\omega(t_1) & \omega(T_2)\dfrac{\partial T_2}{\partial t_1} - a_2\omega(t_1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial t_2} & \omega(T_1)\dfrac{\partial T_1}{\partial t_2} - b_1\omega(t_2) & \omega(T_2)\dfrac{\partial T_2}{\partial t_2} - b_2\omega(t_2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial t_3} & \omega(T_1)\dfrac{\partial T_1}{\partial t_3} - c_1\omega(t_3) & \omega(T_2)\dfrac{\partial T_2}{\partial t_3} - c_2\omega(t_3) \end{vmatrix} = 0$$

folgt. Denkt man nun aus der Gleichung (104.) U_2 als algebraische Func-

tion der anderen Grössen ausgedrückt und in (107.) eingesetzt, so würde diese Gleichung in eine algebraische Beziehung zwischen U_1, u_1, u_2, u_3, t_1, t_2, t_3 übergehen, das in Rede stehende Integral also schon ein Functionaltheorem für das Geschlecht 1 besitzen und somit der oben abgeschlossenen Untersuchung angehören; es muss daher die so entstehende Gleichung eine in den eben bezeichneten Grössen identische sein. Bestimmt man daher die Grössen u_1 und U_1 aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial U_1}\sqrt{(1-U_1^2)(1-\lambda^2 U_1^2)} = 0$$

durch die übrigen noch willkürlichen Grössen, so muss, wie man unmittelbar sieht, die Klammer des zweiten Postens jener Gleichung für willkürliche t_1, t_2, t_3 verschwinden, und da diese Schlüsse auch für die anderen ähnlichen Ausdrücke gelten, so erhalten wir die Beziehungen

$$\omega(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t_1} - a_1\omega(t_1) = 0, \quad \omega(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t_2} - b_1\omega(t_2) = 0, \quad \omega(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t_3} - c_1\omega(t_3) = 0,$$
$$\omega(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t_1} - a_2\omega(t_1) = 0, \quad \omega(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t_2} - b_2\omega(t_2) = 0, \quad \omega(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t_3} - c_2\omega(t_3) = 0,$$

und aus diesen unmittelbar durch Multiplication mit dt_1, dt_2, dt_3 und Addition

$$(111.) \quad \begin{cases} \int^{T_1}\omega(t)dt = a_1\int^{t_1}\omega(t)dt + b_1\int^{t_2}\omega(t)dt + c_1\int^{t_3}\omega(t)dt, \\ \int^{T_2}\omega(t)dt = a_2\int^{t_1}\omega(t)dt + b_2\int^{t_2}\omega(t)dt + c_2\int^{t_3}\omega(t)dt. \end{cases}$$

Fassen wir nunmehr die erste dieser beiden Gleichungen ins Auge, um den Charakter der Function $\omega(t)$ zu ermitteln, so folgt, wenn t_3 der unteren Integralgrenze gleichgesetzt wird

$$(112.) \quad \int^{T_1}\omega(t)dt = a_1\int^{t_1}\omega(t)dt + b_1\int^{t_2}\omega(t)dt;$$

macht man ferner t_2 der unteren Grenze gleich und ausserdem $t_3 = t_2$, so ergiebt sich

$$(113.) \quad \int^{T_1''}\omega(t)dt = a_1\int^{t_1}\omega(t)dt + c_1\int^{t_2}\omega(t)dt,$$

und aus (112.) und (113.), wenn $b_1 - c_1 = m$ gesetzt wird,

$$\int^{T_1'}\omega(t)dt - \int^{T_1''}\omega(t)dt = m\int^{t_2}\omega(t)dt,$$

worin T_1' und T_1'' algebraische Functionen von t_1 und t_2 sind, und setzt man nun $T_1' = \mathrm{t}_1$, $T_1'' = \mathrm{t}_2$, so kann man t_1 und t_2 als willkürliche Argumente und $t_2 = \mathfrak{T}$ als eine algebraisch von diesen abhängige Grösse betrachten, für

welche

$$(114.)\qquad \int^{t_1}\omega(t)dt - \int^{t_2}\omega(t)dt = m\int^{\mathfrak{x}}\omega(t)dt$$

ist. Bestimmt man endlich t_2 der unteren Grenze gleich, so erkennt man unmittelbar aus bekannten Periodenbetrachtungen, dass m entweder ein zur complexen Multiplication gehöriger Multiplicator oder eine rationale Zahl sein und $\int\omega(x)dx$ durch eine algebraische Substitution auf ein elliptisches Integral zurückführbar sein muss, und bemerkt man, dass dieses Integral wegen der Form der Differentialgleichung (102.) ein Integral erster Gattung sein muss, so wird man auf die Differentialgleichung (33.) zurückgeführt, für welche das Functionaltheorem oben erledigt und zum Geschlechte 1 gehörig gefunden wurde.

Es bleibt somit nur noch der Fall zu untersuchen übrig, in dem $\int\frac{du}{\chi(u)}$ eine algebraische oder rein logarithmische Function ist. Sei zunächst $\int\frac{dz}{\chi(z)} = \psi(z)$ eine algebraische Function, so dass

$$\psi(z) = \int\omega(x)dx$$

ist, so wird das gesuchte Functionaltheorem (78.) die Form annehmen

$$(115.)\qquad \begin{cases} F\Big\{\int^{X_1}\omega(x)dx,\ \int^{X_2}\omega(x)dx, \\ \int^{x_1}\omega(x)dx,\ \int^{x_2}\omega(x)dx,\ \int^{x_3}\omega(x)dx,\ x_1,\ x_2,\ x_3\Big\} = 0, \end{cases}$$

und da bekanntlich zwischen Integralen algebraischer Functionen nur lineare Relationen mit constanten Coefficienten bestehen können, so wird das Functionaltheorem lauten müssen

$$A_1\int^{X_1}\omega(x)dx + A_2\int^{X_2}\omega(x)dx$$
$$+a_1\int^{x_1}\omega(x)dx + a_2\int^{x_2}\omega(x)dx + a_3\int^{x_3}\omega(x)dx = \pi(x_1, x_2, x_3),$$

woraus wieder nach bekannten Sätzen geschlossen wird, dass $\int\omega(x)dx$ ein zum Geschlechte 2 gehöriges *Abel*sches Integral mit nur algebraischen Unstetigkeiten sein muss. Und genau den auf Gleichung (73.) angewandten Schlüssen analog wird gefolgert, dass, wenn $\int\frac{dz}{\chi(z)}$ eine rein logarithmische Function ist, $\int\omega(x)dx$ ein zum Geschlechte 2 gehöriges *Abel*sches Integral mit nur logarithmischen Unstetigkeiten sein muss, so dass wir den Satz erhalten:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function einer Variabeln, welche einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, deren allgemeines Integral eine algebraische Function nur eines particulären Integrales derselben ist, ein Functionaltheorem im angegebenen Sinne für das Geschlecht $p = 2$ besitzt, ist die, dass dieselbe durch eine algebraische Transformation auf die Form

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x)\chi(z)$$

zurückgeführt werden kann, in welcher entweder $\int\frac{dz}{\chi(z)}$ eine algebraische Function und $\int\omega(x)dx$ ein nur algebraisch unstetig werdendes Abelsches Integral vom Geschlechte $p = 2$ ist, oder $\int\frac{dz}{\chi(z)}$ den Logarithmus einer algebraischen Function darstellt, während $\int\omega(x)dx$ ein zum Geschlechte $p = 2$ gehöriges Abelsches Integral mit nur logarithmischen Unstetigkeiten bedeutet.

Schreiten wir weiter noch zu I. gehörig zu allen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung fort,

b) für welche das allgemeine Integral sich algebraisch durch *zwei*, algebraisch von einander unabhängige particuläre Integrale ausdrücken lässt, so wird, wenn diese Differentialgleichung durch

$$(116.)\qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, z)$$

bezeichnet wird, worin $\varphi(x, z)$ eine irreductible Function von x und z darstellen mag, und

$$(117.)\qquad z = f(x, z_1, z_2, c)$$

den algebraischen Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen definirt, vermöge (116.) und (117.)

$$(118.)\qquad \varphi(x, f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\varphi(x, z_1) + \frac{\partial f}{\partial z_2}\varphi(x, z_2)$$

sein. Da nun zwischen x, z_1 und z_2 nicht schon eine algebraische Beziehung stattfinden sollte, indem sich dieselbe zur Reduction von (117.) auf *ein* particuläres Integral verwenden liesse und somit auf den früheren Fall I *a*) zurückführen würde, so muss die Gleichung (118.) eine identische sein, und man erhält, was nun erlaubt ist, durch Differentiation nach z_1 und c die Beziehungen

$$\frac{\partial\varphi(x,f)}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\varphi(x,z_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_2}\varphi(x,z_2)+\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial\varphi(x,z_1)}{\partial z_1},$$

$$\frac{\partial\varphi(x,f)}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial c}+\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial c}\varphi(x,z_1)+\frac{\partial^2 f}{\partial z_2\partial c}\varphi(x,z_2),$$

und durch Elimination von $\frac{\partial\varphi(x,f)}{\partial f}$

$$\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z_1}-\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial c}+\varphi(x,z_1)\left\{\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}-\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial c}\right\}$$
$$+\varphi(x,z_2)\left\{\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_2}-\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial^2 f}{\partial z_2\partial c}\right\}+\frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial\varphi(x,z_1)}{\partial z_1} = 0$$

oder auch

$$(119.)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi(x,z_1)}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial x}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}+\varphi(x,z_1)\frac{\partial}{\partial z_1}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}\\ &\qquad+\varphi(x,z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}\log\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\} = 0,\end{aligned}\right.$$

welche Gleichung wiederum für alle Werthe der Variabeln identisch erfüllt sein muss.

Die Integration der in der Function $\varphi(x,z_1)$ linearen Differentialgleichung liefert den Ausdruck

$$(120.)\quad \varphi(x,z_1) = L\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}-\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}dz_1-\frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}\varphi(x,z_2)\int\frac{\partial}{\partial z_2}\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}\right\}dz_1,$$

worin L eine im allgemeinen von x, z_2 und c abhängige Function ist und diese Grössen sowie z_1 völlig willkürlich sind. *Nehmen wir zunächst wieder an, dass in die algebraische Beziehung* (117.) *die Variable x nicht explicite eintritt,* also

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial c}}dz_1 = 0$$

ist, so wird nach (120.) $\varphi(x,z_1)$ die Form annehmen

$$(121.)\quad \varphi(x,z_1) = \varphi_1(x)\psi_1(z_1)+\varphi_2(x)\psi_2(z_1),$$

und somit die nothwendige Form aller Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier algebraisch von einander unabhängiger Integrale ist, in welche die unabhängige

Variable nicht explicite eintritt,

$$(122.)\qquad \frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z)+\varphi_2(x)\psi_2(z)$$

sein. Der gemachten Annahme gemäss wird die Beziehung (117.) in

$$(123.)\qquad z = f(z_1, z_2, c)$$

übergehen und der aus den drei Gleichungen

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z)+\varphi_2(x)\psi_2(z),\quad \frac{dz_1}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z_1)+\varphi_2(x)\psi_2(z_1),$$

$$\frac{dz_2}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z_2)+\varphi_2(x)\psi_2(z_2)$$

hervorgehenden Differentialgleichung

$$(124.)\qquad \begin{vmatrix} dz & dz_1 & dz_2 \\ \psi_1(z) & \psi_1(z_1) & \psi_1(z_2) \\ \psi_2(z) & \psi_2(z_1) & \psi_2(z_2) \end{vmatrix} = 0$$

genügen müssen. Es ist aber auch leicht einzusehen, dass die letztere Gleichung als eine *Pfaff*sche Differentialgleichung aufgefasst werden kann, in der z_1 und z_2 unabhängige, z die abhängige Variable bedeuten, und von welcher (123.) das allgemeine Integral darstellt. Denn da die durch Einsetzen von (123.) in (122.) sich ergebende in den Variablen algebraische Gleichung

$$\varphi_1(x)\psi_1(f)+\varphi_2(x)\psi_2(f) = \frac{\partial f}{\partial z_1}[\varphi_1(x)\psi_1(z_1)+\varphi_2(x)\psi_2(z_1)]$$
$$+\frac{\partial f}{\partial z_2}[\varphi_1(x)\psi_1(z_2)+\varphi_2(x)\psi_2(z_2)]$$

wiederum eine identische sein muss, da wir sonst aus (123.) eines der particulären Integrale herausschaffen könnten, so wird man in diese statt z_1 und z_2 zwei beliebige andere particuläre Integrale z_1' und z_2' der Differentialgleichung (122.) setzen können, und aus

$$\varphi_1(x)\psi_1[f(z_1', z_2', c)]+\varphi_2(x)\psi_2[f(z_1', z_2', c)]$$
$$= \frac{\partial f(z_1', z_2', c)}{\partial z_1'}[\varphi_1(x)\psi_1(z_1')+\varphi_2(x)\psi_2(z_1')]$$
$$+\frac{\partial f(z_1', z_2', c)}{\partial z_2'}[\varphi_1(x)\psi_1(z_2')+\varphi_2(x)\psi_2(z_2')],$$

$$\frac{dz_1'}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z_1')+\varphi_2(x)\psi_2(z_1') \quad\text{und}\quad \frac{dz_2'}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1(z_2')+\varphi_2(x)\psi_2(z_2')$$

folgt dann unmittelbar

$$\frac{df(z'_1, z'_2, c)}{dx} = \varphi_1(x)\psi_1[f(z'_1, z'_2, c)] + \varphi_2(x)\psi_2[f(z'_1, z'_2, c)],$$

d. h. es ist

$$z' = f(z'_1, z'_2, c).$$

ebenfalls ein allgemeines Integral der Differentialgleichung (122.), und man darf somit in (123.) z_1 und z_2 durch zwei willkürliche particuläre Integrale ersetzen, wenn man nur für z ein passendes Integral eben dieser Differentialgleichung substituirt; denkt man also einen Werth des x willkürlich aber fest gewählt, so werden in (123.) noch z_1 und z_2 dazu ganz willkürlich bestimmt werden können, da sie beliebige particuläre Integrale vorstellen, und zugleich wird man, da das Verhältniss von dz_1 zu dz_2 von x, z_1, z_2 abhängt, zu einem willkürlichen Werthepaare von z_1 und z_2 vermöge der Willkürlichkeit von x jenes Verhältniss auch noch beliebig annehmen können; es werden somit z_1 und z_2 in (123.) sowie in der Differentialgleichung (124.) zwei von einander unabhängige Variable bedeuten dürfen, während z dann einen von diesen abhängigen bestimmten Werth annimmt*). Setzt man nun die Differentialgleichung (124.) in die Form

$$(125.)\qquad dz = \frac{\psi_1(z)\psi_2(z_2)-\psi_1(z_2)\psi_2(z)}{\psi_1(z_1)\psi_2(z_2)-\psi_1(z_2)\psi_2(z_1)}dz_1 + \frac{\psi_2(z)\psi_1(z_1)-\psi_2(z_1)\psi_1(z)}{\psi_1(z_1)\psi_2(z_2)-\psi_1(z_2)\psi_2(z_1)}dz_2,$$

so wird, da (123.) das *allgemeine* Integral dieser ist, auch die nothwendige Integrabilitätsbedingung erfüllt sein müssen, welche lautet:

---

*) Man kann auch den Beweis dafür, dass die Gleichung (123.) das allgemeine Integral der Differentialgleichung (124.) mit zwei von einander unabhängigen Variabeln ist, so führen, dass man $dz = \frac{\partial f}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2}dz_2$ in (124.) einsetzt und aus der Annahme, dass die Coefficienten von dz_1 und dz_2 in der so entstehenden Gleichung nicht verschwinden, die dann nothwendige Relation herleitet

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_2(z_1) \\ \psi_1(z_2) & \psi_2(z_2) \end{vmatrix} = 0,$$

welche, wie leicht zu sehen, entweder $\varphi_2(x) = \varkappa\varphi_1(x)$ oder $\psi_2(z_1) = \lambda\psi_1(z_1)$ liefert, worin $\varkappa$ und λ Constanten bedeuten — in beiden Fällen würde die Differentialgleichung auf die schon oben behandelte Form

$$\frac{dz}{dx} = \Phi(x)\Psi(z)$$

zurückführbar sein; vergl. meine Arbeit „Ueber die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbständigen Transcendenten" Acta Mathematica III.

$$\frac{\partial\left[\frac{\psi_1(z)\psi_2(z_2)-\psi_1(z_2)\psi_2(z)}{\psi_1(z_1)\psi_2(z_2)-\psi_2(z_1)\psi_1(z_2)}\right]}{\partial z_2}$$
$$+\frac{\partial\left[\frac{\psi_1(z)\psi_2(z_2)-\psi_1(z_2)\psi_2(z)}{\psi_1(z_1)\psi_2(z_2)-\psi_2(z_1)\psi_1(z_2)}\right]}{\partial z}\cdot\frac{\psi_1(z_1)\psi_2(z)-\psi_1(z)\psi_2(z_1)}{\psi_1(z_1)\psi_2(z_2)-\psi_2(z_1)\psi_1(z_2)}$$
$$=\frac{\partial\left[\frac{\psi_1(z_1)\psi_2(z)-\psi_1(z)\psi_2(z_1)}{\psi_1(z_1)\psi_2(z_2)-\psi_2(z_1)\psi_1(z_2)}\right]}{\partial z_1}$$
$$+\frac{\partial\left[\frac{\psi_1(z_1)\psi_2(z)-\psi_1(z)\psi_2(z_1)}{\psi_1(z_1)\psi_2(z_2)-\psi_2(z_1)\psi_1(z_2)}\right]}{\partial z}\cdot\frac{\psi_1(z)\psi_2(z_2)-\psi_1(z_2)\psi_2(z)}{\psi_1(z_1)\psi_2(z_2)-\psi_2(z_1)\psi_1(z_2)}$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$(126.)\quad\left\{\begin{aligned}&\begin{vmatrix}\psi_1(z_1) & \psi_1(z_2)\\ \psi_2(z_1) & \psi_2(z_2)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\psi_1(z) & \psi_1'(z_1)+\psi_1'(z_2)\\ \psi_2(z) & \psi_2'(z_1)+\psi_2'(z_2)\end{vmatrix}\\ +&\begin{vmatrix}\psi_1(z_2) & \psi_1(z)\\ \psi_2(z_2) & \psi_2(z)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\psi_1(z_1) & \psi_1'(z_2)+\psi_1'(z)\\ \psi_2(z_1) & \psi_2'(z_2)+\psi_2'(z)\end{vmatrix}\\ +&\begin{vmatrix}\psi_1(z) & \psi_1(z_1)\\ \psi_2(z) & \psi_2(z_1)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\psi_1(z_2) & \psi_1'(z)+\psi_1'(z_1)\\ \psi_2(z_2) & \psi_2'(z)+\psi_2'(z_1)\end{vmatrix}\end{aligned}\right\} = 0,$$

und diese Integrabilitätsbedingung muss identisch für alle z, z_1, z_2 erfüllt sein, weil $z = f(z_1, z_2, c)$ dieser Gleichung genügen muss, und ein aus (126.) ausgerechneter Werth von z, durch z_1 und z_2 ausgedrückt, keine willkürliche Constante enthalten würde. Betrachtet man nun in dieser Gleichung z_1 und z_2 als Parameter und nur z als Variable, so geht dieselbe in

$$A_1\psi_1(z)+A_2\psi_2(z)+B[\psi_1(z)\psi_2'(z)-\psi_2(z)\psi_1'(z)] = 0$$

über, worin A_1, A_2, B algebraische Functionen von z_1 und z_2 bedeuten, oder wenn

$$(127.)\quad \frac{\psi_2(z)}{\psi_1(z)} = v,\quad \frac{dz}{\psi_1(z)} = dt$$

gesetzt wird, in

$$(128.)\quad \frac{dv}{dt}+U_1 v = U,$$

worin U und U_1 als Constanten in Bezug auf v und t zu betrachten sind. Durch Integration folgt

$$v = Ce^{-U_1 t}+\frac{U}{U_1},$$

oder nach (127.)

$$(129.)\quad \psi_2(z) = \frac{U}{U_1}\psi_1(z)+C\psi_1(z)e^{-U_1\int\frac{dz}{\psi_1(z)}};$$

da aber $\psi_1(z)$ und $\psi_2(z)$ algebraische Functionen von z sein sollen, so wird auch

$$(130.)\qquad e^{-U_1\int\frac{dz}{\psi_1(z)}} = F_1(z)$$

algebraisch von dieser Variabeln abhängen müssen, und sich somit aus (130.) und (129.)

$$(131.)\qquad \psi_1(z) = -U_1\frac{F_1(z)}{F_1'(z)},\quad \psi_2(z) = -U\frac{F_1(z)}{F_1'(z)} - CU_1\frac{F_1(z)^2}{F_1'(z)},$$

und die Differentialgleichung (122.) in der Form

$$(132.)\qquad F_1'(z)\frac{dz}{dx} = [-U_1\varphi_1(x) - U\varphi_2(x)]F_1(z) - CU_1\varphi_2(x)F_1(z)^2$$

ergeben, welche, wenn $F(z) = Z$ gesetzt wird, die einfache Form annimmt

$$(133.)\qquad \frac{dZ}{dx} = f_1(x)Z + f_2(x)Z^2.$$

Es bleibt somit nur zu untersuchen, welche Differentialgleichungen von der Form (133.) die Eigenschaft haben, dass ihr allgemeines Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, indem aus (123.) und der Substitution $F(z) = Z$ eine derartige Relation hervorgeht und umgekehrt eine solche die Beziehung (123.) hervorruft. Setzt man nun $Z^{-1} = T$, so geht die Differentialgleichung (133.) in

$$(134.)\qquad \frac{dT}{dx} + f_1(x)T + f_2(x) = 0$$

über, und für diese besteht in der That zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen eine algebraische Beziehung, indem aus

$$\frac{d(T-T_1)}{dx} = -f_1(x)(T-T_1) \quad\text{und}\quad \frac{d(T-T_2)}{dx} = -f_1(x)(T-T_2)$$

sich

$$(135.)\qquad T - T_1 = C(T-T_2)$$

ergiebt; wir finden somit, *dass die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, die der linearen Differentialgleichungen und der durch eine algebraische Substitution für die abhängige Variable aus diesen abgeleiteten ist.*

Lassen wir nunmehr die Annahme fallen, dass die algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen die

unabhängige Variable nicht enthält, bestehe also wiederum die Beziehung

$$(136.)\qquad z = f(x, z_1, z_2, c),$$

so wird, wenn in (120.) $z_2 = \zeta$ und

$$(137.)\qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = \omega_1(x, z_1, \zeta, c)$$

gesetzt wird,

$$\varphi(x, z_1) = \Omega(x, \zeta, c)\omega_1(x, z_1, \zeta, c) - \omega_1(x, z_1, \zeta, c)\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dz_1}{\omega_1(x, z_1, \zeta, c)}$$
$$+\Omega_1(x, \zeta)\omega_1(x, z_1, \zeta, c)\int\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\omega_1}\right)dz_1,$$

und die Differentialgleichung erster Ordnung wird somit die Form haben

$$(138.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \Omega(x, \zeta, c)\omega_1(x, z, \zeta, c) + \Omega_1(x, \zeta)\omega_1(x, z, \zeta, c)\displaystyle\int\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\omega_1}\right)dz \\ \qquad -\omega_1(x, z, \zeta, c)\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\frac{dz}{\omega_1(x, z, \zeta, c)}, \end{cases}$$

worin Ω und Ω_1 zunächst noch willkürliche Functionen sind. Hieraus folgt wieder wie oben für das allgemeine Integral z und zwei particuläre Integrale z_1 und z_2 die Differentialgleichung

$$(139.)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dz}{\omega_1(x, z, \zeta, c)} + \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\frac{dz}{\omega_1(x, z, \zeta, c)}\cdot dx & 1 & \displaystyle\int\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\omega_1(x, z, \zeta, c)}\right)dz \\ \dfrac{dz_1}{\omega_1(x, z_1, \zeta, c)} + \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\frac{dz_1}{\omega_1(x, z_1, \zeta, c)}\cdot dx & 1 & \displaystyle\int\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\omega_1(x, z_1, \zeta, c)}\right)dz_1 \\ \dfrac{dz_2}{\omega_1(x, z_2, \zeta, c)} + \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\frac{dz_2}{\omega_1(x, z_2, \zeta, c)}\cdot dx & 1 & \displaystyle\int\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\omega_1(x, z_2, \zeta, c)}\right)dz_2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche durch die Gleichung (136.) befriedigt sein muss. Beachten wir nun, dass die Gleichung (136.) erhalten bleibt, wenn, x als willkürliche unabhängige Variable gelassen, für z_1 und z_2 willkürliche particuläre Integrale und für z ein passendes Integral der Differentialgleichung gesetzt wird, so findet man leicht durch ganz ähnliche Schlüsse, wie es die auf die Gleichung (41.) angewandten waren, dass, wenn

$$\omega_1(x, z, \zeta, c) = K_1\frac{F_1(x, z)}{\frac{\partial F_1(x, z)}{\partial z}}$$

gesetzt wird, worin K_1 eine algebraische Function von x darstellt, die Sub-

stitution

$$F_1(x, z) = Z$$

die Differentialgleichung (138.) in

$$\frac{dZ}{dx} = \varphi_1(x)Z + \varphi_2(x)Z^2$$

überführt, diese also durch eine in der abhängigen und unabhängigen Variabeln algebraische Substitution wieder auf eine lineare zurückführbar ist. Der oben ausgesprochene Satz wird somit die folgende allgemeinere Form annehmen:

Die einzige Klasse derjenigen Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale, der unabhängigen Variabeln und einer willkürlichen Constanten ist, ist die der linearen Differentialgleichungen und der durch (in der abhängigen und unabhängigen Variabeln) algebraische Substitutionen aus diesen abgeleiteten.

Es bleibt also, um den Fall I *b*) zu erledigen, nur noch zu untersuchen übrig, welche linearen Differentialgleichungen

$$(140.) \qquad \frac{dz}{dx} = f_1(x).z + f_2(x)$$

ein Functionaltheorem für das Geschlecht 2 von der Form (77.), (78.) besitzen. Zunächst ist unmittelbar zu erkennen, dass, wenn man von den Gleichungen (96.) und (97.) zu der zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen bestehenden Beziehung (98.), die in unserem Falle der linearen Differentialgleichung nach (135.) die Form

$$(141.) \qquad z = \frac{1}{1-C}.z_1 - \frac{C}{1-C}z_2$$

hat, gelangen will, das durch die Gleichung (78.) ausgedrückte Functionaltheorem ebenfalls in Z_1, Z_2, z_1, z_2, z_3 linear sein muss von der Form

$$(142.) \qquad A_1Z_1 + A_2Z_2 + a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + a = 0,$$

worin zunächst noch die Grössen a, a_1, a_2, a_3, A_1, A_2 algebraische Functionen von x_1, x_2, x_3 sein können. Da nun nach Früherem eine solche Beziehung erhalten bleibt, wenn man z. B. z_1 durch irgend ein anderes particuläres Integral der zugehörigen Differentialgleichung ersetzt, während man z_2 und z_3 unverändert lässt, dagegen für Z_1 und Z_2 passende Integrale der resp. Differentialgleichungen substituirt, so ersetze man z_1 durch das Inte-

gral $z_1+\mu_1 e^{\int f_1(x)dx}$, und man erhält somit aus (142.)

$$(143.)\quad \begin{cases} A_1[Z_1+m_1 e^{\int^{X_1} f_1(x)dx}]+A_2[Z_2+m_2 e^{\int^{X_2} f_1(x)dx}] \\ +a_1[z_1+\mu_1 e^{\int^{x_1} f(x)dx}]+a_2 z_2+a_3 z_3+a = 0, \end{cases}$$

worin m_1 und m_2 zwei von der willkürlichen Constanten μ abhängige constante Grössen bedeuten. Nun folgt aber aus (142.) und (143.) die Beziehung

$$(144.)\quad m_1 A_1 e^{\int^{X_1} f_1(x)dx}+m_2 A_2 e^{\int^{X_2} f_1(x)dx}+\mu_1 a_1 e^{\int^{x_1} f_1(x)dx} = 0,$$

und man erhielte daher, wenn man X_1 und X_2, welche von x_1, x_2, x_3 algebraisch abhängen, als zwei von einander unabhängige willkürliche Grössen, x_1 dagegen — wie durch Fixirung von x_3 und Elimination von x_2 geschehen kann — als algebraische Function von X_1 und X_2 auffasst, für die Function $e^{\int f_1(x)dx}$ ein zum Geschlechte 1 gehöriges Functionaltheorem, was nach den früheren Auseinandersetzungen nur der Fall sein konnte, wenn, von der durch algebraische Transformation auf die Form (33.) führenden Differentialgleichung abgesehen, in der jene Exponentialfunction definirenden Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x).z$$

nach (73.) und (76.) $\int f_1(x)dx$ ein elliptisches Integral mit nur logarithmischen Unstetigkeiten darstellt; dann ist aber nach (76.) das Functionaltheorem, indem in unserem Falle $\mathfrak{F}(z) = z$ ist, nicht, wie es nach (144.) sein müsste, ein in den Exponentialgrössen lineares — den selbstverständlichen Fall ausgeschlossen, dass

$$\int f_1(x)dx = \log\psi(x)$$

ist, worin $\psi(x)$ eine algebraische Function bedeutet, in welchem das Integral der Differentialgleichung (140.) die Form annimmt

$$z = c\psi(x)+\psi(x)\int\frac{f_2(x)}{\psi(x)}dx$$

und also von einem algebraischen Factor abgesehen ein *Abel*sches Integral ist, das, wenn es zu $p = 2$ gehört, das *Abel*sche Theorem als das zum Geschlechte 2 gehörige Functionaltheorem besitzt. Es hat also die Differential-

gleichung (140.) kein Functionaltheorem der gesuchten Art *), und wir erhalten somit, wenn wir die Fälle I *a*) und I *b*) zusammenfassen, das Resultat,

---

*) Es mag schon an dieser Stelle auf die wirkliche Form des Functionaltheorems für die Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung hingewiesen werden; es wird sich später allgemein zeigen, dass in ein solches Theorem alle selbständigen particulären Integrale einer Differentialgleichung, wenn nur eine endliche Anzahl solcher existirt, eintreten müssen, für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung also zwei, da nach (141.) das allgemeine Integral sich algebraisch durch zwei particuläre ausdrückt. Sei also die Differentialgleichung

$$(a.)\quad \frac{dz}{dx} = f_1(x).z+f_2(x),$$

und zwei der particulären Integrale ζ_1 und ζ_2, so dass

$$(b.)\quad \zeta_1-\zeta_2 = \alpha e^{\int f_1(x)dx}$$

ist, worin α eine Constante bedeutet; bezeichnet man ferner mit $x_1, x_2, \dots x_\mu$ willkürliche Argumente und die entsprechenden Werthe von ζ_1 und ζ_2 durch $\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \dots \zeta_1^{(\mu)}$ und $\zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)}, \dots \zeta_2^{(\mu)}$, so wird

$$(c.)\quad (\zeta_1^{(1)}-\zeta_2^{(1)})(\zeta_1^{(2)}-\zeta_2^{(2)})\dots(\zeta_1^{(\mu)}-\zeta_2^{(\mu)}) = \alpha^\mu.e^{\int^{x_1}f_1(x)dx+\int^{x_2}f_1(x)dx+\dots+\int^{x_\mu}f_1(x)dx}.$$

Da nun nach dem *Abel*schen Theorem

$$(d.)\quad \begin{cases} \int^{x_1}f_1(x)dx+\int^{x_2}f_1(x)dx+\dots+\int^{x_\mu}f_1(x)dx \\ = \int^{X_1}f_1(x)dx+\dots+\int^{X_p}f_1(x)dx+MF(x_1,\dots x_\mu)+M_1\log F_1(x_1,\dots x_\mu)+\dots \\ \dots+M_\varrho\log F_\varrho(x_1,\dots x_\mu) \end{cases}$$

ist, worin p das Geschlecht der algebraischen Function $f_1(x)$ bedeutet, $F, F_1, \dots F_\varrho$ rationale Functionen von $x_1, \dots x_\mu, f_1(x_1), \dots f_1(x_\mu), M, M_1, \dots M_\varrho$ Constanten, endlich $X_1, \dots X_p$ die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades, deren Coefficienten wiederum rational aus den μ Argumenten und den dazugehörigen Irrationalitäten zusammengesetzt sind, so wird nach (*c.*) und (*d.*)

$$(\zeta_1^{(1)}-\zeta_2^{(1)})(\zeta_1^{(2)}-\zeta_2^{(2)})\dots(\zeta_1^{(\mu)}-\zeta_2^{(\mu)})$$
$$= \alpha^\mu.e^{\int^{X_1}f_1(x)dx+\dots+\int^{X_p}f_1(x)dx}.e^{MF(x_1,\dots x_\mu)}.F_1(x_1,\dots x_\mu)^{M_1}\dots F_\varrho(x_1,\dots x_\mu)^{M_\varrho},$$

und somit, wenn die zu $X_1, \dots X_p$ gehörigen Werthe der particulären Integrale ζ_1 und ζ_2 mit $Z_1^{(1)}, \dots Z_1^{(p)}, Z_2^{(1)}, \dots Z_2^{(p)}$ bezeichnet werden, nach (*b.*)

$$(e.)\quad \begin{cases} (\zeta_1^{(1)}-\zeta_2^{(1)})(\zeta_1^{(2)}-\zeta_2^{(2)})\dots(\zeta_1^{(\mu)}-\zeta_2^{(\mu)}) \\ = \alpha^{\mu-p}(Z_1^{(1)}-Z_2^{(1)})\dots(Z_1^{(p)}-Z_2^{(p)}).e^{MF(x_1,\dots x_\mu)}.F_1(x_1,\dots x_\mu)^{M_1}\dots F_\varrho(x_1,\dots x_\mu)^{M_\varrho}. \end{cases}$$

Für den Fall, dass $\int f_1(x)dx$ ein *Abel*sches Integral erster oder dritter Gattung ist, geht das Functionaltheorem in die beiden Formen

$$(\zeta_1^{(1)}-\zeta_2^{(1)})(\zeta_1^{(2)}-\zeta_2^{(2)})\dots(\zeta_1^{(\mu)}-\zeta_2^{(\mu)}) = \alpha^{\mu-p}(Z_1^{(1)}-Z_2^{(1)})\dots(Z_1^{(p)}-Z_2^{(p)})$$

und

$$(\zeta_1^{(1)}-\zeta_2^{(1)})(\zeta_1^{(2)}-\zeta_2^{(2)})\dots(\zeta_1^{(\mu)}-\zeta_2^{(\mu)}) = \alpha^{\mu-p}(Z_1^{(1)}-Z_2^{(1)})\dots(Z_1^{(p)}-Z_2^{(p)})F_1(x_1,\dots x_\mu)^{M_1}$$

über.

dass das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung nie ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem besitzen kann.

Nachdem die Untersuchung der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und somit der Fall des Theorems A erledigt worden, gehen wir zu der schwierigeren Discussion des Theorems B über, und suchen zunächst

II. *für alle algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

a) diejenigen auf, für welche das allgemeine Integral algebraisch von nur *einem* particulären Integrale abhängt. Sei die Differentialgleichung

$$(145.)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \varphi\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right),$$

und bestehe zwischen dem allgemeinen und *einem* particulären Integrale die algebraische Beziehung

$$(146.)\qquad z = F(x, z_1, c_1, c_2),$$

so folgt durch Differentiation von (146.)

$$(147.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z_1}\dfrac{dz_1}{dx}, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z_1}\dfrac{dz_1}{dx} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}\left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial F}{\partial z_1}\varphi\left(x, z_1, \dfrac{dz_1}{dx}\right) \end{cases}$$

und durch Substitution in (145.)

$$(148.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z_1}\dfrac{dz_1}{dx} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}\left(\dfrac{dz_1}{dx}\right)^2 + \dfrac{\partial F}{\partial z_1}\varphi\left(x, z_1, \dfrac{dz_1}{dx}\right) \\ \qquad = \varphi\left(x, F, \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z_1}\dfrac{dz_1}{dx}\right); \end{cases}$$

diese Gleichung würde aber z_1 als das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung definiren, und wenn man aus dieser Differentialgleichung, aus (146.) und der ersten Gleichung (147.) für $z = z_1$ die Grössen z_1 und $\frac{dz_1}{dx}$ eliminirt, so würde sich das allgemeine Integral z ebenfalls als Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung ergeben, wodurch wir zu der vorher erledigten Untersuchung zurückgeführt würden — es muss daher die Gleichung (148.) eine in den Grössen x, z_1, $\frac{dz_1}{dx}$, c_1, c_2 identische sein. Differentiirt man dieselbe nach c_1 und c_2, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\frac{dz_1}{dx} = t, \quad \varphi(x, z_1, t) = \omega(t)$$

gesetzt wird,

$$(149.)\quad \begin{cases} a+bt+ct^2+\alpha\omega(t) \\ = \dfrac{\partial\varphi\left(x, F, \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}{\partial F}\beta+\dfrac{\partial\varphi\left(x, F, \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}(\gamma+\alpha t), \end{cases}$$

und

$$(150.)\quad \begin{cases} a'+b't+c't^2+\alpha'\omega(t) \\ = \dfrac{\partial\varphi\left(x, F, \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}{\partial F}\beta'+\dfrac{\partial\varphi\left(x, F, \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}(\gamma'+\alpha' t), \end{cases}$$

und endlich, wenn (148.) nach $\frac{dz_1}{dx}=t$ differentiirt wird,

$$(151.)\quad m+nt+p\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{\partial\varphi\left(x, F, \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}p,$$

worin $a, b, c, a', b', c', \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', m, n, p$ algebraische Functionen von x, z_1, c_1, c_2 bedeuten, und diese 3 Gleichungen (149.), (150.) und (151.) werden wiederum für alle in ihnen vorkommenden Grössen identisch sein. Aus (149.) und (150.) folgt durch Elimination von $\dfrac{\partial\varphi\left(x, F, \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}{\partial F}$ die Beziehung

$$(152.)\quad \begin{cases} a\beta'-a'\beta+(b\beta'-b'\beta)t+(c\beta'-c'\beta)t^2+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\omega(t) \\ = [\gamma\beta'-\gamma'\beta+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)t]\dfrac{\partial\varphi\left(x, F, \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}t\right)}, \end{cases}$$

und durch Zusammenstellung dieser Gleichung mit (151.)

$$A+Bt+Ct^2+p[\gamma\beta'-\gamma'\beta+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)t]\frac{d\omega(t)}{dt}-p(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\omega(t) = 0,$$

oder

$$(153.)\quad \frac{d\omega(t)}{dt}-\frac{1}{t-P}\omega(t)-\frac{A'+B't+C't^2}{t-P} = 0,$$

worin P, A', B', C' wiederum nur von x, z_1, c_1, c_2 abhängen, also Constanten in Bezug auf t bedeuten. Durch Integration dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung folgt

$$(154.)\qquad \omega(t) = (t-P)\Big[C+\int\frac{A'+B't+C't^2}{(t-P)^2}\,dt;$$

zerlegt man nun die Function unter dem Integralzeichen in Partialbrüche, so dass sich

$$\frac{A'+B't+C't^2}{(t-P)^2} = M+\frac{N}{t-P}+\frac{Q}{(t-P)^2}.$$

ergiebt, so folgt unmittelbar, dass, weil $\omega(t)$ eine algebraische Function von t war, $N=0$ sein muss, weil sonst durch Integration ein Logarithmus eintreten würde, und es folgt somit aus (154.)

$$\varphi(x, z_1, t) = \omega(t) = (t-P)\Big[C+Mt-\frac{Q}{t-P}\Big] = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}t+\mathfrak{C}t^2,$$

so dass wir als nothwendige Form der gesuchten Differentialgleichung (145.)

$$(155.)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \omega(x, z)+\omega_1(x, z)\frac{dz}{dx}+\omega_2(x, z)\Big(\frac{dz}{dx}\Big)^2$$

finden. Zur weiteren Bestimmung der Functionen ω, ω_1, ω_2 setzen wir den eben ermittelten Werth von $\varphi(x, z_1\, t)$ in die Gleichung (148.) ein und erhalten die Beziehung

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}+\frac{\partial^2F}{\partial z_1^2}\Big(\frac{dz_1}{dx}\Big)^2\\ &+\frac{\partial F}{\partial z_1}\Big[\omega(x, z_1)+\omega_1(x, z_1)\frac{dz_1}{dx}+\omega_2(x, z_1)\Big(\frac{dz_1}{dx}\Big)^2\\ =\ &\omega(x, F)+\omega_1(x, F)\Big[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}\Big]+\omega_2(x, F)\Big[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}\Big]^2,\end{aligned}$$

welche, da sie wiederum eine identische sein muss, in die Gleichungen zerfällt

$$(156.)\qquad \frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\omega(x, z_1) = \omega(x, F)+\omega_1(x, F)\frac{\partial F}{\partial x}+\omega_2(x, F)\Big(\frac{\partial F}{\partial x}\Big)^2,$$

$$(157.)\qquad 2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z_1}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\omega_1(x, z_1) = \omega_1(x, F)\frac{\partial F}{\partial z_1}+2\omega_2(x, F)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_1},$$

$$(158.)\qquad \frac{\partial^2F}{\partial z_1^2}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\omega_2(x, z_1) = \omega_2(x, F)\Big(\frac{\partial F}{\partial z_1}\Big)^2.$$

Nehmen wir nun zur Vereinfachung an, dass die Variable x nicht explicite in den Ausdruck (146.) eingeht, dass also $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ ist, so geht die Gleichung (156.) in

$$(159.)\qquad \frac{\partial F}{\partial z_1}\omega(x, z_1) = \omega(x, F)$$

über, welche durch Differentiation nach c_1 und z_1 die Beziehungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial c_1} \omega(x, z_1) = \frac{\partial \omega(x, F)}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial c_1}$$

und

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \omega(x, z_1) + \frac{\partial F}{\partial z_1} \frac{\partial \omega(x, z_1)}{\partial z_1} = \frac{\partial \omega(x, F)}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial z_1},$$

und aus diesen durch Elimination von $\frac{\partial \omega(x, F)}{\partial F}$

$$\omega(x, z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \right] = \frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \frac{\partial \omega(x, z_1)}{\partial z_1} \quad \text{oder} \quad \omega(x, z_1) = \frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \Omega(x, c_1, c_2)$$

liefert, oder es ist

$$(160.) \qquad \omega(x, z_1) = \psi(z_1) . \Omega(x),$$

wenn $\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} = \psi(z_1)$ gesetzt wird. Dann geht aber die Gleichung (159.), wenn nicht $\Omega(x) = 0$ ist, in

$$(161.) \qquad \frac{\partial F}{\partial z_1} \psi(z_1) = \psi(F) \quad \text{oder} \quad \frac{dz_1}{\psi(z_1)} = \frac{dF}{\psi(F)}$$

über, worin F eine von z_1 und zwei willkürlichen Constanten c_1 und c_2 abhängige algebraische Function bedeutet; da jedoch die Differentialgleichung (161.), welche F als Function von z_1 definirt, F nur als algebraische Function mit *einer* willkürlichen Constanten liefert, was der Annahme (146.) widerspricht, so könnte (161.) nur erfüllt werden, wenn $\psi(z_1) = 0$, d. h. nach der Definition dieser Function, wenn $\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0$, also F wiederum von c_1 unabhängig wäre, es muss somit $\Omega(x) = 0$ sein, also auch

$$(162.) \qquad \omega(x, z_1) = 0.$$

Da ferner unter der angegebenen Voraussetzung aus (157.) die identische Beziehung

$$\omega_1(x, z_1) = \omega_1(x, F)$$

folgt, und F vermöge der unbestimmten Constanten einen willkürlichen Werth annehmen kann, so muss $\omega(x, z_1)$ von z_1 unabhängig sein und somit die Form haben

$$(163.) \qquad \omega_1(x, z_1) = \Omega_1(x).$$

Endlich folgt aus (158.), wenn nach x differentiirt und

$$\frac{\partial \omega_2(x, z_1)}{\partial x} = P(x, z_1)$$

gesetzt wird, die Beziehung

$$(164.)\qquad P(x, F) = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} P(x, z_1),$$

welche, wie leicht zu sehen, durch Differentiation nach c_1 und z_1 und Elimination von $\frac{\partial P(x, F)}{\partial F}$ die Gleichung liefert

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \frac{\partial P(x, z_1)}{\partial z_1} + P(x, z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \right] = 0$$

$$\text{oder}\quad \psi(z_1) \frac{\partial P(x, z_1)}{\partial z_1} + P(x, z_1) \frac{\partial \psi(z_1)}{\partial z_1} = 0,$$

und somit

$$P(x, z_1) = \frac{\pi(x)}{\psi(z_1)};$$

setzt man diesen Werth in (164.) ein, so folgt, wenn nicht $\pi(x) = 0$ ist,

$$\frac{1}{\psi(F)} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \frac{1}{\psi(z_1)} \quad \text{oder} \quad \frac{dz_1}{\psi(z_1)} = \frac{dF}{\psi(F)},$$

woraus sich wieder aus den oben angegebenen Gründen $\psi(z_1) = 0$ ergeben würde; es muss somit $\pi(x) = 0$, also auch $P(x, z_1) = \frac{\partial \omega_2(x, z_1)}{\partial x} = 0$ sein, und somit

$$(165.)\qquad \omega_2(x, z_1) = \varphi(z_1)$$

eine von x freie algebraische Function von z_1 *). Zugleich ergiebt sich aus

---

*) Es mag in Rücksicht auf das Folgende bemerkt werden, dass man auch in dem allgemeinen Falle, in welchem die unabhängige Variable x auch explicite in die F-Function eintritt, die drei Functionen $\omega(x, z_1)$, $\omega_1(x, z_1)$, $\omega_2(x, z_1)$ aus den drei Gleichungen (156.), (157.), (158.) bestimmen kann und so auch den oben noch unbestimmt gebliebenen Werth von $\varphi(z_1)$ erhält. Differentiirt man nämlich die Gleichung (158.) nach c_1 und z_1 und eliminirt aus den so entstehenden Gleichungen $\frac{\partial \omega_2(x, F)}{\partial F}$, so ergiebt sich

$$\frac{\partial F}{\partial c} \frac{\partial F}{\partial z_1} \frac{\partial \omega_2(x, z_1)}{\partial z_1} + \omega_2(x, z_1) \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \right] \right\} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \frac{\partial F}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} \right]$$

Gleichung (158.), dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\varphi(z_1) = \varphi(F)\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2$$

ist, oder dass die Function φ so beschaffen sein muss, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(166.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(x)\frac{dy}{dx} = \varphi(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

ein allgemeines algebraisches Integral besitzt.

---

oder wie leicht ersichtlich

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\omega_2(x,z_1)\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right] = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right].$$

Durch Integration folgt

$$\omega_2(x,z_1) = \frac{\partial}{\partial z_1}\log\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right]+\Omega_2(x)\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c_1}},$$

worin $\Omega_2(x)$ eine willkürliche algebraische Function von x bedeutet.

Setzt man ferner aus (158.) den Werth von $\omega_2(x,F)$ in (157.) ein, so erhält man

$$2\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right]+\omega_1(x,z_1) = \omega_1(x,F)+2\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\omega_2(x,z_1),$$

und differentiirt man diese Gleichung nach z_1 und c_1 und eliminirt zwischen den so entstehenden Gleichungen die Grösse $\frac{\partial\omega_1(x,F)}{\partial F}$, so folgt

$$\frac{\partial F}{\partial c_1}\frac{\partial\omega_1(x,z_1)}{\partial z_1} = 2\frac{\partial F}{\partial c_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\omega_2(x,z_1)\right]-2\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial c_1}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\omega_2(x,z_1)\right]$$

$$+2\frac{\partial F}{\partial c_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right]-2\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial c_1}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right];$$

substituirt man hierin den oben gefundenen Werth für $\omega_2(x,z_1)$, so ergiebt sich durch eine Quadratur in z_1 der gesuchte Werth von $\omega_1(x,z_1)$, und genau ebenso der Werth von $\omega(x,z_1)$ aus der Gleichung (156.), wenn man die aus (157.) und (158.) sich ergebenden Werthe von $\omega_1(x,F)$ und $\omega_2(x,F)$ in (156.) einsetzt, wiederum nach Differentiation nach z_1 und c_1 die Grösse $\frac{\partial\omega(x,F)}{\partial F}$ eliminirt und die gefundenen Werthe von $\omega_1(x,z_1)$ und $\omega_2(x,z_1)$ substituirt.

Die in (162.), (163.), (165.) für ω, ω_1, ω_2 gefundenen Ausdrücke führen daher die Differentialgleichung (155.) in die folgende über:

$$(167.) \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \Omega_1(x)\frac{dz}{dx} + \varphi(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

und es ist umgekehrt aus den Gleichungen (156.), (157.), (158.) unmittelbar ersichtlich, dass, wenn die φ-Function so beschaffen ist, dass die Gleichung (166.) ein allgemeines algebraisches Integral besitzt, eben dieses Integral zugleich den algebraischen Ausdruck liefert, welcher das allgemeine Integral der Differentialgleichung (167.) als Function *eines* particulären Integrales derselben darstellt. Nun lässt sich aber die Form der φ-Function leicht ermitteln, wenn die Gleichung (166.) ein allgemeines algebraisches Integral haben soll *); setzt man nämlich $y = F(x, c_1, c_2)$ in (166.) ein, so ergiebt sich als eine in x, c_1, c_2 identisch zu erfüllende Gleichung

$$(168.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2F(x,c_1,c_2)}{dx^2} + \varphi(x)\dfrac{dF(x,c_1,c_2)}{dx} = \varphi[F(x,c_1,c_2)]\left(\dfrac{dF(x,c_1,c_2)}{dx}\right)^2 \\ \text{oder} \\ \dfrac{d^2F(x,c_1,c_2)}{dx^2} = \dfrac{dF(x,c_1,c_2)}{dx}\left\{\varphi[F(x,c_1,c_2)]\dfrac{dF(x,c_1,c_2)}{dx} - \varphi(x)\right\}, \end{cases}$$

und bestimmt man x als Function der willkürlichen Grössen c_1 und c_2 so, dass $\frac{dF(x,c_1,c_2)}{dx} = 0$ ist, so wird, wie man sogleich sieht, da $\varphi(x)$ von c_1 und c_2 unabhängig ist, auch $\frac{d^2F(x,c_1,c_2)}{dx^2}$ verschwinden, und ebenso folgt aus successiver Differentiation der zweiten Form von (168.), dass alle Ableitungen der Function $F(x, c_1, c_2)$ für das betrachtete x Null sind, und somit, da F eine algebraische Function sein sollte, $F(x, c_1, c_2)$ eine Constante, also gegen die Annahme von x unabhängig sein müsste — nur dann wäre dies nicht der Fall, wenn die Gleichung $\frac{dF(x,c_1,c_2)}{dx} = 0$ sich nicht erfüllen liesse, d. h. diese Ableitung eine Constante, und somit

$$y = F(x, c_1, c_2) = Ax + B$$

wäre, worin A und B Functionen von c_1 und c_2 sind. Dann ginge aber die Gleichung (166.) in

$$(169.) \qquad \varphi(x) = A\varphi(Ax+B)$$

*) Vergl. die Untersuchung über irreductible Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren particuläre Integrale in einem algebraischen Zusammenhange stehen, in meinen „Allg. Untersuchungen u. s. w." § 3, S. 17 Anmerkung.

über, und es würde für einen beliebigen aber bestimmten Werth von x und für einen bestimmt gewählten Zusammenhang zwischen c_1 und c_2, welcher dem A ebenfalls einen festen Werth ertheilt, $\varphi(Ax+B)$ einen bestimmten Werth annehmen, wiewohl das Argument noch von einer der willkürlichen Constanten abhängt; es muss daher die φ-Function von ihrem Argumente unabhängig sein, und wir erhalten aus der Gleichung (169.) $\varphi(x) = 0$. Es geht somit die Differentialgleichung (167.) in

$$(170.) \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \Omega_1(x)\frac{dz}{dx}$$

über, deren allgemeines Integral durch

$$(171.) \quad z = c_1\int e^{\int\Omega_1(x)dx}dx+c_2$$

dargestellt ist, und für welche in der That die Gleichung (146.) durch

$$z = c_1 z_1 + c_2$$

repräsentirt wird — es fragt sich somit nur, ob ein Integral der Differentialgleichung (170.) ein zum Geschlechte $p=2$ gehöriges Functionaltheorem im oben angegebenen Sinne besitzt *). Aus der Form des allgemeinen Integrales (171.) ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn ein derartiges Functionaltheorem für irgend ein particuläres Integral von (170.) stattfindet, einem solchen auch jedes particuläre Integral unterliegen muss, und somit also nur die Möglichkeit der Beziehung zu untersuchen ist:

$$(172.) \quad \begin{cases} F\Big\{\int^{X_1} e^{\int\Omega_1(x)dx}dx,\ \int^{X_2} e^{\int\Omega_1(x)dx}dx, \\ \int^{x_1} e^{\int\Omega_1(x)dx}dx,\ \int^{x_2} e^{\int\Omega_1(x)dx}dx,\ \int^{x_3} e^{\int\Omega_1(x)dx}dx,\ x_1, x_2, x_3\Big\} = 0. \end{cases}$$

Betrachtet man nun x_2 und x_3 als Parameter, so kann man diese Gleichung mit Einführung früher gebrauchter Bezeichnungen in die Form setzen

$$(173.) \quad z_1 = \Phi(Z_1, Z_2, x_1),$$

und nach dem Satze von der Erhaltung einer algebraischen Relation zwischen Integralen von Differentialgleichungen wird sich daraus die Beziehung ergeben

*) Dass überhaupt lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung Functionaltheoreme der angegebenen Art für $p=2$ nicht besitzen können, wird später gezeigt werden; die hier angegebene Methode ist aber auch häufig für die Untersuchung von algebraischen nicht linearen Differentialgleichungen anwendbar.

$$(174.)\qquad z_1+\nu = \Phi(m_1Z_1+n_1, m_2Z_2+n_2, x_1) = \Phi(Z_1, Z_2, x_1)+\nu,$$

indem z_1 durch das Integral $z_1+\nu$, worin ν eine willkürliche Constante, Z_1 und Z_2 resp. durch $m_1Z_1+n_1$, $m_2Z_2+n_2$ ersetzt sind, worin m_1, m_2, n_1, n_2 von ν abhängige Constante bedeuten. Da nun durch Differentiation nach Z_1 und Z_2, welche erlaubt ist, weil ein algebraischer von z_1 freier Zusammenhang zwischen Z_1 und Z_2 offenbar nicht stattfinden darf, wenn das Functionaltheorem zum Geschlechte 2 gehören soll, und die Gleichung (174.) somit eine identische sein muss, sich

$$\frac{\partial\Phi(m_1Z_1+n_1, m_2Z_2+n_2, x_1)}{\partial(m_1Z_1+n_1)}\,m_1 = \frac{\partial\Phi(Z_1, Z_2, x_1)}{\partial Z_1},$$

$$\frac{\partial\Phi(m_1Z_1+n_1, m_2Z_2+n_2, x_1)}{\partial(m_2Z_2+n_2)}\,m_2 = \frac{\partial\Phi(Z_1, Z_2, x_1)}{\partial Z_2}$$

ergiebt, so folgt unmittelbar, da die Gleichungen wieder identisch sein müssen, und nur die linken Seiten von der willkürlichen Grösse ν abhängen würden, dass $m_1 = m_2 = 1$ ist, und die letzten beiden Gleichungen übergehen in

$$\frac{\partial\Phi(Z_1+n_1, Z_2+n_2, x_1)}{\partial(Z_1+n_1)} = \frac{\partial\Phi(Z_1, Z_2, x_1)}{\partial Z_1},\quad \frac{\partial\Phi(Z_1+n_1, Z_2+n_2, x_1)}{\partial(Z_2+n_2)} = \frac{\partial\Phi(Z_1, Z_2, x_1)}{\partial Z_2},$$

worin n_1 und n_2 Functionen der willkürlichen Grösse ν sind. Daraus schliesst man aber in bekannter Weise, dass

$$\frac{\partial\Phi(Z_1, Z_2, x_1)}{\partial Z_1} = \psi\Big(Z_2-\frac{n_2}{n_1}Z_1\Big),\quad \frac{\partial\Phi(Z_1, Z_2, x_1)}{\partial Z_2} = \chi\Big(Z_2-\frac{n_2}{n_1}Z_1\Big),$$

also

$$\Phi(Z_1, Z_2, x_1) = \Omega\Big(Z_2-\frac{n_2}{n_1}Z_1\Big)$$

sein muss, welche Functionalbestimmung wieder mit der Gleichung (174.) für willkürliche ν nicht vereinbar ist, ausser wenn die ψ- und χ-Functionen einzeln Constanten sind, d. h.

$$\Phi(Z_1, Z_2, x_1) = L_1Z_1+L_2Z_2+L$$

ist, worin L, L_1, L_2 algebraische Functionen von x_1 bedeuten, so dass, da dieselben Schlüsse für x_2, x_3, z_2, z_3 gelten, das Functionaltheorem die lineare Form annehmen müsste

$$(175.)\qquad M_1Z_1+M_2Z_2+k_1z_1+k_2z_2+k_3z_3+k = 0.$$

Da aber diese Beziehung erhalten bleiben müsste, wenn $\mu z_1+\nu$ statt z_1 gesetzt, und für Z_1 und Z_2 die Werthe $m_1Z_1+n_1$, $m_2Z_2+n_2$ substituirt werden,

so dass auch

$$(176.)\quad M_1[m_1 Z_1+n_1]+M_2[m_2 Z_2+n_2]+k_1[\mu z_1+\nu]+k_2 z_2+k_3 z_3+k = 0$$

wird, ferner aber durch Subtraction von (175.) und (176.) sich

$$R_1 Z_1+R_2 Z_2+r_1 z_1+r = 0$$

ergiebt, worin R_1, R_2, r_1, r von z_2 und z_3 unabhängig sind, so würde wiederum nach Schlüssen, wie sie auf Gleichung (144.) angewandt wurden, ein zum Geschlechte 1 gehöriges Functionaltheorem folgen, was hier auszuschliessen war, und wir erhalten somit den folgenden zu II. *a*) gehörigen Satz:

Das Integral einer algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche das allgemeine Integral algebraisch von nur einem particulären Integrale abhängt, kann nie ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem besitzen *).

Zur vollständigen Discussion des Theoremes B erübrigt somit nur noch,

II. *für alle algebraischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

b) diejenigen aufzusuchen, für welche das allgemeine Integral algebraisch von *zwei* particulären Integralen abhängt. Sei also wiederum die Differentialgleichung

$$(177.)\quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right)$$

gegeben, und bestehe zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen derselben die algebraische Beziehung

$$(178.)\quad z = F(x, z_1, z_2, c_1, c_2),$$

so erhält man durch Differentiation und Substitution in (177.) die Gleichung

---

*) Es war bei Herleitung des obigen Satzes vorausgesetzt worden, dass in das Functionaltheorem die unabhängigen Variabeln nicht explicite eintreten oder dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung eine von der unabhängigen Variabeln freie algebraische Function nur *eines* particulären Integrales derselben sein soll. Tritt die unabhängige Variable jedoch explicite in den Ausdruck (146.) ein, so kann man entweder wieder ähnlich verfahren, wie es für die Differentialgleichungen erster Ordnung geschehen, oder man verbindet die Gleichung (146.) mit einer durch Specialisirung einer ihrer Constanten hergeleiteten $z_2' = F\{x, z_1, c_1', c_2\}$, in welcher z_2 ein particuläres Integral bezeichnet; wenn man sodann x_1 zwischen dieser Gleichung und (146.) eliminirt, so erhält man die Beziehung

$$z = \Phi(z_1, z_2, c_1, c_2),$$

welche das allgemeine Integral als algebraische, von der unabhängigen Variabeln freie Function *zweier* particulärer Integrale der Differentialgleichung darstellt, und hat somit die Untersuchung auf den gleich folgenden Fall II. *b*) zurückgeführt.

$$(179.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z_2}\frac{dz_2}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2}\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^2 \\ +2\frac{\partial^2 F}{\partial z_1\partial z_2}\frac{dz_1}{dx}\frac{dz_2}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\varphi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}\right)+\frac{\partial F}{\partial z_2}\varphi\left(x, z_2, \frac{dz_2}{dx}\right) \\ \qquad = \varphi\left(x, F, \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx}\right). \end{cases}$$

Dass diese Gleichung nicht eine in allen in ihr vorkommenden Grössen identische sein muss, geht aus der zur Gleichung (22.) gemachten Anmerkung hervor, die schon die Möglichkeit der Nichtidentität für den speciellen Fall der Differentialgleichungen erster Ordnung erörterte; wir müssen daher die beiden Fälle der identischen und nichtidentischen Gleichung (179.) gesondert behandeln und untersuchen zuerst den Fall,

𝔄. in welchem diese Gleichung eine in x, z_1, z_2, $\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{dz_2}{dx}$, c_1, c_2 identische ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{dz_1}{dx} = t, \quad \frac{dz_2}{dx} = u, \quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}z_1'+\frac{\partial F}{\partial z_2}z_2' = F_1,$$

$$\varphi(x, z_1, t) = \omega_1(t), \quad \varphi(x, z_2, u) = \omega_2(u),$$

so geht (179.) in

$$(180.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z_1}t+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z_2}u+\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}t^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2}u^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial z_1\partial z_2}tu \\ \qquad +\frac{\partial F}{\partial z_1}\omega_1(t)+\frac{\partial F}{\partial z_2}\omega_2(u) = \varphi(x, F, F_1) \end{cases}$$

über, und durch Differentiation nach c_1 und c_2 erhält man

$$a_1+b_1t+e_1t^2+b_2u+e_2u^2+gtu+\alpha_1\omega_1(t)+\alpha_2\omega_2(u)$$
$$= \frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F}\beta+\frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F_1}(\gamma+\alpha_1t+\alpha_2u),$$
$$a_1'+b_1't+e_1't^2+b_2'u+e_2'u^2+g'tu+\alpha_1'\omega_1(t)+\alpha_2'\omega_2(u)$$
$$= \frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F}\beta'+\frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F_1}(\gamma'+\alpha_1't+\alpha_2'u),$$

worin die a, b, e, g, α, β, γ algebraische Functionen von x, z_1, z_2, c_1, c_2 bedeuten. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen, die wieder in allen in ihr vorkommenden Grössen identisch sein müssen, $\frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F}$, so folgt

$$(181.)\quad \begin{cases} (a_1\beta'-a_1'\beta)+(b_1\beta'-b_1'\beta)t+(e_1\beta'-e_1'\beta)t^2+(b_2\beta'-b_2'\beta)u \\ +(e_2\beta'-e_2'\beta)u^2+(g\beta'-g'\beta)tu+(\alpha_1\beta'-\alpha_1'\beta)\omega_1(t)+(\alpha_2\beta'-\alpha_2'\beta)\omega_2(u) \\ \quad = \frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F_1}[(\gamma\beta'-\gamma'\beta)+(\alpha_1\beta'-\alpha_1'\beta)t+(\alpha_2\beta'-\alpha_2'\beta)u]; \end{cases}$$

differentiirt man ferner die Gleichung (180.) nach t und u, so folgt

$$m_1+n_1t+n_2u+p\frac{d\omega_1(t)}{dt} = \frac{\partial\varphi(x,F,F_1)}{\partial F_1}\cdot p,$$

und

$$m'_1+n'_1t+n'_2u+p'\frac{d\omega_2(u)}{du} = \frac{\partial\varphi(x,F,F_1)}{\partial F_1}\cdot p',$$

und durch Elimination von $\frac{\partial\varphi(x,F,F_1)}{\partial F_1}$ zwischen der ersten dieser beiden Gleichungen und der Gleichung (181.)

$$(182.)\quad \begin{cases} \{(\gamma\beta'-\gamma'\beta)+(\alpha_1\beta'-\alpha'_1\beta)t+(\alpha_2\beta'-\alpha'_2\beta)u\}\frac{d\omega_1(t)}{dt} \\ -(\alpha_1\beta'-\alpha'_1\beta)\omega_1(t)-(\alpha_2\beta'-\alpha'_2\beta)\omega_2(u)+A_1+B_1t+C_1u+B_2t^2+C_2u^2+Gtu=0. \end{cases}$$

Setzt man nun, da t und u wegen der Identität der Gleichung von einander unabhängig sind, $u=0$, so geht die Gleichung (182.) in

$$\{(\gamma\beta'-\gamma'\beta)+(\alpha_1\beta'-\alpha'_1\beta)t\}\frac{d\omega_1(t)}{dt}-(\alpha_1\beta'-\alpha'_1\beta)\omega_1(t)+A+Bt+Ct^2 = 0$$

über, also in die Gleichung (153.), so dass auch wie dort

$$\varphi(x,z_1,z'_1) = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}z'_1+\mathfrak{C}z'^2_1$$

wird, worin $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ algebraische Functionen von x und z_1 bedeuten, und sich als nothwendige Form der Differentialgleichung (177.) somit wiederum

$$(183.)\quad \frac{d^2z}{dx^2} = \omega(x,z)+\omega_1(x,z)\frac{dz}{dx}+\omega_2(x,z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

ergiebt.

Setzt man den eben ermittelten Werth der φ-Function in die Gleichung (179.) ein, so folgt

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z_2}\frac{dz_2}{dx}+\frac{\partial^2F}{\partial z_1^2}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2F}{\partial z_2^2}\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2F}{\partial z_1\partial z_2}\frac{dz_1}{dx}\frac{dz_2}{dx}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z_1}\left[\omega(x,z_1)+\omega_1(x,z_1)\frac{dz_1}{dx}+\omega_2(x,z_1)\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2\right]$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z_2}\left[\omega(x,z_2)+\omega_1(x,z_2)\frac{dz_2}{dx}+\omega_2(x,z_2)\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^2\right]$$
$$=\omega(x,F)+\omega_1(x,F)\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx}\right]$$
$$+\omega_2(x,F)\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx}\right]^2,$$

und wegen der angenommenen Identität der Gleichung die folgenden sechs Relationen, welche wiederum identisch sein müssen,

$$(184.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial F}{\partial z_1}\omega(x,z_1)+\dfrac{\partial F}{\partial z_2}\omega(x,z_2) \\ \quad = \omega(x,F)+\omega_1(x,F)\dfrac{\partial F}{\partial x}+\omega_2(x,F)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2, \end{cases}$$

$$(185.)\quad 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z_1}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\omega_1(x,z_1) = \omega_1(x,F)\frac{\partial F}{\partial z_1}+2\omega_2(x,F)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_1},$$

$$(186.)\quad 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z_2}+\frac{\partial F}{\partial z_2}\omega_1(x,z_2) = \omega_1(x,F)\frac{\partial F}{\partial z_2}+2\omega_2(x,F)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_2},$$

$$(187.)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2}+\frac{\partial F}{\partial z_1}\omega_2(x,z_1) = \omega_2(x,F)\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2,$$

$$(188.)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2}+\frac{\partial F}{\partial z_2}\omega_2(x,z_2) = \omega_2(x,F)\left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)^2,$$

$$(189.)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_1\partial z_2} = \omega_2(x,F)\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial F}{\partial z_2}.$$

Wird nun aus (189.) der Werth von $\omega_2(x,F)$ in (188.) und (187.) eingesetzt, so ergiebt sich leicht

$$(190.)\quad \omega_2(x,z_2)=\frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}}\right]:\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}},\quad \omega_2(x,z_1)=-\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}}\right]:\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}};$$

substituirt man ferner den Werth von $\omega_2(x,F)$ aus (189.) in die Gleichungen (185.), (186.), so folgt eine Gleichung in $\omega_1(x,z_2)$ und $\omega_1(x,F)$ oder in $\omega_1(x,z_1)$ und $\omega_1(x,F)$, und aus dieser kann wieder $\omega_1(x,z_2)$ oder $\omega_1(x,z_1)$ nach der in der Anmerkung zur Gleichung (165.) angegebenen Methode ermittelt werden, und setzt man endlich die Werthe für $\omega_1(x,F)$ und $\omega_2(x,F)$ in die Gleichung (184.) ein, so erhält man eine Gleichung in $\omega(x,z_1)$, $\omega(x,z_2)$, $\omega(x,F)$, aus welcher wiederum mit Anwendung derselben Methode $\omega(x,z_1)$ bestimmt werden kann, so dass wir allgemein die nothwendige Form der Differentialgleichung (183.) ermitteln können. Machen wir nun wieder zur Vereinfachung die Annahme, dass die Beziehung (178.) die Variable x nicht explicite enthalte, so folgt zunächst aus (185.) und (186.) als identische Gleichung

$$\omega_1(x,z_1)=\omega_1(x,F)=\omega_1(x,z_2),$$

d. h. $\omega_1(x,z_1)$ ist von z_1 unabhängig oder

$$(191.)\quad \omega_1(x,z_1) = \Omega_1(x);$$

ferner folgt aus (190.), dass $\omega_2(x,z_1)$ von x unabhängig, also

$$(192.)\qquad \omega_2(x, z_1) = \Omega_2(z_1)$$

ist. Endlich ergiebt sich aus (184.)

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}\omega(x, z_1) + \frac{\partial F}{\partial z_2}\omega(x, z_2) = \omega(x, F),$$

und, wenn man diese Gleichung nach c_1 und c_2 differentiirt und zwischen den so erhaltenen Gleichungen $\frac{\partial \omega(x, F)}{\partial F}$ eliminirt,

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial c_2}}\right]\omega(x, z_1) + \frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial c_2}}\right]\omega(x, z_2) = 0,$$

woraus ersichtlich, dass, weil F von x frei ist,

$$\omega(x, z_2) = P(z_1, z_2)\omega(x, z_1),$$

oder weil diese Gleichung eine identische sein soll, man also z_1 einen beliebigen numerischen Werth geben kann,

$$(193).\qquad \omega(x, z_2) = \Omega(x)\psi(z_2)$$

wird, so dass die nothwendige Form der Differentialgleichung (183.) zunächst

$$(194.)\qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = \Omega(x)\psi(z) + \Omega_1(x)\frac{dz}{dx} + \Omega_2(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

ist. Zugleich gehen die Gleichungen (184.) bis (189.), indem (185.) und (186.) identisch befriedigt werden, in

$$(195.)\qquad \frac{\partial F}{\partial z_1}\psi(z_1) + \frac{\partial F}{\partial z_2}\psi(z_2) = \psi(F),$$

$$(196.)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \Omega_2(z_1)\frac{\partial F}{\partial z_1} = \Omega_2(F)\left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2,$$

$$(197.)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} + \Omega_2(z_2)\frac{\partial F}{\partial z_2} = \Omega_2(F)\left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)^2,$$

$$(198.)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} = \Omega_2(F)\frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial F}{\partial z_2}$$

über, und setzt man den aus (198.) sich ergebenden Werth von $\Omega_2(F)$ in (196.) und (197.) ein, so erhält man nach einer leichten Reduction

$$(199.)\quad \begin{cases} \Omega_2(z_1) = \dfrac{\partial}{\partial z_1}\left[\dfrac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right] : \dfrac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} = \dfrac{\partial}{\partial z_1}\log\left[\dfrac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right], \\[2ex] \Omega_2(z_2) = \dfrac{\partial}{\partial z_2}\left[\dfrac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}}\right] : \dfrac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}} = \dfrac{\partial}{\partial z_2}\log\left[\dfrac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}}\right] = -\dfrac{\partial}{\partial z_2}\log\left[\dfrac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right], \end{cases}$$

wonach also

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\log\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right] \text{ von } z_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z_2}\log\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right] \text{ von } z_1$$

unabhängig sind. Differentiirt man ferner (195.) nach z_1 und z_2 und eliminirt zwischen den so entstehenden Gleichungen die Grösse $\psi'(F)$, so folgt ähnlich wie vorher

$$\psi'(z_1)-\psi(z_1)\frac{\partial}{\partial z_1}\log\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right] = \psi'(z_2)+\psi(z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}\log\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right],$$

und da die rechte Seite, wie eben aus Gleichung (199.) gefolgert wurde, von z_1 unabhängig ist, und ebenso die linke Seite z_2 nicht enthalten darf, so wird

$$(200.) \qquad \psi'(z_1)-\psi(z_1)\frac{\partial}{\partial z_1}\log\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right] = k$$

sein, worin k weder von x noch von z_1 und z_2 abhängt, also eine Constante sein muss, und die Integration dieser Gleichung liefert den Ausdruck

$$(201.) \qquad \psi(z_1) = \omega(z_2)\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} + k\cdot\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\int\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}}dz_1,$$

worin $\omega(z_2)$ eine reine Function von z_2 bedeutet, und auf der rechten Seite dieses Ausdrucks die Variable z_2 verschwinden muss; es sind demnach in (199.) und (201.) die in der Differentialgleichung (194.) unbestimmt gebliebenen Functionen $\psi(z)$ und $\Omega_2(z)$ gefunden. Setzt man nun

$$(202.) \qquad \psi(z_1) = k\cdot\frac{f(z_1)}{\frac{df(z_1)}{dz_1}},$$

so folgt aus (200.) unmittelbar durch Einsetzen von (202.), dass

$$(203.) \qquad \frac{d\log\left(\frac{df(z_1)}{dz_1}\right)}{dz_1} = -\frac{\partial}{\partial z_1}\log\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\right] = -\Omega_2(z_1) \text{ oder } \frac{df(z_1)}{dz_1} = \chi(z_2)\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z_2}}$$

ist, worin auf der rechten Seite des letzten Ausdrucks für z_2 ein beliebiger numerischer Werth gesetzt werden darf. Einerseits entnimmt man nun aus der zweiten Form der Gleichung (203.), dass $\frac{df(z_1)}{dz_1}$ eine algebraische Function von z_1 ist, dass also nach (202.), weil $\psi(z_1)$ algebraisch sein sollte, auch $f(z_1)$ selbst von z_1 algebraisch abhängen wird, andererseits geht vermöge der in (202.) und (203.) gefundenen Werthe von $\psi(z_1)$ und $\Omega_2(z_1)$ die Differentialgleichung (194.) in

$$(204.)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \Omega(x).k\frac{f(z)}{\frac{df(z)}{dz}}+\Omega_1(x)\frac{dz}{dx}-\frac{\frac{d^2f(z)}{dz^2}}{\frac{df(z)}{dz}}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

über; macht man endlich die in der abhängigen Variabeln algebraische Substitution

$$f(z)=Z,\quad \text{also}\quad \frac{df(z)}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dZ}{dx},\quad \frac{df(z)}{dz}\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2f(z)}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=\frac{d^2Z}{dx^2},$$

so nimmt die Differentialgleichung (204.) die Form an

$$(205.)\qquad \frac{d^2Z}{dx^2} = \Omega_1(x)\frac{dZ}{dx}+k.\Omega(x)Z,$$

geht also in eine homogene lineare Differentialgleichung über, und wir finden somit unter der Voraussetzung, dass die Gleichung (179.) eine identische ist, dass

alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine von der unabhängigen Variabeln freie algebraische Function zweier particulärer Integrale ist, durch eine in der abhängigen Variabeln algebraische Substitution aus linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung abgeleitet sind,

und umgekehrt werden offenbar alle so abgeleiteten Differentialgleichungen die Beziehung liefern

$$f(z) = c_1f(z_1)+c_2f(z_2).$$

Wir gehen nunmehr wieder zur Untersuchung der Gleichung (179.) zurück und betrachten den Fall,

B. in welchem diese Gleichung *nicht* eine identische ist, sondern eine Beziehung zwischen den beiden particulären Integralen, deren Ableitungen und der unabhängigen Variabeln feststellt, und wollen zur Abkürzung diese Beziehung durch

$$(206.)\qquad \omega\left(x, z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}, \frac{dz_2}{dx}\right) = 0$$

darstellen *).

Nehmen wir zunächst an, dass nicht schon zwischen x, z_1, z_2, $\frac{dz_1}{dx}$ eine algebraische Beziehung stattfindet, und setzen wir (206.) in die Form

$$(207.)\qquad \frac{dz_2}{dx} = \Omega\left(x, z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}\right),$$

so wissen wir aus dem schon öfter angeführten Satze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen und deren Ableitungen, dass die Gleichung (207.) bestehen bleibt, wenn man unter der selbstverständlichen Voraussetzung, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung (177.) in Bezug auf den zweiten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist, ferner z_1 und z_2 nicht schon einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen, für z_2 ein beliebiges und für z_1 ein passendes Integral jener Differentialgleichung substituirt. Da nun das allgemeine Integral der Differentialgleichung (177.) mit den beiden particulären Integralen z_1 und z_2 durch die Beziehung

$$(208.)\qquad z = F(z_1, z_2, c_1, c_2)$$

verknüpft sein soll, wobei wir der Einfachheit wegen das explicite Vorkommen der Variabeln x wieder ausschliessen, so wird man in (207.) z_1 durch $F(z_1, z_2, \varkappa_1, \varkappa_2)$, z_2 durch $F(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2)$ ersetzen können, worin λ_1 und λ_2 beliebige, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ von diesen abhängige Constanten bedeuten, und man erhält somit die Beziehung

$$(209.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial z_1}\dfrac{dz_1}{dx} + \dfrac{\partial F(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial z_2}\,\Omega\left(x, z_1, z_2, \dfrac{dz_1}{dx}\right) \\ \quad = \Omega\Big\{x, F(z_1, z_2, \varkappa_1, \varkappa_2), F(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2), \\ \dfrac{\partial F(z_1, z_2, \varkappa_1, \varkappa_2)}{\partial z_1}\dfrac{dz_1}{dx} + \dfrac{\partial F(z_1, z_2, \varkappa_1, \varkappa_2)}{\partial z_2}\,\Omega\left(x, z_1, z_2, \dfrac{dz_1}{dx}\right)\Big\}, \end{cases}$$

---

*) Ein Beispiel einer solchen Beziehung liefert jede auf die Normalform

$$\frac{d^2z}{dx^2} + f_1(x).z = 0$$

gebrachte lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche die Relation statthat

$$z_1\frac{dz_2}{dx} - z_2\frac{dz_1}{dx} = c.$$

welche nach der oben gemachten Annahme eine in $x, z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}, \lambda_1, \lambda_2$ identische sein muss. Sei nun das Ω der Gleichung (207.) eine in $\frac{dz_1}{dx}$ algebraisch mehrdeutige Function, also der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (209.) eine algebraisch mehrdeutige Function der Grösse

$$(a.)\qquad \frac{\partial F(z_1, z_2, x_1, x_2)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}+\frac{\partial F(z_1, z_2, x_1, x_2)}{\partial z_2}\Omega\left(x, z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}\right),$$

so mag $\frac{dz_1}{dx}$ einen solchen geschlossenen Umkreis beschreiben, dass

$$\Omega\left(x, z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}\right)$$

seinen Ausgangswerth wieder annimmt, die rechte Seite der Gleichung (209.) jedoch zu einem andern ihrer Werthe übergeführt wird — dann würde aber diese Seite der Gleichung einen anderen Werth annehmen, während die linke Seite ihren Werth beibehält, und dieser Widerspruch würde nur dann aufgehoben, wenn $\Omega\left(x, z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}\right)$ eine rationale Function von $\frac{dz_1}{dx}$ ist. Man sieht aber auch sofort, dass, wenn die rationale Function Ω auf das Argument ($a.$) angewandt wird, in welchem schon dieselbe Function Ω enthalten ist, sich ein anderer rationaler Ausdruck von $\frac{dz_1}{dx}$ auf der rechten Seite von (209.) ergeben würde als auf der linken, und dass die Identität der Gleichung nur dann bestehen kann, wenn $\Omega\left(x, z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}\right)$ eine ganze lineare Function von $\frac{dz_1}{dx}$ ist. Unter der Voraussetzung also, dass nicht schon zwischen $x, z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}$ eine algebraische Beziehung stattfindet, wird die zwischen den particulären Integralen und ihren ersten Ableitungen vorausgesetzte algebraische Beziehung nothwendig die Form haben müssen

$$P_1\frac{dz_1}{dx}+P_2\frac{dz_2}{dx} = P,$$

worin P, P_1, P_2 algebraische Functionen von x, z_1, z_2 bedeuten, oder

$$(210.)\qquad \frac{dz_2}{dx} = A\frac{dz_1}{dx}+B,$$

worin A und B denselben Charakter haben *).

---

*) So wird jede aus der Normalform der linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die algebraische Substitution $z = f(u)$ abgeleitete Differentialgleichung der letzten Anmerkung zufolge zwischen zwei particulären Inte-

Gehen wir nunmehr wieder zur Gleichung (179.) zurück, in welcher F von explicitem x unabhängig zu betrachten ist, so erhalten wir mit Benutzung von (210.) eine in x, z_1, z_2, $\frac{dz_1}{dx}$, c_1, c_2 identische Gleichung, die nach c_1 und c_2 differentiirt, wenn

$$\frac{dz_1}{dx} = t, \quad \varphi(x, z_1, t) = \omega_1(t), \quad \varphi(x, z_2, At+B) = \omega_2(t), \quad \frac{\partial F}{\partial z_1} t + \frac{\partial F}{\partial z_2}(At+B) = F_1$$

gesetzt wird, in früher definirten Bezeichnungen

$$a_1+b_1t+e_1t^2+\alpha_1\omega_1(t)+\alpha_2\omega_2(t) = \frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F}\beta + \frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F_1}\{\alpha_1 t+\alpha_2(At+B)\},$$

und

$$a_1'+b_1't+e_1't^2+\alpha_1'\omega_1(t)+\alpha_2'\omega_2(t) = \frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F}\beta' + \frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F_1}\{\alpha_1' t+\alpha_2'(At+B)\}$$

liefert, und wiederum durch Elimination von $\frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F}$ die Gleichung

$$(211.)\quad \begin{cases} (a_1\beta'-a_1'\beta)+(b_1\beta'-b_1'\beta)t+(e_1\beta'-e_1'\beta)t^2+(\alpha_1\beta'-\alpha_1'\beta)\omega_1(t)+(\alpha_2\beta'-\alpha_2'\beta)\omega_2(t) \\ \qquad = \frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F_1}\{(\alpha_1\beta'-\alpha_1'\beta)t+(\alpha_2\beta'-\alpha_2'\beta)(At+B)\}. \end{cases}$$

Ebenso erhält man durch Differentiation von (179.) nach $\frac{dz_1}{dx}$, nachdem wiederum $\frac{dz_2}{dx}$ der Gleichung (210.) gemäss durch $A\frac{dz_1}{dx}+B$ ersetzt worden,

$$(212.)\qquad m+nt+p\frac{d\omega_1(t)}{dt}+q\frac{d\omega_2(t)}{dt} = \frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F_1}[p+qA],$$

und durch Elimination von $\frac{\partial\varphi(x, F, F_1)}{\partial F_1}$ aus (211.) und (212.)

$$(213.)\quad \begin{cases} [(\alpha_1\beta'-\alpha_1'\beta)t+(\alpha_2\beta'-\alpha_2'\beta)(At+B)]\left[p\frac{d\omega_1(t)}{dt}+q\frac{d\omega_2(t)}{dt}\right] \\ -[p+qA][(\alpha_1\beta'-\alpha_1'\beta)\omega_1(t)+(\alpha_2\beta'-\alpha_2'\beta)\omega_2(t)] = L+Mt+Nt^2, \end{cases}$$

und diese Gleichung muss wiederum eine in x, z_1, z_2, $\frac{dz_1}{dx}=t$, c_1, c_2 identische sein; zugleich mag bemerkt werden, dass wegen

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial c_1},\quad \alpha_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial z_1\partial c_1},\quad \alpha_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial z_2\partial c_1},\quad p = \frac{\partial F}{\partial z_1},$$

$$\beta' = \frac{\partial F}{\partial c_2},\quad \alpha_1' = \frac{\partial^2 F}{\partial z_1\partial c_2},\quad \alpha_2' = \frac{\partial^2 F}{\partial z_2\partial c_2},\quad q = \frac{\partial F}{\partial z_2}$$

---

gralen und deren Ableitungen die folgende Relation besitzen:

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{f(u_2)}{f(u_1)}\frac{\frac{df(u_1)}{du_1}}{\frac{df(u_2)}{du_2}}\cdot\frac{du_1}{dx}+\frac{c}{f(u_1)\frac{df(u_2)}{du_2}}.$$

sich

$$\alpha_1\beta'-\alpha_1'\beta=\left(\frac{\partial F}{\partial c_2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z_1}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial c_2}}\right],\quad \alpha_2\beta'-\alpha_2'\beta=\left(\frac{\partial F}{\partial c_2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial c_2}}\right]$$

ergiebt. Setzt man nun

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial c_1}}{\frac{\partial F}{\partial c_2}}\right]=0\quad\text{und}\quad\frac{\partial F}{\partial z_2}=0,$$

und bestimmt aus diesen beiden Gleichungen zwei der Grössen c_1, c_2, z_1, z_2 algebraisch durch die beiden anderen, so bleibt die Gleichung (213.) als eine identische noch bestehen, und es ergiebt sich somit, da $\alpha_2\beta'-\alpha_2'\beta=0$ und $q=0$ ist,

$$t\frac{d\omega_1(t)}{dt}-\omega_1(t)\;=\;L_1+M_1t+N_1t^2,$$

und daraus wieder wie früher

$$\omega_1(t)=\varphi(x,z_1,t)=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}t+\mathfrak{C}t^2,$$

so dass die Differentialgleichung (177.) jedenfalls wieder die Form annehmen wird

$$(214.)\qquad \frac{d^2z}{dx^2}\;=\;\omega(x,z)+\omega_1(x,z)\frac{dz}{dx}+\omega_2(x,z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2.$$

Geht man nun von dieser Differentialgleichung aus, für welche die beiden Relationen

$$\frac{dz_2}{dx}=A\frac{dz_1}{dx}+B\quad\text{und}\quad z=F(z_1,z_2,c_1,c_2)$$

stattfinden sollen, so ergiebt sich unmittelbar durch Einsetzen der ersten dieser Beziehungen

$$(215.)\quad\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}+\frac{\partial A}{\partial z_2}\left(A\frac{dz_1}{dx}+B\right)\right]\frac{dz_1}{dx}\\&+A\left[\omega(x,z_1)+\omega_1(x,z_1)\frac{dz_1}{dx}+\omega_2(x,z_1)\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2\right]\\&+\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx}+\frac{\partial B}{\partial z_2}\left(A\frac{dz_1}{dx}+B\right)\\&=\omega(x,z_2)+\omega_1(x,z_2)\left(A\frac{dz_1}{dx}+B\right)+\omega_2(x,z_2)\left(A^2\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2+2AB\frac{dz_1}{dx}+B^2\right),\end{aligned}\right.$$

und diese Gleichung muss wieder, da eine algebraische Beziehung zwischen x,

$z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}$ ausgeschlossen war, eine identische sein. Setzt man die Coefficienten von $\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2$ auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich, so folgt

$$(216.)\qquad \frac{\partial A}{\partial z_1}+A\frac{\partial A}{\partial z_2}+A\omega_2(x,z_1) = A^2\omega_2(x,z_2),$$

und führt man für A den Ausdruck ein

$$(217.)\qquad A = \frac{f(x,z_2)}{f(x,z_1)}\frac{\frac{\partial f(x,z_1)}{\partial z_1}}{\frac{\partial f(x,z_2)}{\partial z_2}},$$

so wird wegen

$$\frac{\partial A}{\partial z_1} = A\left\{\frac{\frac{\partial^2 f(x,z_1)}{\partial z_1^2}}{\frac{\partial f(x,z_1)}{\partial z_1}}-\frac{\frac{\partial f(x,z_1)}{\partial z_1}}{f(x,z_1)}\right\},\qquad \frac{\partial A}{\partial z_2} = A\left\{\frac{\frac{\partial f(x,z_2)}{\partial z_2}}{f(x,z_2)}-\frac{\frac{\partial^2 f(x,z_2)}{\partial z_2^2}}{\frac{\partial f(x,z_2)}{\partial z_2}}\right\}$$

die Beziehung bestehen

$$\frac{\partial A}{\partial z_1}+A\frac{\partial A}{\partial z_2} = A\frac{\frac{\partial^2 f(x,z_1)}{\partial z_1^2}}{\frac{\partial f(x,z_1)}{\partial z_1}}-A^2\frac{\frac{\partial^2 f(x,z_2)}{\partial z_2^2}}{\frac{\partial f(x,z_2)}{\partial z_2}},$$

und sich somit durch Vergleichung mit (216.)

$$(218.)\qquad \omega_2(x,z) = -\frac{\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial z^2}}{\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}} = -\frac{\partial \log\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}}{\partial z}$$

ergeben. Danach geht die Differentialgleichung (214.) in

$$(219.)\qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = \omega(x,z)+\omega_1(x,z)\frac{dz}{dx}-\frac{\frac{\partial^2 f(x,z)}{\partial z^2}}{\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

über, während die Relation (210.) die Form annimmt

$$(220.)\qquad \frac{dz_2}{dx} = \frac{f(x,z_2)}{f(x,z_1)}\frac{\frac{\partial f(x,z_1)}{\partial z_1}}{\frac{\partial f(x,z_2)}{\partial z_2}}\frac{dz_1}{dx}+B.$$

Macht man nun die Substitution

$$(221.)\quad \begin{cases} \qquad\qquad f(x,z) = Z, \\ \text{also} \\ \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{dZ}{dx},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 Z}{dx^2}, \end{cases}$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$(222.)\qquad \frac{d^2Z}{dx^2} = \Omega(x, Z)+\Omega_1(x, Z)\frac{dZ}{dx},$$

für welche die aus (220.) hervorgehende Beziehung gelten soll

$$(223.)\qquad \frac{dZ_2}{dx} = \frac{Z_2}{Z_1}\frac{dZ_1}{dx}+P,$$

worin P eine algebraische Function von x, Z_1, Z_2 bedeutet, und zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen vermöge der Gleichung $z = F(z_1, z_2, c_1, c_2)$ und der Gleichung (221.) die Relation statthat

$$(224.)\qquad Z = \Phi(x, Z_1, Z_2, c_1, c_2).$$

Da nun die Beziehung (223.) bekanntlich bestehen bleibt, wenn Z_1 durch ein beliebiges, Z_2 durch ein passendes particuläres Integral ersetzt wird, so folgt nach (224.), wenn

$$\Phi(x, Z_1, Z_2, \varkappa_1, \varkappa_2) = \Phi_1,\quad \Phi(x, Z_1, Z_2, \lambda_1, \lambda_2) = \Phi_2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dx}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial Z_2}\left[\frac{Z_2}{Z_1}\frac{dZ_1}{dx}+P\right]$$
$$= \frac{\Phi_2}{\Phi_1}\left\{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dx}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial Z_2}\left[\frac{Z_2}{Z_1}\frac{dZ_1}{dx}+P\right]+P_1,\right.$$

worin P_1 die durch Einsetzen der Φ-Functionen transformirte Function P bedeutet, und da nicht zwischen x, z_1, z_2, $\frac{dz_1}{dx}$, also auch nicht zwischen x, Z_1, Z_2, $\frac{dZ_1}{dx}$ eine algebraische Beziehung stattfinden sollte, so müssen die Coefficienten von $\frac{dZ_1}{dx}$ auf beiden Seiten einander gleich und daher

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial Z_1}+\frac{Z_2}{Z_1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial Z_2} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}\left\{\frac{\partial\Phi_1}{\partial Z_1}+\frac{Z_2}{Z_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial Z_2}\right\}$$

sein, welche Gleichung wiederum eine in x, Z_1, Z_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ identische sein muss, indem λ_1 und λ_2 von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ abhängen. Setzt man diese Gleichung in die Form

$$Z_1\frac{\partial\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)}{\partial Z_1}+Z_2\frac{\partial\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)}{\partial Z_2} = 0,$$

so ergiebt sich durch Integration

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \psi\left(x, \frac{Z_2}{Z_1}\right),$$

oder

$$(225.)\qquad \frac{\Phi(x, Z_1, Z_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\Phi(x, Z_1, Z_2, \varkappa_1, \varkappa_2)} = \psi\left(x, \frac{Z_2}{Z_1}\right).$$

Daraus folgt aber unmittelbar, dass die Φ-Functionen, welche selbst Integrale der Differentialgleichung sind, homogene Functionen ersten Grades von Z_1 und Z_2 sein müssen, und wie man wieder leicht aus den früheren Beziehungen sieht, mit constanten Coefficienten, so dass wir ***somit auch in diesem Falle auf die homogenen linearen Differentialgleichungen zurückgeführt werden.***

Es war jedoch oben noch vorausgesetzt worden, dass zwischen x, z_1, z_2, $\frac{dz_1}{dx}$ eine algebraische Beziehung nicht stattfindet, während die Gleichung (179.) keine identische sein sollte; besteht nun aber eine solche Beziehung

$$(226.)\qquad \mathfrak{F}\left(x, z_1, z_2, \frac{dz_1}{dx}\right) = 0,$$

so wird diese bestehen bleiben, wenn z_2 statt z_1, und $F(z_1, z_2, \varkappa_1, \varkappa_2)$ statt z_2 gesetzt wird, worin $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ bestimmte, passend gewählte Constanten bedeuten, die in (208.) statt c_1 und c_2 zu substituiren sind, und man erhält somit eine Beziehung der Form

$$(227.)\qquad \mathfrak{F}_1\left(x, z_1, z_2, \frac{dz_2}{dx}\right) = 0,$$

so dass (226.) und (227.) mit (179.) zusammengestellt eine algebraische Relation

$$(228.)\qquad \psi(x, z_1, z_2) = 0$$

zwischen den beiden particulären Integralen z_1 und z_2 der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung liefern würden *) — dann wäre aber das allgemeine Integral eine algebraische Function nur ***eines*** particulären Integrales, und dieser Fall ist bereits oben behandelt worden und führte auf eine specielle Form der homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Fassen wir daher die gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich der Satz:

Alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale derselben ist, lassen sich durch eine in der abhängigen und unabhängigen Variabeln algebraische Substitution aus linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ableiten.

Auf Grund dieses Satzes und der oben gefundenen Theoreme ist es

*) Vergl. für diesen Fall die in meinen „Allg. Untersuchungen u. s. w." durchgeführte Betrachtung § 3, S. 16 und § 9, S. 113.

also, ***um alle Functionen zu finden, für welche ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem existirt, nur nöthig, diese Frage für Integrale von linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu beantworten.***

Sei nun die vorgelegte Differentialgleichung

$$(229.)\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \varphi_1(x)z+\varphi_2(x)\frac{dz}{dx},$$

und bestehe für dieselbe ein Functionaltheorem von der angegebenen Art

$$(230.)\quad F(Z_1, Z_2, z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3) = 0,\quad X_1 = f_1(x_1, x_2, x_3),\quad X_2 = f_2(x_1, x_2, x_3),$$

so mag dasselbe in die Form gesetzt werden

$$(231.)\qquad z_1 = \Phi(Z_1, Z_2, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

und diese bleibt, weil z_1 ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx_1^2} = \varphi_1(x_1)z+\varphi_2(x_1)\frac{dz}{dx_1}$$

sein sollte, welches nicht schon einer Differentialgleichung erster Ordnung genügt, bestehen, wenn statt z_1 ein anderes particuläres Fundamentalintegral z'_1 derselben Differentialgleichung, für Z_1 und Z_2 passende Integrale der zugehörigen Differentialgleichungen gesetzt werden, so dass aus (231.)

$$(232.)\qquad z'_1 = \Phi(m_1Z_1+m'_1Z'_1, m_2Z_2+m'_2Z'_2, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3)$$

und ebenso

$$(233.)\qquad z_1+z'_1 = \Phi(n_1Z_1+n'_1Z'_1, n_2Z_2+n'_2Z'_2, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3)$$

folgt, woraus wiederum nach (231.), (232.), (233.) eine neue Beziehung — vorausgesetzt, dass die Φ-Function, wie wir es in der That allgemein zeigen wollen, nicht schon linear in Bezug auf z_2, z_3, Z_1, Z_2 ist — sich ergiebt:

$$(234.)\qquad \begin{cases} \Phi(n_1Z_1+n'_1Z'_1, n_2Z_2+n'_2Z'_2, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3) \\ = \Phi(m_1Z_1+m'_1Z'_1, m_2Z_2+m'_2Z'_2, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3) \\ +\Phi(Z_1, Z_2, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3); \end{cases}$$

in dieser Beziehung kann man wieder für z_2 z'_2 und $z_2+z'_2$, ferner für z_3 z'_3 und $z_3+z'_3$ setzen, und erhält somit fünf Gleichungen, aus denen man die Grössen z'_2, z'_3, Z'_1, Z'_2 eliminiren kann, und sonach ein Eliminationsresultat

$$(235.)\qquad \Psi(Z_1, Z_2, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Stellt man endlich diese Gleichung mit (230.) zusammen und eliminirt die Grösse Z_2, so folgt

$$(236.)\qquad \Omega(Z_1, z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

d. h. es hätte das Integral der Differentialgleichung ein zum Geschlechte 1 gehöriges Functionaltheorem, welcher Fall bereits oben behandelt worden — wir schliessen daraus, *dass die Beziehung* (230.) *eine in den Grössen* z_1, z_2, z_3, Z_1, Z_2 *lineare sein muss, wenn überhaupt ein zum Geschlechte* 2 *gehöriges Functionaltheorem statthaben soll,* weil nur in diesem Falle die oben hergeleiteten Gleichungen (234.) und die folgenden möglicherweise identisch werden könnten, was sogleich untersucht werden soll.

Sei nun das Functionaltheorem für das betrachtete Integral der linearen homogenen Differentialgleichung von der linearen Form

$$(237.)\qquad A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a = 0,$$

worin $a, a_1, a_2, a_3, A_1, A_2$ algebraische Functionen von x bedeuten, so werden die den Gleichungen (232.) und (233.) entsprechenden Beziehungen lauten

$$(238.)\qquad A_1(m_1 Z_1 + m'_1 Z'_1) + A_2(m_2 Z_2 + m'_2 Z'_2) + a_1 z'_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a = 0,$$

$$(239.)\qquad A_1(n_1 Z_1 + n'_1 Z'_1) + A_2(n_2 Z_2 + n'_2 Z'_2) + a_1(z_1 + z'_1) + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a = 0,$$

und man sieht sogleich, dass durch Addition von (237.) und (238.) und Subtraction dieser Summe von (239.) die der Gleichung (234.) entsprechende Beziehung sich ergiebt, welche nicht identisch ist,

$$(240.)\qquad L_1 Z_1 + L'_1 Z'_1 + L_2 Z_2 + L'_2 Z'_2 - a_2 z_2 - a_3 z_3 - a = 0;$$

setzt man hierin wieder statt z_2 z'_2 und $z_2 + z'_2$, so folgt

$$M_1 Z_1 + M'_1 Z'_1 + M_2 Z_2 + M'_2 Z'_2 - a_2 z'_2 - a_3 z_3 - a = 0,$$
$$N_1 Z_1 + N'_1 Z'_1 + N_2 Z_2 + N'_2 Z'_2 - a_2(z_2 + z'_2) - a_3 z_3 - a = 0,$$

und aus der Verbindung der letzten beiden Gleichungen mit (240.) durch Elimination von z_2 und z'_2

$$(241.)\qquad P_1 Z_1 + P'_1 Z'_1 + P_2 Z_2 + P'_2 Z'_2 - a_3 z_3 - a = 0.$$

Nun sind die zu den Integralen Z_1, Z'_1 und Z_2, Z'_2 gehörigen Argumente X_1 und X_2 algebraische Functionen von x_1, x_2, x_3, von denen auch P_1, P'_1 P_2, P'_2, a_3, a algebraisch abhängen, und denkt man umgekehrt aus diesen algebraischen Ausdrücken für X_1 und X_2 die beiden Grössen x_1 und x_2 algebraisch durch X_1, X_2, x_3 ausgedrückt, so kann man diese letzteren drei als völlig von einander unabhängig auffassen, wie es vorher die x_1, x_2, x_3 waren, und setzen wir $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$ und bezeichnen die Integrale z und z' jetzt mit ζ und ζ', so geht die Beziehung (241.) in

$$(242.)\qquad \pi_1\zeta_1 + \pi_2\zeta_2 + \pi_3\zeta_3 + \pi'_1\zeta'_1 + \pi'_2\zeta'_2 + \pi = 0$$

über, in welcher ζ_1, ζ_2, ζ_3 die Werthe von ζ für die Argumente ξ_1, ξ_2, ξ_3, ferner ζ'_1, ζ'_2 die Werthe von ζ' für die Argumente ξ_1 und ξ_2, endlich π_1, π_2, π_3, π'_1, π'_2, π algebraische Functionen von ξ_1, ξ_2, ξ_3 bedeuten. Setzt man nun in dieser Gleichung ξ_2 und ξ_3 Constanten gleich, so folgt eine Beziehung

$$(243.)\qquad \lambda_1\zeta_1+\lambda'_1\zeta'_1+\lambda = 0,$$

worin ζ_1 und ζ'_1 die zu dem willkürlichen Argumente ξ_1 gehörigen Werthe der beiden Fundamentalintegrale der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, und λ, λ_1, λ'_1 algebraische Functionen von ξ_1 bedeuten; findet aber zwischen zwei particulären Fundamentalintegralen einer homogenen linearen Differentialgleichung eine Relation von der Form (243.) statt, so ergiebt sich, wie unmittelbar durch Einsetzen des Werthes $\zeta'_1 = \mu_1\zeta_1+\mu$ in die Differentialgleichung hervorgeht, dass ζ_1, wenn nicht μ algebraisch ist, schon einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen müsste *), welcher Fall oben, weil schon früher behandelt, ausgeschlossen war, — *es besitzt also das Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung nie ein Functionaltheorem.*

Nachdem nun oben gezeigt worden, dass, wenn das Integral einer algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung ein Functionaltheorem zum Geschlechte 2 gehörig besitzen soll, diese Differentialgleichung eine homogene lineare sein muss, so folgt mit Rücksicht auf das eben gefundene Resultat,

dass das Integral einer algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung nie ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem besitzen kann.

Bemerken wir endlich, dass oben nachgewiesen worden, dass, wenn irgend eine Function ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem haben soll, diese das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster oder zweiter Ordnung sein muss, dass aber weiter gefunden worden, dass für Integrale algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung die Existenz eines Functionaltheorems die Function einzig und allein als ein zum Geschlechte 2 gehöriges *Abel*sches Integral definirt, während Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie eben gezeigt worden, überhaupt nicht existiren, für deren Integrale ein Functionaltheorem besteht, so können wir den folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

*) Jede algebraische Relation zwischen zwei particulären Integralen erweist die Differentialgleichung zweiter Ordnung als eine reductible.

Es giebt überhaupt keine Functionen einer Variabeln, welche ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem besitzen, mit Ausnahme der zum Geschlechte 2 gehörigen Abelschen Integrale und einfacher Zusammensetzungen derselben.

Man sieht aber leicht, dass man ähnliche Schlüsse auch auf die Functionen anwenden kann, welche ein zum Geschlechte p gehöriges Functionaltheorem besitzen, indem man zeigt, dass sie algebraischen Differentialgleichungen p^{ter} Ordnung genügen müssen, deren allgemeines Integral eine algebraische Function von p particulären Integralen ist, wonach man dann wieder auf lineare homogene Differentialgleichungen p^{ter} Ordnung zurückgeführt wird und für diese genau wie oben nachweist, dass das Integral einer solchen nie ein zum Geschlechte p gehöriges Functionaltheorem haben kann *); es ergiebt sich sonach mit Rücksicht auf die im ersten Theile der Arbeit gewonnenen Resultate der ganz allgemeine Satz:

*) Rücksichtlich der obigen auf das Geschlecht p erweiterten Untersuchung mag bemerkt werden, dass sich die Frage nach den Integralen einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, welchen ein Functionaltheorem für ein beliebiges Geschlecht zukommen soll, schon unmittelbar auf Grund des in meiner oben erwähnten Arbeit in den Acta Mathematica erhaltenen Resultates entscheiden lässt. Da nämlich nach den hier vorliegenden Untersuchungen die Frage zurückgeführt ist auf die Aufsuchung aller derjenigen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral algebraisch von p particulären Integralen abhängt, und in jener Arbeit nachgewiesen worden, dass ausser den linearen Differentialgleichungen nur noch eine Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung existirt, für welche das allgemeine Integral mit einer Anzahl von particulären Integralen algebraisch verbunden ist, nämlich

$$(\alpha.)\quad \frac{dz}{dx} = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)z + \varphi_3(x)z^2,$$

für welche die Relation lautet

$$(\beta.)\quad z = \frac{c_3 z_1(z_2-z_3) + cz_2(z_3-z_1)}{c_3(z_2-z_3) + c(z_3-z_1)},$$

so bleibt die Möglichkeit eines Functionaltheorems nur für diese Differentialgleichung zu untersuchen. Nun führt aber die Substitution

$$(\gamma.)\quad z = -\frac{1}{\varphi_3(x)}\frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

die Differentialgleichung $(\alpha.)$ bekanntlich in die lineare homogene Differentialgleichung über

$$(\delta.)\quad \frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0,$$

worin

$$P = -\left(\frac{\frac{d\varphi_3(x)}{dx}}{\varphi_3(x)} + \varphi_2(x)\right),\quad Q = \varphi_1(x).\varphi_3(x)$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function einer Variabeln ein zum Geschlechte p gehöriges Functionaltheorem besitzt, ist die, dass dieselbe das Integral einer durch eine algebraische Substitution aus der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x)\chi(z)$$

abgeleiteten Differentialgleichung ist, in welcher entweder $\chi(z)$ *eine Quadratwurzel aus einem Polynome vierten Grades und* $\omega(x)$ *der reciproke Werth einer ebensolchen Quadratwurzel, oder* $\int\frac{dz}{\chi(z)}$ *eine algebraische Function und* $\int\omega(x)dx$ *ein nur algebraisch unstetig werdendes Abelsches Integral vom Geschlechte p ist, oder endlich* $\int\frac{dz}{\chi(z)}$ *den Logarithmus einer algebraischen Function darstellt, während* $\int\omega(x)dx$ *ein zum Geschlechte p gehöriges Abelsches Integral mit nur logarithmischen Unstetigkeiten bedeutet,*

oder noch anders ausgedrückt, wodurch das Resultat übersichtlicher wird:

Die einzigen Functionen einer Variabeln, deren Werthe für n von einander unabhängige beliebige Variable in algebraischem Zusammenhange mit

---

ist, und ein Functionaltheorem, das zum Geschlechte 3 gehört und somit für ein Integral von (α.) die Gestalt hat

$$(\varepsilon.)\qquad F(Z_1, Z_2, Z_3, z_1, z_2, z_3, z_4, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

würde eine Beziehung für (δ.) von der Form nach sich ziehen

$$(\eta.)\qquad \Phi\left(\frac{\frac{dU_1}{dx}}{U_1}, \frac{\frac{dU_2}{dx}}{U_2}, \frac{\frac{dU_3}{dx}}{U_3}, \frac{\frac{du_1}{dx}}{u_1}, \frac{\frac{du_2}{dx}}{u_2}, \frac{\frac{du_3}{dx}}{u_3}, \frac{\frac{du_4}{dx}}{u_4}\right) = 0.$$

Dass nun eine solche Beziehung nicht statthaben kann, zeigt man entweder auf genau demselben Wege, auf dem die Unmöglichkeit der Gleichung (231.) nachgewiesen worden, indem man successive die einzelnen Quotienten aus (η.) eliminirt, oder man benutzt die für die Normalform einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung geltende Beziehung

$$\frac{\frac{du'}{dx}}{u'} - \frac{\frac{du}{dx}}{u} = \frac{c}{uu'},$$

wenn u' ein zu u gehöriges Fundamentalintegral bedeutet, und erhält ein algebraisches Functionaltheorem für die Function uu', welche bekanntlich das Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung ist und nach den oben bewiesenen Sätzen ein solches Functionaltheorem nicht haben kann.

weniger als n Werthen eben dieser Function für algebraisch von jenen n Variablen abhängige Argumente stehen, sind im Wesentlichen die Integrale algebraischer Functionen, für welche das Abelsche Theorem jenen Zusammenhang feststellt.

Es bleibt somit zur vollständigen Erledigung der Frage nur noch zu untersuchen übrig, ob Functionen von mehreren Variabeln Functionaltheoreme der angegebenen Art besitzen können. Sei also für eine Function

$$f(u_1, u_2, u_3, \ldots)$$

zunächst ein Functionaltheorem für das Geschlecht 1 von der Form angenommen

$$(244.)\quad \begin{cases} f[\varphi_1(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots), \; \varphi_2(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots), \; \ldots] \\ \qquad = F\{f(u_1, u_2, u_3, \ldots), \; f(v_1, v_2, v_3, \ldots)\}, \end{cases}$$

worin F, φ_1, φ_2, ... algebraische Functionen bedeuten, so setze man $a = f(v_1, v_2, v_3, \ldots)$, wo a eine willkürliche aber feste Constante vorstellt, und es werden dieser letzteren Gleichung unendlich viele Systeme von Werthen v_1, v_2, v_3, ... genügen, von denen wir beliebig viele unendlich nahe gelegene auswählen können. Da aber dann die rechte Seite dieser Gleichung für ein beliebiges aber festes u-System nur eine endliche Anzahl von Werthen hat, so werden zwei entsprechende linke Seiten für unendlich nahe gelegene v-Systeme einmal einander gleich sein müssen, und da dann φ_1, φ_2, ... auch nur um unendlich kleine Grössen variiren, so werden wir eine Gleichung der Form erhalten

$$f(U_1+h_1, U_2+h_2, U_3+h_3, \ldots) = f(U_1, U_2, U_3, \ldots),$$

worin U_1, U_2, U_3, ... beliebige Argumente und h_1, h_2, h_3, ... unendlich kleine Grössen bedeuten *); es würde also die Function f eine Function mehrerer Variabeln mit unendlich kleinen Perioden sein, welche Functionen von unserer Untersuchung ausgeschlossen sind.

Ganz ähnliche Schlüsse gelten für die Annahme eines zu einem beliebigen Geschlechte gehörigen Functionaltheorems, und wir erhalten somit als Verallgemeinerung des vorigen Satzes den nachfolgenden:

Die einzigen Functionen beliebig vieler Variabeln, deren Werthe für

---

*) Für ein bestimmt gewähltes v-System würden freilich h_1, h_2, ... von U_1, U_2, ... abhängig sein, also nicht als Perioden der Function für willkürliche Argumente aufgefasst werden können; aber man kann für v_1, v_2, ... ein beliebiges Ausgangssystem wählen, während man U_1, U_2, ... durch die willkürlichen Grössen u_1, u_2, ... zu unbestimmten Variabeln macht; es werden also die h_1, h_2, ... nicht mehr von den Werthen U_1, U_2, ... abhängen.

n von einander unabhängige beliebige Systeme von Variabeln in algebraischem Zusammenhange mit weniger als n Werthen eben dieser Function für algebraisch von jenen n Systemen von Variabeln abhängige Argumente stehen, sind im Wesentlichen die Integrale algebraischer Functionen, für welche das Abelsche Theorem jenen Zusammenhang feststellt.

So lange also in das Functionaltheorem nur die betrachtete Function selbst für unabhängige und algebraisch davon abhängige Argumente eintreten soll, ist eine Ausdehnung des *Abel*schen Theoremes unmöglich; nun zeigt aber das letztere Theorem, dass die Gestalt desselben unverändert bleibt, wenn z. B. ein Integral erster Gattung durch ein beliebiges anderes derselben Gattung ersetzt wird, und diese letztere Thatsache war bekanntlich für *Jacobi* die Veranlassung, die Umkehrungsfunctionen der hyperelliptischen Integrale als Functionen von so vielen unabhängigen Variabeln zu definiren, als es zu der betreffenden Irrationalität gehörige Integrale erster Gattung giebt, so dass in das Functionaltheorem der Umkehrungsfunctionen zwei selbständige Functionen eintraten in der Form z. B., dass

$$(A.)\quad \begin{cases} al_1(u_1+v_1, u_2+v_2) = F_1\{al_1(u_1, u_2), al_2(u_1, u_2), al_1(v_1, v_2), al_2(v_1, v_2)\} \\ al_2(u_1+v_1, u_2+v_2) = F_2\{al_1(u_1, u_2), al_2(u_1, u_2), al_1(v_1, v_2), al_2(v_1, v_2)\} \end{cases}$$

ist. Diese Ueberlegung führt dazu, in das gesuchte Functionaltheorem, das zunächst für das Geschlecht 1 untersucht werden soll, zugleich zwei Functionen zweier unabhängiger Variablen einzuführen — welches diese sein werden, ist nachher zu untersuchen — so dass wir das für die beiden Functionen $f_1(u_1, u_2)$ und $f_2(u_1, u_2)$ geltende und zum Geschlechte 1 gehörige Functionaltheorem durch die beiden algebraischen Beziehungen definiren:

$$(245.)\quad \begin{cases} f_1[\varphi_1(u_1, u_2, v_1, v_2), \psi_1(u_1, u_2, v_1, v_2)] \\ = F_1\{f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_1(v_1, v_2), f_2(v_1, v_2)\}, \end{cases}$$

$$(246.)\quad \begin{cases} f_2[\varphi_2(u_1, u_2, v_1, v_2), \psi_2(u_1, u_2, v_1, v_2)] \\ = F_2\{f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_1(v_1, v_2), f_2(v_1, v_2)\}, \end{cases}$$

worin φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2, F_1, F_2 algebraische Functionen bedeuten, von denen auch die letzten beiden die unabhängigen Variabeln enthalten können.

Zunächst sieht man unmittelbar, dass eine solche Function eine algebraische Periode besitzen muss; denn setzt man $f_1(v_1, v_2) = a_1$, $f_2(v_1, v_2) = a_2$, so folgen, unter der Annahme, die sich später als erfüllt darstellen wird, dass mehr Werthesysteme von v_1, v_2 zu diesen beiden Bestimmungen gehören,

als die Vieldeutigkeit der Functionen F_1 und F_2 anzeigt, die beiden Beziehungen

$$(247.)\quad \begin{cases} f_1[\varphi_1(u_1, u_2, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}), \psi_1(u_1, u_2, v_1^{(1)}, v_2^{(1)})] \\ = f_1[\varphi_1(u_1, u_2, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}), \psi_1(u_1, u_2, v_1^{(2)}, v_2^{(2)})], \end{cases}$$

$$(248.)\quad \begin{cases} f_2[\varphi_2(u_1, u_2, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}), \psi_2(u_1, u_2, v_1^{(1)}, v_2^{(1)})] \\ = f_2[\varphi_2(u_1, u_2, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}), \psi_2(u_1, u_2, v_1^{(2)}, v_2^{(2)})]; \end{cases}$$

setzt man nun

$$\varphi_1(u_1, u_2, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}) = U_1, \quad \psi_1(u_1, u_2, v_1^{(2)}, v_2^{(2)}) = U_2,$$

also

$$\varphi_1(u_1, u_2, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}) = \omega_1(U_1, U_2), \quad \psi_1(u_1, u_2, v_1^{(1)}, v_2^{(1)}) = \omega_2(U_1, U_2),$$

so folgt aus (247.)

$$(249.)\quad f_1[\omega_1(U_1, U_2), \omega_2(U_1, U_2)] = f_1(U_1, U_2),$$

und ähnlich aus der zweiten Gleichung

$$(250.)\quad f_2[\Omega_1(U_1, U_2), \Omega_2(U_1, U_2)] = f_2(U_1, U_2),$$

womit die algebraische Periodicität der betrachteten Functionen erwiesen ist *).

---

*) Man würde auch umgekehrt aus der bekannten Periode einer Function die Form des hypothetisch vorausgesetzten Functionaltheorems ermitteln können. Denn nehmen wir z. B. an, dass die von Herrn *Fuchs* durch das Gleichungssystem

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \int^{z_1} \varphi(z)\,dz + \int^{z_2} \varphi(z)\,dz = u_1, \\ \int^{z_1} \psi(z)\,dz + \int^{z_2} \psi(z)\,dz = u_2, \end{cases}$$

in welchen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ zwei Fundamentalintegrale einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bedeuten, definirten eindeutigen Umkehrungsfunctionen ein zum Geschlechte 1 gehöriges durch die Gleichungen (245.) und (246.) dargestelltes Functionaltheorem besässen, wie es die Gleichungen (*A.*) für das System

$$\int^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \int^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = u_1,$$
$$\int^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \int^{z_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} = u_2$$

lieferten, wenn $R(z)$ ein ganzes Polynom fünften Grades vorstellt; da die Functionen $f_1(v_1, v_2)$ und $f_2(v_1, v_2)$ bekanntlich eine ganze lineare Periode besitzen, so dass

$$f_1(\alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \beta_1 c, \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \beta_2 c) = f_1(v_1, v_2),$$
$$f_2(\alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \beta_1 c, \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \beta_2 c) = f_2(v_1, v_2)$$

wird, so sieht man unmittelbar, dass, wenn man auf der rechten Seite von (245.) und (246.) v_1 und v_2 durch

$$\alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \beta_1 c \quad \text{und} \quad \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \beta_2 c$$

ersetzt, die rechten Seiten unverändert bleiben müssen, und somit, da die rechte Seite der Gleichung nur eine endliche Vieldeutigkeit einschliesst, für die linken Seiten

Um eine weitere Eigenschaft dieser Functionen zu ermitteln, differentiire man die Gleichung (245.) nach u_1, v_1 und v_2 und eliminire aus den so entstehenden Gleichungen und (245.) selbst die drei Grössen

$$f(\varphi_1, \psi_1), \quad \frac{\partial f(\varphi_1, \psi_1)}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial f(\varphi_1, \psi_1)}{\partial \psi_1},$$

so erhält man, indem v_1 und v_2 als Parameter aufgefasst werden, eine Beziehung von der Form

$$(251.) \qquad \Psi_1\left(f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), \frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, u_1, u_2\right) = 0;$$

differentiirt man ebenso (246.) nach u_1, v_1 und v_2, so folgt die im Allgemeinen von der vorigen verschiedene Gleichung

$$(252.) \qquad \Psi_2\left(f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), \frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, u_1, u_2\right) = 0,$$

und dasselbe gilt, wenn u_2 zur unabhängigen Variabeln gemacht wird; da aber aus (251.) und (252.) durch nochmalige Differentiation nach u_1 sich aus den so entstehenden vier Gleichungen die drei Grössen

$$f_2(u_1, u_2), \quad \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial^2 f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}$$

---

die Beziehungen gelten:

$$f_1[\varphi_1(u_1, u_2, k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + k_1 c, k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + k_2 c),$$
$$\psi_1(u_1, u_2, k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + k_1 c, k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + k_2 c)] = f_1[\varphi_1(u_1, u_2, v_1, v_2), \psi_1(u_1, u_2, v_1, v_2)],$$
$$f_2[\varphi_2(u_1, u_2, k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + k_1 c, k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + k_2 c),$$
$$\psi_2(u_1, u_2, k_{11}v_1 + k_{12}v_2 + k_1 c, k_{21}v_1 + k_{22}v_2 + k_2 c)] = f_2[\varphi_2(u_1, u_2, v_1, v_2), \psi_2(u_1, u_2, v_1, v_2)].$$

Da nun hieraus wegen der Periodicität der Functionen sich leicht ergiebt, dass

$$\varphi_1(u_1, u_2, v_1, v_2) = u_1(m_1 v_1 + m_2 v_2) + u_2(n_1 v_1 + n_2 v_2) + p_1,$$
$$\psi_1(u_1, u_2, v_1, v_2) = u_1(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) + u_2(\nu_1 v_1 + \nu_2 v_2) + q_1,$$

und ähnliche bilineare Ausdrücke in u_1, u_2, v_1, v_2 für φ_2 und ψ_2, so wäre damit die Form des Functionaltheorems, wenn dasselbe überhaupt existirte, gefunden, und es würde dasselbe in Integrale umgesetzt das folgende Functionaltheorem für diese liefern:

$$\left(\int^{z_1}\varphi(z)dz + \int^{z_2}\varphi(z)dz\right)\left[m_1\left(\int^{\zeta_1}\varphi(z)dz + \int^{\zeta_2}\varphi(z)dz\right) + m_2\left(\int^{\zeta_1}\psi(z)dz + \int^{\zeta_2}\psi(z)dz\right)\right]$$
$$+\left(\int^{z_1}\psi(z)dz + \int^{z_2}\psi(z)dz\right)\left[n_1\left(\int^{\zeta_1}\varphi(z)dz + \int^{\zeta_2}\varphi(z)dz\right) + n_2\left(\int^{\zeta_1}\psi(z)dz + \int^{\zeta_2}\psi(z)dz\right)\right] + p_1$$
$$= \int^{Z_1}\varphi(z)dz + \int^{Z_2}\varphi(z)dz,$$

$$\left(\int^{z_1}\varphi(z)dz + \int^{z_2}\varphi(z)dz\right)\left[\mu_1\left(\int^{\zeta_1}\varphi(z)dz + \int^{\zeta_2}\varphi(z)dz\right) + \mu_2\left(\int^{\zeta_1}\psi(z)dz + \int^{\zeta_2}\psi(z)dz\right)\right]$$
$$+\left(\int^{z_1}\psi(z)dz + \int^{z_2}\psi(z)dz\right)\left[\nu_1\left(\int^{\zeta_1}\varphi(z)dz + \int^{\zeta_2}\varphi(z)dz\right) + \nu_2\left(\int^{\zeta_1}\psi(z)dz + \int^{\zeta_2}\psi(z)dz\right)\right] + q_1$$
$$= \int^{Z_1}\psi(z)dz + \int^{Z_2}\psi(z)dz.$$

eliminiren lassen, und das Eliminationsresultat

$$\Psi\left(f_1(u_1, u_2), \frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}, u_1, u_2\right) = 0$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $f_1(u_1, u_2)$, als Function von u_1 aufgefasst, liefert und dasselbe u_2 und für $f_2(u_1, u_2)$ gilt, so erhalten wir den Satz:

Die beiden Functionen zweier Variabeln eines Systems, welchen ein Functionaltheorem zum Geschlechte 1 gehörig im angegebenen Sinne zukommt, besitzen eine algebraische Periode, genügen einem gleichzeitigen Systeme von vier partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in Bezug auf die beiden unabhängigen Variabeln und sind einzeln, als Functionen einer jeden ihrer Variabeln aufgefasst, Integrale algebraischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung *).

Untersuchen wir jetzt den Charakter der Functionen mit zwei unabhängigen Variabeln, welche ein im angegebenen Sinne zum Geschlechte 2

---

*) Die entsprechenden Differentialgleichungen für die Umkehrungsfunctionen der hyperelliptischen Integrale erster Ordnung lauten:

$$\frac{\partial z_1}{\partial u_1} = \frac{z_2\sqrt{R(z_1)}}{z_2-z_1}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial u_1} = \frac{z_1\sqrt{R(z_2)}}{z_1-z_2},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u_2} = \frac{\sqrt{R(z_1)}}{z_2-z_1}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial u_2} = \frac{\sqrt{R(z_2)}}{z_1-z_2},$$

und man sieht unmittelbar, dass, wenn man die erste dieser vier Gleichungen nach u_1 differentiirt, die Werthe von $\frac{\partial z_1}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial z_2}{\partial u_1}$ einsetzt und aus der so erhaltenen Gleichung und der ersten z_2 eliminirt, sich eine algebraische Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form ergiebt

$$F\left\{z_1, \frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 z_1}{\partial u_1^2}\right\} = 0,$$

als deren charakteristisches Merkmal wieder hervorzuheben ist, dass die Variable u explicite nicht in derselben vorkommt, grade so wie es in der Differentialgleichung für diejenigen Functionen *einer* Variabeln der Fall war, welche ein Additionstheorem im gewöhnlichen Sinne hatten. Dagegen sieht man sogleich, dass aus den in der letzten Anmerkung aufgestellten Definitionsgleichungen (α.), wenn

$$\varphi(z_1)\psi(z_2)-\varphi(z_2)\psi(z_1) = \Delta$$

gesetzt wird, sich

$$\frac{\partial z_1}{\partial u_1} = \frac{\psi(z_2)}{\Delta}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u_2} = -\frac{\varphi(z_2)}{\Delta}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial u_1} = -\frac{\psi(z_1)}{\Delta}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial u_2} = \frac{\varphi(z_1)}{\Delta}$$

ergiebt, und somit z_1 sich nicht als das Integral einer algebraischen Differentialgleichung *zweiter Ordnung* mit der unabhängigen Variabeln u_1 darstellen lässt — es besitzen daher die Functionen z_1+z_2 und $z_1 z_2$ kein zum Geschlechte 1 gehöriges Functionaltheorem.

gehöriges Functionaltheorem besitzen, in welches also wieder zwei zusammengehörige Functionen zweier Variabeln eintreten, so wird dieses Functionaltheorem durch zwei Gleichungen von der Form definirt sein

$$(253.)\quad \begin{cases} F_1\{f_1(\varphi_1, \psi_1),\ f_1(\chi_1, \omega_1),\ f_1(u_1, u_2),\ f_2(u_1, u_2), \\ f_1(v_1, v_2),\ f_2(v_1, v_2),\ f_1(w_1, w_2),\ f_2(w_1, w_2)\} = 0, \end{cases}$$

$$(254.)\quad \begin{cases} F_2\{f_2(\varphi_2, \psi_2),\ f_2(\chi_2, \omega_2),\ f_1(u_1, u_2),\ f_2(u_1, u_2), \\ f_1(v_1, v_2),\ f_2(v_1, v_2),\ f_1(w_1, w_2),\ f_2(w_1, w_2)\} = 0, \end{cases}$$

worin $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \omega_1, \varphi_2, \psi_2, \chi_2, \omega_2$ algebraische Functionen von $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ und F_1, F_2 algebraische Functionen bedeuten, in welche die unabhängigen Variabeln auch noch explicite eintreten können. Differentiirt man die erste dieser beiden Gleichungen zweimal nach u_1, zweimal nach v_1, v_2, w_1, w_2, einmal nach v_1 und v_2, einmal nach w_1 und w_2, bildet also

$$F_1 = 0,\ \frac{\partial F_1}{\partial u_1} = 0,\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1^2} = 0,\ \frac{\partial F_1}{\partial v_1} = 0,\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial v_1^2} = 0,\ \frac{\partial F_1}{\partial w_1} = 0,\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial w_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v_2} = 0,\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial v_2^2} = 0,\ \frac{\partial F_1}{\partial w_2} = 0,\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial w_2^2} = 0,\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial v_1 \partial v_2} = 0,\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial w_1 \partial w_2} = 0,$$

so erhält man 13 Gleichungen, aus denen man die zwölf Grössen

$$f_1[\varphi_1, \psi_1],\ \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1},\ \frac{\partial f_1}{\partial \psi_1},\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi_1^2},\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi_1 \partial \psi_1},\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \psi_1^2},$$

$$f_1[\chi_1, \omega_1],\ \frac{\partial f_1}{\partial \chi_1},\ \frac{\partial f_1}{\partial \omega_1},\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \chi_1^2},\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \chi_1 \partial \omega_1},\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \omega_1^2}$$

eliminiren kann, und es ergiebt sich als Eliminationsresultat

$$(255.)\quad \begin{cases} \Phi_1\Big\{f_1(u_1, u_2),\ f_2(u_1, u_2),\ \dfrac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1},\ \dfrac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \\ \qquad \dfrac{\partial^2 f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1^2},\ \dfrac{\partial^2 f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}\Big\} = 0, \end{cases}$$

wobei u_1, u_2 explicite in die Function eintreten können, und v_1, v_2, w_1, w_2 als Parameter betrachtet in die Functionsbezeichnung nicht aufgenommen sind. Verfährt man ebenso mit der Gleichung (254.), so erhält man eine ähnliche Gleichung

$$(256.)\quad \begin{cases} \Phi_2\Big\{f_1(u_1, u_2),\ f_2(u_1, u_2),\ \dfrac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1},\ \dfrac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \\ \qquad \dfrac{\partial^2 f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}.\ \dfrac{\partial^2 f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}\Big\} = 0, \end{cases}$$

und zwei ebensolche Gleichungen, wenn u_2 zur unabhängigen Variabeln gemacht und nach dieser differentiirt wird. Differentiirt man aber die Glei-

chungen (255.) und (256.) noch zweimal nach u_1, so erhält man sechs Gleichungen

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u_1^2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial u_1^2} = 0,$$

aus denen man die fünf Grössen

$$f_2(u_1, u_2), \quad \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial^2 f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}, \quad \frac{\partial^3 f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1^3}, \quad \frac{\partial^4 f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1^4}$$

eliminiren kann, und erhält als Eliminationsresultat

$$(257.) \qquad \Phi\left\{f_1(u_1, u_2), \frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}, \frac{\partial^3 f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1^3}, \frac{\partial^4 f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1^4}\right\} = 0,$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung für $f_1(u_1, u_2)$ als Function von u_1 aufgefasst, in welche auch u_1 explicite eingehen kann, und dasselbe gilt für u_2; wir erhalten somit den Satz:

Die beiden Functionen zweier Variabeln eines Systems, welchen ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem im angegebenen Sinne zukommt, genügen einem Systeme von vier partiellen gleichzeitigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Bezug auf die beiden unabhängigen Variabeln und sind einzeln, als Functionen einer jeden ihrer Variabeln aufgefasst, Integrale algebraischer Differentialgleichungen vierter Ordnung.

Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass einem Functionaltheorem vom Geschlechte p eine Differentialgleichung $2p^{\text{ter}}$ Ordnung zugehört, und ebenso ist die entsprechende Erweiterung ersichtlich, wenn in das Functionaltheorem mehr als zwei selbständige Functionen eintreten sollen.

Wir wollen nunmehr wieder die Möglichkeit der Existenz eines zum Geschlechte 1 gehörigen Functionaltheorems untersuchen und gehen daher von den aus den Gleichungen (245.) und (246.) hergeleiteten Differentialgleichungen (251.) und (252.) aus, die wir, wenn

$$(258.) \qquad f_1(u_1, u_2) = z_1, \quad f_2(u_1, u_2) = z_2$$

gesetzt werden, in die Form bringen wollen

$$(259.) \qquad \frac{dz_1}{du_1} = \varphi_1(u_1, u_2, z_1, z_2), \quad \frac{dz_2}{du_1} = \varphi_2(u_1, u_2, z_1, z_2),$$

und für welche das Functionaltheorem durch

$$(260.) \qquad Z_1 = F_1(z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2), \quad Z_2 = F_2(z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)$$

dargestellt sein soll, wenn ζ_1, ζ_2 und Z_1, Z_2 durch die Differentialgleichungen definirt sind:

$$(261.)\quad \frac{d\zeta_1}{dv_1} = \varphi_1(v_1, v_2, \zeta_1, \zeta_2),\quad \frac{d\zeta_2}{dv_1} = \varphi_2(v_1, v_2, \zeta_1, \zeta_2)$$

und

$$(262.)\quad \frac{dZ_1}{dU_1} = \varphi_1(U_1, U_2, Z_1, Z_2),\quad \frac{dZ_2}{dU_1} = \varphi_2(U_1, U_2, Z_1, Z_2),$$

worin U_1, U_2 algebraisch mit u_1, u_2, v_1, v_2 durch die Gleichungen verbunden sind

$$(263.)\quad U_1 = \psi_1(u_1, v_1, u_2, v_2),\quad U_2 = \psi_2(u_1, v_1, u_2, v_2).$$

Da wiederum nach bekannten Sätzen die Beziehungen (260.) bestehen bleiben, wenn man für ζ_1 und ζ_2 irgend ein anderes System von Integralen der Differentialgleichungen (261.) setzt, wenn nur für Z_1 und Z_2 ein passendes System von Integralen der Differentialgleichungen (262.) substituirt wird, und das allgemeine Integralsystem von (261.) zwei willkürliche Constanten enthält, so wird, wenn man dieses Integralsystem in (260.) einsetzt, und die statt Z_1 und Z_2 zu substituirenden Integrale wieder mit Z_1 und Z_2 bezeichnet, die jedoch jetzt vermöge der beiden von ζ_1 und ζ_2 eingeführten Constanten die allgemeinen Integrale von (262.) werden, sich

$$(264.)\quad \begin{cases} Z_1 = F_1(z_1, z_2, \omega_1(v_1, v_2, c_1, c_2), \omega_2(v_1, v_2, c_1, c_2)), \\ Z_2 = F_2(z_1, z_2, \omega_1(v_1, v_2, c_1, c_2), \omega_2(v_1, v_2, c_1, c_2)) \end{cases}$$

ergeben. Setzt man nun für c_1 und c_2 beliebige specielle Werthepaare, so erhält man die particulären Integralsysteme

$$(265.)\quad \begin{cases} Z_1^{(1)} = F_1(z_1, z_2, \omega_1(v_1, v_2, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}), \omega_2(v_1, v_2, c_1^{(1)}, c_2^{(1)})), \\ Z_2^{(1)} = F_2(z_1, z_2, \omega_1(v_1, v_2, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}), \omega_2(v_1, v_2, c_1^{(1)}, c_2^{(1)})), \\ Z_1^{(2)} = F_1(z_1, z_2, \omega_1(v_1, v_2, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}), \omega_2(v_1, v_2, c_1^{(2)}, c_2^{(2)})), \\ Z_2^{(2)} = F_2(z_1, z_2, \omega_1(v_1, v_2, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}), \omega_2(v_1, v_2, c_1^{(2)}, c_2^{(2)})), \end{cases}$$

und durch Elimination von z_1 und z_2 zwischen den je drei Gleichungen, indem man v_1 und v_2 als Parameter betrachtet,

$$(266.)\quad Z_1 = \Phi_1(Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, C_1, C_2),\quad Z_2 = \Phi_2(Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}, C_1, C_2),$$

woraus folgt,

dass, wenn das System von Differentialgleichungen (259.) *für ein System seiner Integrale ein zum Geschlechte 1 gehöriges Functionaltheorem besitzen soll, das allgemeine Integral für eine jede der beiden abhängigen Variabeln eine algebraische Function zweier entsprechender particulärer Integrale und zweier willkürlicher Constanten sein muss.*

Untersuchen wir nun, wie ein System von zwei Differentialgleichungen (259.) beschaffen sein müsse, damit zwischen den allgemeinen Integralen, zwei Systemen von zwei particulären Integralen und zwei willkürlichen Constanten zwei algebraische Beziehungen von der Form

$$(267.)\qquad z_1 = \Phi_1(z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, c_1, c_2), \qquad z_2 = \Phi_2(z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, c_1, c_2)$$

stattfinden können. Setzen wir diese Beziehungen in (259.) ein und berücksichtigen, dass auch $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$ und $z_1^{(2)}$, $z_2^{(2)}$ Integrale desselben Systems von Differentialgleichungen sind, so ergiebt sich

$$(268.)\qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1^{(1)}}\varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1^{(2)}}\varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) = \varphi_1(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2),$$

$$(269.)\qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2^{(1)}}\varphi_2(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2^{(2)}}\varphi_2(u_1, u_2, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) = \varphi_2(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2),$$

und diese beiden Gleichungen werden wieder aus Gründen, die oben wiederholt dargelegt worden, in allen von ihnen eingeschlossenen Grössen identische sein. Differentiirt man nun (268.) nach c_1 und c_2, so ergiebt sich

$$(270.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^{(1)}\partial c_1}\varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) + \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^{(2)}\partial c_1}\varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \\ = \dfrac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_1}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial c_1} + \dfrac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_2}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial c_1}, \end{cases}$$

$$(271.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^{(1)}\partial c_2}\varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) + \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^{(2)}\partial c_2}\varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \\ = \dfrac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_1}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial c_2} + \dfrac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_2}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial c_2}, \end{cases}$$

und hieraus folgt

$$(272.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\left[\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial c_2}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial c_1} - \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial c_2}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial c_1}\right]}{\left(\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial c_2}\right)^2}\dfrac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_2} \\ = \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})\dfrac{\partial}{\partial z_1^{(1)}}\left[\dfrac{\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial c_1}}{\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial c_2}}\right] + \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(2)}, z_2^{(2)})\dfrac{\partial}{\partial z_1^{(2)}}\left[\dfrac{\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial c_1}}{\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial c_2}}\right]. \end{cases}$$

Differentiirt man ferner die Gleichung (268.) nach $z_2^{(1)}$, so ergiebt sich

$$(273.)\qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_2^{(1)}}\cdot\frac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_2} = \frac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})}{\partial z_2^{(1)}}\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1^{(1)}},$$

und differentiirt man endlich (268.) nach $z_1^{(1)}$, so folgt

$$(274.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1^{(1)}} \frac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})}{\partial z_1^{(1)}} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^{(1)2}} \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \\ \qquad + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_1^{(1)} \partial z_1^{(2)}} \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \\ = \frac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1^{(1)}} + \frac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial \Phi_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_1^{(1)}}, \end{cases}$$

oder vermöge (272.) und (273.)

$$(275.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})}{\partial z_2^{(1)}} + \Omega_{11}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, c_1, c_2) \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \\ \qquad + \Omega_{12}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, c_1, c_2) \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) = 0 \end{cases}$$

und ähnlich

$$(276.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})}{\partial z_1^{(1)}} + \Omega_{21}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, c_1, c_2) \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \\ \qquad + \Omega_{22}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, c_1, c_2) \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) = 0, \end{cases}$$

und diese Gleichungen müssen wiederum identisch bestehen. Betrachtet man nun $z_1^{(2)}$ und $z_2^{(2)}$ als Parameter und stellt die beiden Gleichungen (275.) und (276.) abgekürzt in der Form dar

$$(277.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})}{\partial z_1^{(1)}} + \omega_{11}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \\ \qquad + \omega_{12}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \psi_1(u_1, u_2) = 0, \end{cases}$$

$$(278.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})}{\partial z_2^{(1)}} + \omega_{21}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \\ \qquad + \omega_{22}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \psi_1(u_1, u_2) = 0, \end{cases}$$

so sieht man unmittelbar, dass, wenn man

$$\frac{\varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})}{\psi_1(u_1, u_2)} = \chi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})$$

setzt, die aus den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \chi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})}{\partial z_1^{(1)}} + \omega_{11}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \chi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) + \omega_{12}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) = 0,$$

$$\frac{\partial \chi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)})}{\partial z_2^{(1)}} + \omega_{21}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \chi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) + \omega_{22}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) = 0$$

hervorgehende Function χ_1 die Form von φ_1 so bestimmt, dass

$$(279.)\quad \varphi_1(u_1, u_2, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) = \omega_1(u_1, u_2) T_{11}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) + \psi_1(u_1, u_2) T_{12}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})$$

wird, und ebenso aus (269.)

$$(280.)\quad \varphi_2(u_1, u_2, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) = \omega_2(u_1, u_2) T_{21}(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) + \psi_2(u_1, u_2) T_{22}(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}).$$

Es werden somit die Differentialgleichungen (259.) die Gestalt annehmen

$$(281.)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{du_1} = \omega_1(u_1, u_2)\,T_{11}(z_1, z_2) + \psi_1(u_1, u_2)\,T_{12}(z_1, z_2), \\ \dfrac{dz_2}{du_1} = \omega_2(u_1, u_2)\,T_{21}(z_1, z_2) + \psi_2(u_1, u_2)\,T_{22}(z_1, z_2), \end{cases}$$

und daher für die drei Integralsysteme z_1, z_2; $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$; $z_1^{(2)}$, $z_2^{(2)}$ die Beziehungen gelten

$$(282.)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} dz_1 & T_{11}(z_1, z_2) & T_{12}(z_1, z_2) \\ dz_1^{(1)} & T_{11}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) & T_{12}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \\ dz_1^{(2)} & T_{11}(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) & T_{12}(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} dz_2 & T_{21}(z_1, z_2) & T_{22}(z_1, z_2) \\ dz_2^{(1)} & T_{21}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) & T_{22}(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}) \\ dz_2^{(2)} & T_{21}(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) & T_{22}(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}) \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

welche nach (267.) durch die algebraischen Gleichungen

$$(283.)\quad z_1 = \Phi_1(z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, c_1, c_2), \quad z_2 = \Phi_2(z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, c_1, c_2)$$

befriedigt werden. Setzt man nun z_2, $z_2^{(1)}$, $z_2^{(2)}$ gleich Constanten, so bleibt nur die erste der Differentialgleichungen (282.) in der Form

$$(284.)\quad \begin{vmatrix} dz_1 & t_{11}(z_1) & t_{12}(z_1) \\ dz_1^{(1)} & t_{11}(z_1^{(1)}) & t_{12}(z_1^{(1)}) \\ dz_1^{(2)} & t_{11}(z_1^{(2)}) & t_{12}(z_1^{(2)}) \end{vmatrix} = 0$$

durch eine Gleichung, welche in Folge der Festsetzung der Werthe für z_2, $z_2^{(1)}$, $z_2^{(2)}$ nur noch eine willkürliche Constante enthält,

$$(285.)\quad z_1 = \Phi(z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, c)$$

zu befriedigen. Nun habe ich aber nachgewiesen *), dass die Differentialgleichung (284.) nur dann (285.) zum allgemeinen Integrale haben kann, wenn die erste Gleichung (281.) durch eine algebraische Substitution für z_1 in eine in der neuen Variablen lineare Differentialgleichung erster Ordnung übergeht, und da dasselbe für die zweite Differentialgleichung (281.) gültig bleibt, so folgt, dass sich statt z_1 und z_2 zwei algebraisch mit diesen Grössen verbundene Variable t_1 und t_2 einführen lassen müssen, für welche jene Differentialgleichungen die Form annehmen:

---

*) Vergl. meine oben angeführte Arbeit in den Acta Mathematica und meine „Allg. Untersuchungen" S. 100.

$$(286.)\quad \begin{cases} \dfrac{dt_1}{du_1} = \pi_1(u_1, u_2)t_1 + \pi_2(u_1, u_2)t_2, \\ \dfrac{dt_2}{du_1} = \varrho_1(u_1, u_2)t_1 + \varrho_2(u_1, u_2)t_2. \end{cases}$$

In der That finden zwischen dem allgemeinen Integrale und zwei Paaren particulärer Integrale der Differentialgleichungen (286.) die Beziehungen statt

$$(287.)\quad t_1 = c_1 t_1^{(1)} + c_2 t_1^{(2)}, \quad t_2 = c_1 t_2^{(1)} + c_2 t_2^{(2)},$$

und es werden somit z_1 und z_2 algebraische Functionen von Integralen linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung sein

$$(288.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2t_1}{du_1^2} + \Omega_{11}(u_1, u_2)\dfrac{dt_1}{du_1} + \Omega_{12}(u_1, u_2)t_1 = 0, \\ \dfrac{d^2t_2}{du_1^2} + \Omega_{21}(u_1, u_2)\dfrac{dt_2}{du_1} + \Omega_{22}(u_1, u_2)t_2 = 0; \end{cases}$$

ausserdem wird die Existenz eines Functionaltheorems der Form (260.) ein analoges Theorem

$$(289.)\quad T_1 = \Pi_1(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2), \quad T_2 = \Pi_2(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$$

erfordern.

Nur in einem Falle verlieren die vorigen Schlüsse ihre Gültigkeit, wenn nämlich die Variable u_2 in den Differentialgleichungen (259.) nicht explicite enthalten ist; denn dann wird eine der Integrationsconstanten der vom expliciten v_2 freien Differentialgleichungen (261.) die Variable v_2 selbst sein, da ja ζ_1 und ζ_2 von dieser Variablen abhängen, und man wird daher mit Beibehaltung der Werthe von v_1 und v_2 in der Gleichung (264.) für die allgemeinen Integrale des Systemes (261.) nur eine willkürliche Constante in den ω-Functionen der Gleichungen (265.) erhalten; somit schliessen die Ausdrücke für Z_1 und Z_2 in (266.) auch nur *eine* willkürliche Constante ein, und es folgt,

dass, wenn das System von Differentialgleichungen (259.), *unter der Beschränkung, dass u_2 nicht explicite in ihnen vorkommen soll, ein zum Geschlechte 1 gehöriges Functionaltheorem besitzt, das allgemeine Integral in Bezug auf jede der Variabeln eine algebraische Function zweier entsprechender particulärer Integrale erster Ordnung (mit derselben einen Constanten) und einer willkürlichen Constanten sein muss* —

man sieht unmittelbar, dass dies in der That bei der Differentialgleichung, der $al(u_1, u_2)$ genügt, der Fall ist, und dass die andere Integrationsconstante additiv zum Argumente u_1 hinzutritt.

Was nun die Integrale t_1 und t_2 der linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (288.) betrifft, so schliesst man genau wie früher, dass einerseits die das Functionaltheorem darstellenden Gleichungen (289.) wieder lineare sein müssen, andererseits ein solcher linearer Ausdruck die Elimination einer der Grössen t_1, t_2, τ_1, τ_2 aus dem Functionaltheorem gestatten und somit dasselbe auf einen früheren Fall zurückführen würde, dessen Unmöglichkeit oben bewiesen wurde. Was endlich den eben erwähnten Ausnahmefall angeht, so sieht man wiederum mit Hülfe von Methoden, die oben auseinandergesetzt und vielfach angewandt wurden, dass man nur auf solche Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung geführt wird, welche durch eine algebraische Substitution aus denjenigen abgeleitet sind, welche die *Abel*schen Functionen mit zwei Variabeln definiren, und man gelangt somit, wie oben für Functionen *einer* Variabeln, jetzt zu dem allgemeinen Satze:

Die einzigen Functionen, für welche Functionaltheoreme im oben angegebenen Sinne existiren, sind die Abelschen Integrale und die Umkehrungsfunctionen derselben, sowie die durch algebraische Transformationen aus diesen abgeleiteten.

Heidelberg, im November 1885.

Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

Für die Centrafläche des Ellipsoides oder die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse haben *Clebsch* und Herr *Fiedler* *) die Gleichung in eleganter Form aufgestellt. Die analytischen Operationen, welche beide ausführen, sind identisch mit denjenigen, welche man zur Herstellung der Gleichung der Abwickelbaren einer Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art nöthig hat. In der That geht bei Einführung eines besonderen Coordinatensystems die Gleichung der Abwickelbaren in diejenige der desmischen Fläche dadurch über, dass man an Stelle der Coordinaten deren Quadrate einsetzt. Diese Bemerkung hat wohl zuerst Herr *Salmon* gemacht **). In dem vorliegenden Aufsatze gedenke ich den Zusammenhang zwischen beiden Flächen auf synthetischem Wege klar zu legen. Vorausgeschickt werden muss jedoch eine eingehende Theorie der Curve vierter Ordnung; denn, obgleich eine Reihe wichtiger Sätze über diese Curve bekannt ist, so wurden sie entweder nicht auf rein synthetischem Wege bewiesen, oder sie berühren gerade diejenigen Eigenschaften der Curve nicht, auf welche sich die für uns wichtigen Betrachtungen stützen.

Ausser der grundlegenden Arbeit des Herrn *Cremona* ***), in welcher mit einer überaus fruchtbaren gemischten Methode die Curve discutirt wird, sind als synthetische Arbeiten, deren Resultate sich mittelst der Abbildung

---

*) Vgl. *Salmon-Fiedler:* Anal. Geom. d. R., Aufl. III, S. 337 und *Clebsch:* Dies. Journ. Bd. 62, S. 64.

**) Vgl. eine Notiz in *Salmon-Fiedler* S. 322.

***) *Cremona:* Ann. di Matem., Ser. II, Bd. 4: Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado.

der Curve auf einem Kegelschnitt aufbauen, einige Aufsätze der Herren *Weyr* und *Adler* und eine Arbeit des Herrn *Jolles* zu nennen *).

§ 1.

Construction einer Raumcurve R_6 sechster Ordnung.

1. Zwei kubische Raumcurven C_3 und C_3', welche auf demselben Kegel zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte S liegen, seien der Art projectiv, dass entsprechende Punkte durch die Strahlen des Kegels verbunden werden. Entsprechende Tangenten der Curven liegen in derselben Tangentialebene von $S(C_3)$ und liefern durch ihre Schnittpunkte eine gewisse *Raumcurve* R_6, deren Tangenten die Schnitte entsprechender Schmiegungsebenen der kubischen Curven sind. Entsprechende Sehnen der C_3 und C_3' liegen auf einer durch S gehenden Ebene und schneiden einander in den Punkten einer *Fläche* F_3 *dritter Ordnung*, da diese Fläche auch durch drei collineare Ebenenbündel erzeugt werden kann, deren Mittelpunkte beliebig auf den beiden Curven, jedoch nicht alle auf derselben gewählt werden dürfen. Haben C_3 und C_3' vier sich selbst entsprechende Punkte A, B, C, D, so sind deren sechs Verbindungslinien sich selbst entsprechende Sehnen und liegen auf F_3. Die Punkte A, B, C, D sind Knotenpunkte von F_3. Seien N und N' zwei entsprechende Punkte von C_3 und C_3', so schneiden sich die Kegel $N(C_3)$ und $N(C_3')$ in einer kubischen Raumcurve C_3'', welche projectiv zu C_3 und C_3' dadurch ist, dass die Verbindungsebenen je dreier entsprechenden Punkte dieser Curven den Ebenenbüschel $\overline{NN'}$ beschreiben. Je drei entsprechende Sehnen dieser Curven schneiden sich in einem Punkte von F_3, je drei entsprechende Tangenten in einem Punkte von R_6 und je drei entsprechende Schmiegungsebenen in einer Tangente von R_6. Alle Curven C_3'' enthalten die Punkte A, B, C, D und sind Ordnungscurven eines *Reye*schen Complexes mit dem Tetraeder $(ABCD)$.

Je zwei Curven C_3'' sind durch obige Construction projectiv der Art, dass die Schnitte entsprechender Sehnen auf F_3 liegen; die Verbindungs-

---

*) *Weyr*: Sitzungsberichte der Wien. Akad. Bd. 72 und 73, Ueber d. Abbildung der rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einem Kegelschnitt. *Adler:* Ebenda, Bd. 86, Ueber Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art. *Jolles:* Die Raumcurve vierter Ordnung II. Species synthetisch behandelt. Inaugural-Dissertation. Dresden 1883.

linien entsprechender Punkte bilden einen Complexkegel, in dessen Spitze sich die Curven schneiden. Es haben je zwei C_3'' ausser A, B, C, D noch einen Punkt gemein und sie werden von allen übrigen C_3'' in projectiven Punktreihen geschnitten, deren Verbindungsstrahlen einen Kegel zweiter Ordnung bilden. Alle diese Curven liegen auf F_3. Für die Curve R_6 sind die Punkte A, B, C, D stationäre Punkte oder Spitzen, weil durch jeden drei unendlich nahe Tangenten von R_6 gehen. Die Schmiegungsebenen sämmtlicher C_3 in dem Punkte A schneiden sich in einem Strahle des die Fläche F_3 daselbst berührenden Kegels und dieser Strahl ist Rückkehrtangente von R_6. Von jedem der Punkte A, B, C, D wird R_6 projicirt durch einen Kegel vierter Ordnung dritter Klasse, dessen Strahlen die Schnitte entsprechender Ebenen projectiver Büschel zweiter Ordnung sind.

2. Dem Schnittpunkte S zweier Curven C_3 und C_3' entspricht in der projectiven Beziehung auf C_3 ein Punkt G, in welchem R_6 von C_3 berührt wird, da eine Schmiegungsebene von C_3' in S den Kegel $S(C_3)$ längs $\overline{GS}$ berührt. Die Schmiegungsebene von C_3 in G enthält noch eine unendlich nahe Tangente von C_3 und deshalb noch einen weiteren unendlich nahen Punkt von R_6. R_6 wird von allen C_3 berührt und hat mit jeder C_3 dieselbe Schmiegungsebene in dem Berührungspunkte. Die Tangenten von R_6 gehören einem *Reye*schen Complexe mit dem Tetraeder $(ABCD)$ an. Der Kegel, durch welchen C_3 von G aus projicirt wird, berührt F_3 längs C_3. Die Schmiegungsebene von C_3 in G ist deshalb Tangentialebene von F_3 in demselben Punkte. Die Schmiegungsebenen von R_6 sind Tangentialebenen von F_3 in den Punkten, in welchen sie R_6 osculiren, d. h. *die Curve R_6 ist Haupttangentencurve von F_3.*

3. Die Curve R_6 liegt auf einer bestimmten Fläche zweiten Grades β, welche mit der von den Tangenten einer C_3 gebildeten Fläche einen Kegelschnitt gemein hat.

Die Curven C_3 und C_3' mögen R_6 berühren in den Punkten G und G'; die Schmiegungsebene von C_3 in G schneide die Tangentenfläche von C_3 in dem Kegelschnitte λ, diejenige von C_3' in G' schneide die Tangentenfläche von C_3' in λ'. Von dem Schnittpunkte S der C_3 und C' werden die Kegelschnitte λ und λ' durch zwei Kegel projicirt, von welchen jeder den Kegel $S(C_3C_3')$ längs der Strahlen $\overline{SG}$ und $\overline{SG'}$ berührt. Wir zeigen, dass $S(\lambda)$ und $S(\lambda')$ identisch sind. Zu diesem Zwecke beziehen wir C_3 und C_3' der Art projectiv auf einander, dass dem Punkte G von C_3 der Punkt G' von

C_3' und S sich selbst entspricht. Dadurch ist eine collineare Raumtransformation hergestellt, in welcher λ und λ' einander zugeordnet sind. Der Kegel $S(C_3 C_3')$ entspricht sich selbst involutorisch, da $\overline{SG}$ und $\overline{SG'}$ einander in doppelter Weise zugeordnet sind. Jeder Kegel zweiter Ordnung von S, welcher $S(C_3 C_3')$ in den Strahlen $\overline{SG}$ und $\overline{SG'}$ berührt, entspricht sich selbst, und deshalb sind die Kegel $S(\lambda)$ und $S(\lambda')$ identisch.

Jede Curve C_3 liefert einen Kegelschnitt λ, je zwei derselben liegen auf einem Kegel, und es liegen somit alle diese Kegelschnitte auf einer Fläche zweiter Ordnung β. Alle Schnitte von R_6 mit der Ebene eines λ liegen auf λ selbst, d. h. R_6 liegt auf β. ***R_6 entsteht als Schnitt einer Fläche dritter Ordnung F_3 mit einer Fläche zweiter Ordnung β und ist deshalb sechster Ordnung.***

4. Die Schnittgerade der Ebenen λ und λ' liegt auf der Polarebene des Punktes S bezüglich β. Die Polarebenen aller Punkte von C_3 bezüglich β schneiden die Ebene λ in denselben Geraden, in welchen diese Ebene von allen übrigen Schmiegungsebenen der R_6 getroffen wird. Diese Geraden umhüllen deshalb eine Curve ϱ_4^3 dritter Klasse vierter Ordnung mit einer Doppeltangente, welche eine Axe des zu C_3 bezüglich β reciproken Ebenenbüschels ist. Die Doppeltangenten zweier verschiedenen ϱ_4^3 werden durch die Schnitte mit den Schmiegungsebenen von R_6 projectiv auf einander bezogen. ***Die Schmiegungsebenen von R_6 umhüllen eine Fläche zweiten Grades, deren eine Schaar aus den Doppeltangenten aller ϱ_4^3 besteht. Durch jede Gerade dieser Schaar gehen drei Schmiegungsebenen von R_6, durch jede Gerade der zweiten Schaar nur eine. R_6 ist eine Curve vierter Klasse.***

5. Die in Bezug auf β zu R_6 ***reciproke Curve R_4 ist vierter Ordnung sechster Klasse;*** sie liegt auf einer Fläche β_1 zweiter Ordnung und ihre Schmiegungsebenen berühren β. Jeder Curve C_3 ist ein Punkt von R_4 zugeordnet, welcher der gemeinsamen Schmiegungsebene von C_3 und R_6 entspricht. Die beiden Kegel, durch welche von diesem Punkte aus C_3 und R_4 projicirt werden, sind identisch. Die Doppelgerade desselben ist dreifache Sehne von R_4 und einfache von C_3.

Die eine Schaar von β_1 besteht deshalb aus Geraden des Complexes, zu welchem die Tangenten von R_6 gehören und dessen Tetraeder $(ABCD)$ ist. Die Tangenten von R_4 liegen in einem zweiten *Reye*schen Complexe, dessen Tetraeder durch die vier stationären Ebenen von R_4 gebildet wird.

*R_4 ist Haupttangentencurve einer **Steinerschen** Fläche, deren vier singuläre Ebenen stationär sind für R* *).

§ 2.

Die rationale Raumcurve R_4 vierter Ordnung.

6. Wir gehen über zur Betrachtung einer *beliebigen rationalen Raumcurve R_4 vierter Ordnung,* von welcher wir wissen, dass sie aus irgend zwei ihrer Punkte durch projective rationale Kegel dritter Ordnung projicirt wird. Die Curve R liegt dann auf einer Fläche zweiter Ordnung. Es soll bewiesen werden, dass *die Schmiegungsebenen der R_4 eine zweite Fläche zweiter Ordnung berühren und zwar in den Punkten einer Curve sechster Ordnung R_6, wie wir sie in § 1 construirt haben.* Zu diesem Zwecke betrachten wir den Schnitt einer beliebigen Ebene ν mit den sämmtlichen Schmiegungsebenen von R_4 und den sämmtlichen Kegeln dritter Ordnung, welche R_4 projiciren. Zwei der Curven γ_3 und γ'_3, welche die Projectionen auf ν von R_4 aus ihren Punkten S und S' sein mögen, sind projectiv auf einander bezogen durch Vermittelung der R_4. Entsprechende Punkte von γ_3 und γ'_3 sind verbunden durch Strahlen eines Büschels erster Ordnung, dessen Mittelpunkt P auf $\overline{SS'}$ liegt und den Curven γ_3 und γ'_3 gemein ist. Entsprechende Tangenten von γ_3 und γ'_3 treffen sich in den Punkten der Curve ϱ, in welcher ν die Abwickelbare von R_4 schneidet. Wir projiciren von einem beliebigen Punkte T ausserhalb ν die Curve γ_3 in eine kubische Raumcurve c_3. Trifft $\overline{TP}$ die c_3 in P_1, so ist der Kegel $P_1(c_3)$ perspectiv zu c_3. Der Kegel $P_1(c_3)$ ist nun auch projectiv zu dem Kegel $T(\gamma'_3)$ der Art, dass entsprechende Strahlen beider Kegel sich schneiden. Der Ort der Schnittpunkte ist eine zweite kubische Raumcurve c'_3. Es sind sonach γ_3 und γ'_3 Bilder zweier kubischen Raumcurven, welche auf demselben Kegel zweiter Ordnung liegen, durch dessen Strahlen sie projectiv auf einander bezogen werden. Die Schnittpunkte entsprechender Tangenten von c_3 und c'_3 liefern eine R_6, deren Bild auf ν der Schnitt der Abwickelbaren von R_4 mit ν ist. Die sämmtlichen Curven γ_3 in ν sind Bilder der die R_6 einhüllenden kubischen Raumcurven. *Jeder ebene Schnitt ϱ_6 der Abwickelbaren von R_4 kann somit als das perspective Bild von unendlich vielen R_6 betrachtet werden.*

---

*) Die Umkehrung dieses Satzes ist bekannt.

7. Die Curven c_3 berühren R_6 in Punkten, für welche die Schmiegungsebenen von c_3 und R_6 zusammenfallen. Die Abwickelbaren der c_3 schneiden diese Ebenen in Kegelschnitten, welche der durch R_6 gelegten Fläche zweiter Ordnung angehören. Da zwei dieser Kegelschnitte λ und λ' von dem Schnittpunkt der zugehörigen Raumcurven c_3 und c_3' durch denselben Kegel projicirt werden, so lassen sich durch $\overline{TP}$ zwei reelle oder imaginäre λ und λ' berührende Ebenen legen. Die Kegelschnitte $\lambda, \lambda', \ldots$ projiciren wir von T aus auf die Ebene ν, wodurch wir jedem Punkte $S, S', \ldots$ von R_4 einen Kegelschnitt $\lambda_1, \lambda_1', \ldots$ zuweisen. Zwei der Kegel $S(\lambda_1)$, $S'(\lambda_1')$ haben zwei gemeinsame Tangentialebenen, welche sich in der Geraden $\overline{SS'P}$ schneiden, und es umhüllen somit alle Kegel $S(\lambda_1), \ldots$ *eine Fläche zweiter Ordnung* β. Eine Curve λ_1 berührt zweimal den Schnitt von β mit ν und hat mit ϱ_6 eine Berührung zweiter Ordnung in dem Schnittpunkte von ν mit der Tangente von R_4 in S. Die Schmiegungsebene von R_4 in S berührt deshalb den Kegel $S(\lambda_1)$ und folglich auch β. Dadurch ist erwiesen, dass *alle Schmiegungsebenen einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung eine Fläche zweiter Ordnung berühren* *).

8. Wir wollen nun zeigen, dass R_4 *auch reciprok ist einer* R_6.

Der Ort der Berührungspunkte der Schmiegungsebenen von R_4 mit β sei die Curve L, welche reciprok zu R_4 hinsichtlich β ist. Auf jeder Tangente von R_4 liegt der ihr entsprechende Punkt von L. Einem Punkte S von R_4 entspricht eine Schmiegungsebene σ von L, welche β in einem auf $S(\lambda_1)$ liegenden Kegelschnitt μ_2 schneidet. Der Kegel $S(R_4)$ ist der Art projectiv auf μ_2 und L bezogen, dass jede Tangentialebene des Kegels die ihr entsprechenden Punkte der Curven enthält. Reciprok finden wir: eine Schmiegungsebene σ von L wird von allen übrigen geschnitten in den Tangenten einer Curve vierter Ordnung dritter Klasse, in deren Punkten entsprechende Tangenten von μ_2 und L zusammenstossen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte von μ_2 und L sind daher Erzeugende einer abwickelbaren Fläche, welche von S aus durch die Tangentialebenen des Kegels $S(R_4)$ projicirt werden. Die Rückkehrcurve u dieser Fläche liegt auf dem Kegel $S(R_4)$ und ist durch dessen Strahlen eindeutig so auf R_4 bezogen, dass entsprechende Tangenten von u und R_4 sich auf L treffen. Aus einem zweiten Punkte S' von R_4 leiten wir ebenso einen Kegelschnitt

*) Vgl. *Cremona* a. a. O.

μ'_2 und eine Curve u' ab, welche auf $S'(R_4)$ liegt und ihre Tangenten durch L schickt. u und u' sind durch Vermittelung der R_4 eindeutig so auf einander bezogen, dass entsprechende Punkte in einer Ebene mit $\overline{SS'}$ liegen und entsprechende Tangenten sich auf L schneiden. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte von u und u' bilden daher eine abwickelbare Fläche und schneiden sämmtlich die Gerade $\overline{SS'}$. Da nun u und u' nicht in einer Ebene liegen können, so ist die fragliche Fläche ein Kegel, dessen Spitze P auf $\overline{SS'}$ liegt und dessen Tangentialebenen entsprechende Punkte von μ_2 und μ'_2 enthalten. Der Kegel P besteht aus diesem Grunde aus Tangenten der Fläche χ_4, deren Strahlen entsprechende Punkte von μ_2 und μ'_2 verbinden. Die Gerade $\overline{SS'}$ kann dem Kegel P nicht angehören, da durch $\overline{SS'}$ vier von einander verschiedene Tangentialebenen an χ_4 gehen. Diese sind die Ebenen, welche $\overline{SS'}$ verbinden mit den Tangenten von R_4 in S und S' und denjenigen, welche von $\overline{SS'}$ ausserdem getroffen werden. Um P zu bestimmen, betrachten wir den Punkt V, in welchem μ_2 und L einander osculiren und welchen sie entsprechend gemein haben. Die gemeinsame Tangente von μ_2 und L in V schneidet die ihr entsprechende Tangente von μ'_2 und bestimmt mit ihr eine Ebene, welche $\overline{SS'}$ in Q treffen möge. Q gehört der Curve u' an und $\overline{QV}$ ist Tangente von u' in diesem Punkte. Würde aber P nicht mit Q zusammenfallen, so müsste $\overline{PQ}$ oder $\overline{SS'}$ eine Tangente von χ_4 sein, was nicht möglich ist.

Nun ist P Spitze eines Kegels zweiter Ordnung, auf welchem μ_2 und μ'_2 liegen, weil P mit zwei Tangenten dieser Curven in einer Ebene liegt und ausserdem $\overline{SS'}$ dem Schnitte der Ebenen von μ_2 und μ'_2 bezüglich β reciprok ist. Die Strahlen von χ_4 werden von P durch die Ebenen eines Kegels zweiter Ordnung projicirt, auf welchem u und u' liegen. Die Curven u und u' entstehen als Schnitte entsprechender Strahlen der projectiven Kegel $P(uu')$ mit $S(R_4)$ resp. $S'(R_4)$ und können somit durch die Schnitte dreier projectiven Ebenenbüschel erster Ordnung erzeugt werden. Es sind deshalb u und u' kubische Raumcurven und erzeugen in den Schnitten entsprechender Tangenten eine Raumcurve R_6, welche bezüglich β reciprok ist zu R_4.

§ 3.

Die Doppelcurven der Abwickelbaren von R_6 und R_4.

9. Aus den Sätzen, welche ich in einem früheren Aufsatze *) für solche Curven bewiesen habe, welche auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen und deren Schmiegungsebenen eine zweite Fläche zweiter Ordnung umhüllen, folgt, dass die *Doppelcurve der Abwickelbaren von R_6 einer Fläche zweiten Grades angehört,* welche wir in folgender Weise finden.

Durch die projective Beziehung zwischen zwei kubischen Raumcurven C_3 und C_3', welche R_6 einhüllen, ist eine räumliche Collineation, welche den Complex K bestimmt, gegeben. Alle C_3 sind Ordnungscurven dieses Complexes. Die Axen von C_3, welche dem Complex angehören, werden von den ihnen entsprechenden Axen der C_3' in Punkten geschnitten, in welchen je zwei Schmiegungsebenen von C_3 mit ihren entsprechenden von C_3' zusammenstossen. In einem solchen Punkte T_1 treffen einander demnach zwei verschiedene Tangenten von R_6, und er liegt deshalb auf der Doppelcurve D_4 der Abwickelbaren von R_6. Werden in den Nullsystemen, welche C_3 und C_3' bestimmen, zu den in T_1 sich treffenden Axen von K die reciproken Sehnen von C_3 resp. C_3' construirt, so sind diese in der räumlichen Collineation einander entsprechend und schneiden sich in einem Punkte T der Fläche F_3. In dem Punkte T treffen einander entsprechende Sehnen aller C_3 und in T_1 entsprechende Axen, welche den Sehnen bezüglich der durch die C_3 bestimmten Nullsysteme reciprok sind **). Die Gerade $\overline{TT_1}$ ist Leitgerade für alle diejenigen Nullsysteme, für welche die C_3 Ordnungscurven sind. Die Gesammtheit der Geraden $\overline{TT_1}$ ist deshalb eine Regelschaar zweiten Grades, welche durch drei der Nullsysteme bestimmt ist und auf deren Fläche die Doppelcurve D_4 der Abwickelbaren von R_6 liegt. Die Regelschaar ist bestimmt durch die vier Tangenten von R_6 in den Punkten A, B, C, D.

10. Die Fläche γ der Regelschaar schneidet F_3 in einer Curve c_6 sechster Ordnung, welche punktweise eindeutig auf D_4 bezogen ist, so dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte Strahlen dieser Regelschaar sind.

Jeder Strahl enthält drei Punkte von c_6 und folglich auch drei Punkte von D_4. Eine C_3 schneidet γ, abgesehen von den Punkten $A, B, C, D,$ in

*) Vgl. dieses Journal Bd. 99, S. 154.

**) Vgl. die Betrachtungen des Herrn *Reye* über coll. Räume, Geom. d. Lage Bd. II, S. 135.

zwei Punkten von c_6, deren entsprechende Punkte auf D_4 durch die gemeinschaftliche Tangente von C_3 und R_6 verbunden werden.

Die Curve D_4 liegt noch auf einfach unendlich vielen unter einander collinearen Flächen, welche von denjenigen Axen je einer C_3 gebildet werden, die dem Complexe K angehören. Wir bestimmen zunächst eine solche Fläche.

11. Der Complex K wird durch das zu C_3 gehörende Nullsystem N in einen zweiten Complex K' übergeführt, welchem sämmtliche Axen von C_3 angehören. Beide Complexe schneiden sich in dem Strahlensysteme S zweiter Ordnung und Klasse, welches N mit K bestimmt und in einem anderen Strahlensysteme S_1 zweiter Ordnung und Klasse, welches in einem zweiten Nullsysteme N_1 liegt.

Es schneiden sich in der That zwei beliebige Complexe K und K', welche das zu einem Nullsysteme gehörende Strahlensystem S gemein haben, in einem zweiten Strahlensysteme S_1, welches jedem Punkte des Raumes eine den Punkt enthaltende Ebene zuweist. Durch K und K' sind alle durch einen Punkt gehenden, sowie alle in einer Ebene liegenden Strahlen gepaart. Die Strahlen l und l_1 eines Paares sind einander conjugirt bezüglich der Complexkegel von K und K' mit der Spitze (ll_1) und bezüglich der Complexcurven von K und K' in der Ebene (ll_1). Es schneidet nämlich jede Gerade des Paares die beiden Polaren, welche der anderen Geraden bezüglich K und K' zugewiesen sind. Das Paar ll_1 trennt harmonisch die beiden Ebenen π und π_1, welche in S und S_1 dem Punkte (ll_1) zugehören und ebenso die zwei Punkte, welche in S und S_1 der Ebene (ll_1) entsprechen. Bewegt sich nun eine Ebene ω um den Punkt P, dem die Ebene π in N zugewiesen ist, so beschreibt der Punkt O, welcher ω in N oder S entspricht, die Ebene π und liegt stets in der Geraden $\overline{\pi\omega}$. In ω liegen allemal zwei durch P gehende Strahlen l und l_1, welche O harmonisch trennen von dem Punkte O_1, der zu ω in S_1 gehört. O_1 liegt daher stets in π_1, derjenigen Ebene, welcher P in S_1 zugewiesen ist. Hierdurch ist erwiesen, dass S_1 in einem Nullsystem N_1 liegt.

12. In unserem Falle liegen die Nullsysteme N und N_1 involutorisch. Jedes wird durch das andere in sich selbst übergeführt, S_1 ändert sich nicht durch diese Transformationen. Bestimmen wir jetzt die sämmtlichen Sehnen von C_3, welche in N_1 und somit auch in S_1 liegen, so erhalten wir bekanntlich eine rationale Regelfläche vierten Grades Φ_4, deren doppeltberührende

Ebenen eine zweite Raumcurve γ_3 umhüllen. Letztere ist ebenfalls Ordnungscurve von N und ist in N_1 der C_3 zugewiesen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte von C_3 und γ_3 sind gleichzeitig die Schnittgeraden entsprechender Schmiegungsebenen. Durch N geht Φ_4 in eine Fläche Φ'_4 über, welche γ_3 zur Doppelcurve hat und deren doppeltberührende Ebenen C_3 umhüllen. Φ'_4 ist der Ort der Axen von C_3, welche dem Complexe K angehören.

13. Je zwei aus verschiedenen C_3 abgeleitete Φ'_4 sind collinear, und entsprechende Strahlen treffen einander in D_4; je zwei Flächen Φ_4 sind ebenfalls collinear und entsprechende Strahlen derselben treffen sich in c_6. Eine Φ_4 hat mit der Regelfläche zweiter Ordnung γ die Raumcurve sechster Ordnung c_6 gemein und deshalb noch einen Kegelschnitt. Da die Fläche γ durch das Nullsystem N sich nicht ändert, so bilden die gemeinsamen Tangentialebenen von γ und Φ'_4 ausser einem Ebenenbüschel sechster Ordnung einen solchen zweiter Ordnung. Letzterer bezieht die Leitstrahlen von γ projectiv auf die Strahlen von Φ'_4 der Art, dass die Schnittpunkte entsprechender Strahlen beider Flächen eine *Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art* bilden. Der vollständige Schnitt von γ mit Φ'_4 besteht aus zwei solchen Curven. ***Diejenige von ihnen, welche die Geraden der Nullsysteme der C_3 zu dreifachen Secanten hat, ist die gesuchte Doppellinie D_4 der Abwickelbaren von R_6.***

14. Die Fläche Φ'_4 ist nicht allgemeiner Natur, sondern dadurch specialisirt, dass C_3 und γ_3 in einem geschaart involutorischen Systeme einander entsprechen. Aus einem Punkte von γ_3 wird diese Curve durch einen zu ihr perspectiven Kegel, hingegen Φ'_4 und folglich auch D_4 durch einen zu ihnen perspectiven Ebenenbüschel zweiter Ordnung projicirt. Je zwei Ebenen des letzteren, welche in einem Strahle des ersten Kegels sich schneiden, haben auf D_4 entsprechende Punkte, deren Tangenten sich treffen. Man erhält so eine Abbildung der D_4 auf einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung oder auch auf einem Kegelschnitte, wie sie von den Herren *Adler* und *Jolles* *) ihren Untersuchungen zu Grunde gelegt worden ist.

Ich will hier von den Eigenschaften der R_6 und D_4 noch folgende hervorheben. Die Tangenten von C_3 in den Punkten A, B, C, D gehören zu Φ_4 und Φ'_4, die Tangentialebenen von Φ'_4 in diesen Punkten sind die Schmie-

---

*) *Adler* und *Jolles* a. a. O.

gungsebenen von C_3. D_4 enthält deshalb diese vier Punkte und wird in ihnen von den Rückkehrtangenten der R_6 berührt. Die Schmiegungsebenen von D_4 und die Tangentialebenen von γ in den Punkten A, B, C, D fallen zusammen, weil D_4 daselbst Erzeugende von γ berührt. Die Schmiegungsebenen von C_3 in A, B, C, D enthalten je noch eine zweite Gerade von Φ'_4, und folglich *sind die Rückkehrtangenten von* R_6 *vier Tangenten von* D_4, *welche mit* D_4 *noch je einen Punkt gemein haben.* Die Tangentialebenen von γ in diesen letzteren Punkten sind die Schmiegungsebenen von R_6 in den Punkten A, B, C, D.

Die Fläche Φ'_4 hat bekanntlich vier singuläre Erzeugende, längs welchen sie von je einer Schmiegungsebene von C_3 berührt wird. Wir finden so in den vier Schnitten dieser Ebenen mit den entsprechenden Schmiegungsebenen der anderen C_3 vier gemeinsame Tangenten von R_6 und D_4. Da nun eine Tangente von D_4 stets der Schnitt zweier Schmiegungsebenen von R_6 ist, *so ergeben sich vier Punkte von* R_6, *deren Tangenten in vier weiteren Schmiegungsebenen liegen.* Die Berührungspunkte dieser Tangenten mit D_4 besitzen *stationäre Schmiegungsebenen,* von welchen jede vier unendlich nahe Punkte von D_4 enthält.

15. Nachdem wir D_4 construirt haben, lassen sich nun auch leicht die doppelt berührenden Ebenen von R_6 und die von diesen eingehüllte Curve finden. Die Doppelcurve D_6 der Abwickelbaren von der zu R_6 bezüglich β reciproken Curve R_4 ist reciprok zu D_4 bezüglich γ.

D_6 berührt deshalb D_4 in den Punkten A, B, C, D und hat dort mit D_4 dieselben Schmiegungsebenen.

Die stationären Ebenen von R_4 sind ferner Schmiegungsebenen von D_6 in Punkten, welche auf den Tangenten von R_4 liegen. Ausserdem schneidet jede stationäre Ebene von R_4 noch einmal D_6.

D_6 ist sechster Ordnung und kann vier stationäre Punkte besitzen. Die Fläche zweiter Ordnung γ_1, welche D_6 enthält, gehört mit β und γ zu einem Büschel *).

§ 4.

Eine Quadrupelanordnung auf den C_3.

16. Durch vier beliebig gegebene Punkte A, B, C, D einer kubischen Raumcurve C_3 sind auf derselben drei Involutionen bestimmt, zu welchen die Paare der vier Punkte gehören. Jede Involution giebt durch Ver-

*) Vgl. dieses Journal Bd. 99, S. 154.

bindung ihrer Punktpaare eine gewisse Regelfläche. Je zwei der Flächen haben eine Sehne von C_3 gemein. Diese Sehnen nennen wir drei conjugirte Sehnen von C_3 oder *Hauptsehnen der Quadrupelanordnung;* sie werden von jedem Curvenpunkte durch ein Poldreikant des Kegels projicirt, auf welchem C_3 liegt.

Nur zwei Hauptsehnen können eigentliche Sehnen sein; alle drei sind reell, wenn die Punkte A, B, C, D reell oder paarweise conjugirt imaginär sind. Bestimmt man zu einem beliebigen Punkte von C_3 die drei Punkte, welche ihm in den Involutionen entsprechen, so ergeben diese vier Punkte wieder dieselben Involutionen. Es ist so eine *Quadrupelanordnung* auf C_3 bestimmt. Wir verbinden irgend drei Punkte M, N, O eines Quadrupels durch eine Ebene π. Sie ist eine Tangentialebene der drei Regelflächen und schneidet diese zum zweiten Male in drei Geraden eines Dreieckes, dessen Ecken auf den Hauptsehnen liegen. Wird π so bewegt, dass sie stets drei Punkte eines Quadrupels verbindet, so beschreiben die Ecken des Dreieckes auf den Hauptsehnen projective Punktreihen. Die Ebene π beschreibt deshalb einen Büschel dritter Ordnung und umhüllt eine kubische Raumcurve c_3, für welche die Hauptsehnen von C_3 Axen sind. Da die drei Schnittpunkte von π mit C_3 auf dieser Curve sich projectiv mit π bewegen, so beschreibt der vierte Punkt P des Quadrupels ebenfalls eine zu π projective Punktreihe auf C_3. Hierdurch ist eine räumliche Reciprocität bestimmt, in welcher jeder Ebene dreier Punkte eines Quadrupels der vierte Punkt desselben zugewiesen ist, und welche deshalb polar ist. Die Hauptsehnen von C_3 entsprechen sich selbst und liegen auf der Fläche zweiter Ordnung F_2, bezüglich welcher C_3 und c_3 polar sind.

17. Wir wollen beweisen, dass C_3 und c_3 Ordnungscurven desselben Nullsystemes sind.

Eine Quadrupelebene (MNO) schneidet die drei Regelflächen der Involutionen in drei Geraden m, n, o, welche durch M, N, O gehen und von P aus die Tangenten des Kegelschnittes sind, in welchem der Kegel $P(C_3)$ die Ebene (MNO) schneidet. Die drei Schnittpunkte $\overline{MN}.o$, $\overline{NO}.m$ und $\overline{OM}.n$ liegen auf einer Geraden u, welche die drei Regelflächen berührt und der Schnitt der Ebene (MNO) mit einer unendlich benachbarten Quadrupelebene ist. u ist deshalb Tangente von c_3. Bewegt sich P auf C_3, so sind die Punkte $\overline{MN}.o$ etc. auf $\overline{MN}$ etc. zu einem Strahlenbüschel erster

Ordnung perspectiv, in dessen Mittelpunkt P' die Schmiegungsebenen von $M, N, O,$ sich treffen. Dies erkennt man sofort, wenn man P in die Punkte M, N, O rücken lässt. P' ist also der Nullpunkt der Ebene (MNO) in dem Nullsysteme von C_3, und die Tangenten von c_3 sind Leitstrahlen desselben.

18. Der Punkt P' liegt auf c_3 und ist bezüglich F_2 der Pol der Schmiegungsebene von C_3 in P. Die Schmiegungsebenen von C_3 in den Punkten eines Quadrupels bilden deshalb ein Poltetraeder für F_2, welches C_3 umbeschrieben und c_3 einbeschrieben ist. Werden diese Tetraeder mittelst des Nullsystemes transformirt, so gehen sie wiederum in Poltetraeder für F_2 über, und wir schliessen daraus, dass in dem Nullsysteme F_2 sich selbst entspricht. Alle Geraden, welche die drei Hauptsehnen von C_3 schneiden, also die Leitschaar von F_2 bilden, sind Strahlen des Nullsystemes.

Wird ein Quadrupeltetraeder auf C_3 als Singularitätentetraeder eines *Reye*schen Complexes, für welchen C_3 Ordnungscurve ist, angenommen, so ist für denselben auch c_3 Ordnungscurve, aber der Art, dass die Axen von c_3 Complexstrahlen sind. Alle *Reye*schen Complexe, deren Tetraeder Quadrupeltetraeder von C_3 sind und welche C_3 zur Ordnungscurve haben, liegen in einem Büschel, dessen Congruenz aus sämmtlichen Sehnen von C_3 und sämmtlichen Axen von c_3 besteht.

19. Wir gehen wieder zurück auf die in § 1 angegebene Construction von R_6. Gegeben seien zwei Curven C_3, welche einen Punkt S gemein haben und dem Tetraeder $(ABCD)$ umbeschrieben sind. Beide liegen auf demselben Complexkegel $S(C_3)$ und sind durch die Strahlen desselben projectiv so auf einander bezogen, dass die hierdurch bestimmte räumliche Collineation den Complex erzeugt. Die Punktpaare A, B und C, D bestimmen auf beiden C_3 Involutionen, welche in der räumlichen Collineation einander entsprechen. Die Regelschaaren, welche aus diesen Involutionen entspringen, entsprechen einander ebenfalls. Ihre Flächen haben ausser den Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ noch zwei Leitgerade gemein, von welchen die eine durch S geht, die andere l_1 aber der Ort der Schnittpunkte entsprechender Regelstrahlen ist und deshalb auf F_3 liegt. Die Quadrupel der beiden C_3, welche durch die Punkte A, B, C, D bestimmt sind, und die zu ihnen gehörenden Hauptsehnen entsprechen einander in oben genannter Collineation. Es entstehen so drei Linien l_1, l_2, l_3 der Fläche F_3, welche

ein Dreieck bilden, dessen Ecken L_1, L_2, L_3 die Schnittpunkte entsprechender Hauptsehnen der C_3 sind.

Für alle C_3, welche R_6 einhüllen, sind durch A, B, C, D Quadrupel bestimmt, deren drei Hauptsehnen durch L_1, L_2, L_3 gehen. Auf den Linien l treffen paarweise die Kanten des Tetraeders $(ABCD)$ ein, so dass die Ebenen desselben die Ebene μ der Linien l in einem Vierseit schneiden, dessen Diagonaldreiseit von den Geraden l gebildet wird. Sucht man den Pol L_4 der Ebene μ hinsichtlich des Tetraeders $(ABCD)$ auf, so findet man, dass F_3 in sich selbst übergeführt wird vermittelst der drei geschaart involutorischen Systeme, deren Axen gegenüberstehende Kanten des Tetraeders $(L_1 L_2 L_3 L_4)$ sind. Dabei gehen die Curven C_3 in einander über, und folglich entspricht R_6 sich selbst in diesen drei geschaart involutorischen Systemen, und die Punkte von R_6 sind hierdurch zu Quadrupeln geordnet *). Das Tetraeder $(L_1 L_2 L_3 L_4)$ ist nun auch Poltetraeder der Fläche β, auf welcher R_6 liegt, und der Fläche zweiter Ordnung, welche von den Schmiegungsebenen von R_6 umhüllt wird.

20. Alle C_3, welche R_6 berühren, haben die Punkte A, B, C, D zu einem gemeinsamen Quadrupel und die Ebene μ zu einer gemeinsamen Quadrupelebene, denn sie berührt die drei zu den Quadrupelanordnungen gehörenden Regelflächen. Der Kegel S, welcher zwei C_3 verbindet, schneidet die Linien l in sechs Punkten, welche sich auf die beiden C_3 vertheilen. Liegt S auf R_6, so vereinigen sich beide C_3, und der Kegel $S(C_3)$ wird von den Linien l_1, l_2, l_3 berührt. S ist deshalb nach No. 17 der vierte Punkt eines Quadrupels von C_3, dessen drei übrige Punkte auf μ liegen.

21. ***Die Flächen F_2 der Hauptsehnen aller C_3 haben $(ABCD)$ zum gemeinsamen Poltetraeder, und der Ort der Pole der Ebene μ hinsichtlich aller F_2 ist die Curve R_6.*** Hierdurch ist das Flächensystem der F_2 vollständig bestimmt. Es gehört einem Flächenbündel an mit den Grundpunkten L_1, L_2, L_3, L_4 und vier weiteren Punkten, welche aus den ersten mittelst des Poltetraeders bestimmt sind. Diese acht Punkte bilden mit den Punkten A, B, C, D eine sogenannte ***desmische Configuration.*** Je zwei der Flächen F_2 sind collinear verwandt. Die einander entsprechenden Tangentialebenen aller F_2 schneiden sich in ***einer*** Geraden, welche dem Complexe K angehört. Der Inbegriff aller dieser Geraden ist ein ***Strahlensystem zweiter***

*) Vgl. *Bertini:* Sulla curva gobba di 4° ordine e 2ª specie. *Weyr* a. a. O. und *Adler*: Wien. Akad. Bd. 84.

Ordnung sechster Klasse *). Die mit demselben die gleiche Brennfläche umhüllenden und ihm gleichartigen Strahlensysteme werden durch die beiden Schaaren von Erzeugenden der F_2 gebildet. Die Brennfläche ist vierter Ordnung zwölfter Klasse und hat die zwölf Punkte der Configuration zu Wendeknotenpunkten. Die Fläche ist symmetrisch bezüglich der drei Tetraeder, deren Ecken die drei Gruppen dieser zwölf Punkte sind. Wir werden uns weiter unten ausführlicher mit der zu dieser Brennfläche reciproken Fläche, welche aus R_4 hervorgeht, beschäftigen.

§ 5.

Die Schaar der Haupttangentencurven von F_3.

22. Jeder *Reye*sche Complex mit dem Singularitätentetraeder $(ABCD)$ giebt Veranlassung zur Construction einer Haupttangentencurve auf F_3. Besonders zeichnen sich hier diejenigen Curven aus, für welche das Doppelverhältniss der Punkte A, B, C, D ein harmonisches oder äquianharmonisches ist. Setzen wir zwei der Punkte A, B, C, D als reell voraus, so kann eine R_6 in folgender Weise construirt werden. R_6 wird von dem Punkte A durch einen Kegel K_4 vierter Ordnung dritter Klasse mit drei Rückkehrkanten und einer Doppeltangentialebene projicirt. Eine beliebige Tangentialebene von K_4 hat mit dem Kegel ausser dem Berührungsstrahle noch zwei Erzeugende gemein. Eine Fläche β zweiter Ordnung, welche diese Erzeugenden enthält, schneidet den Kegel K_4 in einer R_6. Soll β eine Kegelfläche sein, so muss die gewählte Tangentialebene von K_4 die Doppeltangentialebene sein, weil die beiden Erzeugenden zusammenfallen. Diese Ebene berührt K_4 in zwei reellen Strahlen, und folglich sind zwei der Punkte B, C, D imaginär. Es ist aber bekannt, dass in diesem Falle das Doppelverhältniss der zwei Strahlenpaare, von welchen das eine aus den beiden imaginären Rückkehrkanten, das andere aus der reellen Rückkehrkante und einem der Berührungstrahlen der Doppeltangentialebene besteht, ein äquianharmonisches ist. Aus obigen vier Strahlen gehen aber die vier stationären Punkte von R_6 hervor. *Liegt also eine R_6 auf einem Kegel zweiten Grades, so ist das Doppelverhältniss der vier stationären Punkte ein äquianharmonisches und umgekehrt.*

*) Vgl. *Reye:* Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse sechster Ordnung erster Art. Dieses Journal, Bd. 93, S. 81.

Die äquianharmonische R_6 hat ein System dreifach berührender Tangentialebenen, welche einen Kegel zweiter Ordnung umhüllen. Reciprok findet man: *hat die Abwickelbare einer R_4 einen dreifachen Kegelschnitt, so ist für sie das Doppelverhältniss der vier stationären Ebenen ein äquianharmonisches und umgekehrt.*

Wir finden noch leicht Folgendes: Wenn das Doppelverhältniss der Punkte A, B, C, D für eine R_6 ein harmonisches ist, so besitzt R_6 eine Doppelschmiegungsebene, welche durch eine der Geraden l_1, l_2, l_3 geht. Die zweimal berührenden Tangentialebenen von R_6 umhüllen zwei Kegel dritter Ordnung und Klasse, deren Spitzen auf der nämlichen Linie l liegen. Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche von R_6 besteht aus zwei Kegelschnitten, welche einen gemeinsamen Punkt haben. Durch Reciprocität ergeben sich hieraus die analogen Eigenschaften für R_4.

23. Wir betrachten jetzt das System der Flächen zweiter Ordnung β, auf welchen die sämmtlichen Haupttangentencurven der F_3 liegen. Jede Fläche β hat $(L_1 L_2 L_3 L_4)$ zum Poltetraeder und enthält die vier Punkte A, B, C, D. Folglich liegen auf β noch die Punkte A', B', C', D', welche von A, B, C, D durch L_4 und μ harmonisch getrennt sind. Die Tangentialebenen der Flächen β in einem Punkte A beschreiben den Kegel zweiter Ordnung, welcher daselbst sich F_3 anschmiegt. Dieser Kegel (A) enthält die Strahlen $A(BCD)$ und wird in denselben von den Ebenen $A(l_1, l_2, l_3)$ berührt. Die Schnittgerade $\overline{AL_1}$ zweier dieser Ebenen liegt mit $\overline{AB}$ und $\overline{AL_4A'}$ in einer Ebene. Analoges gilt für den Kegel (A'), welcher durch die collineare Involution mit dem Centrum L_4 und der Ebene μ aus (A) hervorgeht und dessen Tangentialebenen die Flächen β in A' berühren. Die Kegel (A) und (A') sind durch die Collineation projectiv, sodass entsprechende Ebenen dieselbe Fläche β berühren. Zwei durch $\overline{AL_4A'}$ gehende Ebenen haben die Kegel entsprechend gemein. Wir finden hieraus, dass das Flächensystem β reciprok ist zu einem schon bekannten von mir früher beschriebenen *). Es hat hiernach folgende Eigenschaften. Die Flächen β bestimmen durch ihre Erzeugenden ein besonderes Strahlensystem vierter Ordnung sechster Klasse, dessen Brennfläche φ vierter Ordnung achter Klasse ist und ausserdem von vier besonderen gleichartigen Strahlensystemen zweiter Ordnung vierter Klasse umhüllt wird. Die Fläche φ hat in $A, B, C, D,$

*) Dieses Journal, Bd. 97, S. 162, § 7.

A', B', C', D' Knotenpunkte, deren Tangentialebenen alle Kegel (A), (A') etc. umhüllen, und besitzt ferner in den Schnitten der sechs Kanten des Tetraeders $(ABCD)$ mit μ Wendeknotenpunkte. Die zwölf Kanten der beiden Tetraeder $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$ sowie die vier Schnittgeraden der Seiten dieser Tetraeder mit μ gehören der φ an. Die letzten vier Geraden sind Tangenten einer Kegelschnittschaar in μ, welche von den Flächen β ausgeschnitten wird. *Jede Fläche β schneidet die Ebene μ und die F_3 in Curven, deren Tangenten demselben Reyeschen Complexe mit dem Tetraeder $(ABCD)$ angehören. Es ist deshalb* (§ 4, 17) *der Schnitt von β mit μ auch der Ort derjenigen Punkte, welche der Ebene μ in den Nullsystemen der C_3 zugeordnet sind.*

24. Durch jeden Punkt des Raumes gehen zwei Flächen β, und jede Ebene wird von dreien derselben berührt.

Unter den β befinden sich drei Ebenenpaare, welche die Linien l zu Doppelgeraden haben und je zwei gegenüberstehende Kanten von $(ABCD)$ enthalten. Unter den Curven R_6 auf F_3 giebt es daher drei, welche aus je drei doppelt zu zählenden Geraden bestehen. *Ferner befinden sich unter den β zwei Kegel mit der Spitze L_4, welche äquianharmonische Curven R_6 liefern.* Schliesslich finden sich drei harmonische Curven R_6, von welchen jede eine Doppelschmiegungsebene besitzt.

25. Es mögen hier die Beweise einiger Sätze folgen, welche Herr *Cremona* zuerst aufgestellt hat*).

Der erste Satz lautet: „Die Schmiegungsebenen von R_4 berühren eine Fläche zweiter Ordnung, deren Tangentialebenen die R_4 in äquianharmonischen Punkten schneiden.“ In § 2 haben wir bewiesen, dass jeder ebene Schnitt ϱ_6 der Abwickelbaren von R_4 das perspective Bild einer R_6 ist. Die vier Schnittpunkte der Ebene mit R_4 sind die Bilder der vier stationären Punkte von R_6. Der von dem Projectionscentrum an die Fläche zweiter Ordnung, auf welcher R_6 liegt, gehende Tangentialkegel schneidet die Ebene von ϱ_6 in einer Curve, welche der von den Schmiegungsebenen der R_4 eingehüllten Fläche zweiten Grades angehört. In dem vorliegenden Falle ist diese Curve ein Linienpaar und folglich die Fläche zweiter Ordnung, auf welcher R_6 liegt, ein Kegel. Das Doppelverhältniss der vier Spitzen von R_6 ist aber dann nach No. 22 ein äquianharmonisches.

*) *Cremona* a. a. O.

Der zweite Satz lautet: „Die Einhüllende einer Ebene, welche R_4 in vier harmonischen Punkten schneidet, ist eine Fläche dritter Klasse, welche der Abwickelbaren von R_4 einbeschrieben ist.“ Die Fläche ist nichts anderes als die *Steiner*sche Fläche, für welche R_4 Haupttangentencurve ist, wie sich wohl am einfachsten durch die bekannte Abbildung dieser Fläche auf eine Ebene ergiebt.

26. Der dritte Satz lautet: „Durch einen beliebigen Punkt der Curve R_4 kann man drei Ebenen legen, welche die Curve in anderen Punkten osculiren. Diese Punkte bestimmen eine Ebene, welche einen Kegel zweiter Ordnung einhüllt.“ Wir betrachten wieder einen beliebigen ebenen Schnitt ϱ_6 der Abwickelbaren von R_4. ϱ_6 sei das perspective Bild von R_6. Die Curven C_3, die R_6 einhüllen, bestimmen einfach unendlich viele Nullsysteme, welche nach No. 9 einem Bündel linearer Complexe angehören. Der Ebene μ entsprechen nach No. 23 bezüglich dieser Nullsysteme die Punkte eines Kegelschnittes, weshalb jedem Punkte bezüglich dieser Nullsysteme die Ebenen eines Büschels zweiter Ordnung zugewiesen sind. Eine Ebene des Kegels, welche zu dem Projectionscentrum T gehört, schneidet die ihr zugeordnete C_3 in drei Punkten, deren Schmiegungsebenen durch T gehen. Da nun die Bilder der C_3 auf der Ebene von ϱ_6 die ebenen Schnitte der Kegel dritter Ordnung sind, durch welche R_4 von den auf ihr liegenden Punkten projicirt wird, so schneiden die in obigem Satze betrachteten Ebenen jede beliebige Ebene in einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Das System der betrachteten Ebenen ist daher ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt, wie man sich leicht überzeugt, der Punkt L_4 ist. —

§ 6.

Die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse.

27. Wir geben zunächst eine Zusammenstellung derjenigen Eigenschaften einer R_4, welche für die Ableitung der desmischen Fläche und der sie doppelt berührenden Strahlensysteme von Wichtigkeit sind. Wir nehmen an, dass die vier stationären Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ von R_4 sämmtlich reell und von einander verschieden seien. Die Punkte, in welchen diese vier Ebenen R_4 berühren, seien A, B, C, D und die Tangenten von R_4 in diesen Punkten a, b, c, d. R_4 ist Haupttangentencurve einer *Steiner*schen Fläche F_4, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ zu singulären Tangentialebenen

hat. Die Kegelschnitte, in welchen F_4 von den Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ berührt wird, tangiren R_4 in den Punkten A, B, C, D. Der Schnittpunkt L_4 der drei Doppelgeraden von F_4 und die drei Punkte L_1, L_2, L_3, welche von L_4 durch gegenüberstehende Kanten des Tetraeders $(\mathfrak{abcd})$ harmonisch getrennt sind, bestimmen ein Tetraeder $(L_1 L_2 L_3 L_4)$, dessen drei Paare Gegenkanten die Axen dreier geschaart involutorischen Systeme sind, in welchen R_4 sich selbst entspricht. Auf der Abwickelbaren Ψ_6 von R_4 liegen einfach unendlich viele kubische Raumcurven C_3, welche mit R_4 je einen Punkt, dessen Tangente und Schmiegungsebene gemein haben. Die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sind Schmiegungsebenen aller dieser C_3. Die Tangenten der C_3 in diesen Ebenen umhüllen den Kegelschnitt der *Steiner*schen Fläche, und die Osculationspunkte liegen auf den Tangenten a, b, c, d der R_4. Die Schmiegungsebenen einer jeden C_3 berühren F_4 in den Punkten eines der beiden Kegelschnitte, in welchen die am Berührungspunkte von C_3 mit R_4 gelegte Tangentialebene von F_4 diese Fläche schneidet. Dieser Kegelschnitt ist Complexcurve eines *Reye*schen Complexes, zu welchem alle Tangenten von R_4 gehören und dessen Tetraeder $(\mathfrak{abcd})$ ist. Die Axen sämmtlicher C_3 gehören diesem Complexe an, und folglich sind auch die Kegelschnitte auf den Abwickelbaren φ_4 dieser C_3 Complexcurven. Je zwei der C_3 sind durch die Schnitte mit den Tangenten von R_4 projectiv auf einander bezogen und haben eine gemeinschaftliche Schmiegungsebene, auf deren Complexcurve entsprechende Tangenten der C_3 sich treffen. Die Verbindungsebenen entsprechender Tangenten zweier C_3 sind Schmiegungsebenen von R_4. Jeder Kegelschnitt einer φ_4 berührt die Fläche Ψ_6 zweimal. Je zwei Schmiegungsebenen von R_4 sind collinear auf einander bezogen, wenn wir die *derselben* C_3 angehörenden Tangenten als entsprechende Geraden der Ebenen ansehen. Die Kegelschnitte der Flächen φ_4 verbinden entsprechende Punkte aller dieser Schmiegungsebenen und letztere schneiden diese Kegelschnitte in projectiven Punktreihen. Sucht man alle Geraden, welche einer beliebigen Geraden einer Schmiegungsebene in diesen Collineationen entsprechen, so bilden diese eine Regelfläche χ_4 vierter Ordnung, welche auch durch Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projectiven Complexkegelschnitte entsteht. Die doppelt berührenden Ebenen von χ_4 bilden einen Ordnungsebenenbüschel des Complexes K und berühren F_4 einfach. Jede χ_4 wird von den Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ längs gerader Linien berührt und hat eine Doppelcurve dritter Ordnung, welche von den

Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in je einem Punkte geschnitten und in einem zweiten berührt wird.

28. Die Curve R_4 liegt auf einer Fläche zweiten Grades β_1 und ihre Schmiegungsebenen tangiren eine zweite Fläche zweiter Ordnung β. Beide haben $(L_1L_2L_3L_4)$ zum Poltetraeder. Die Fläche β wird von den Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in den Punkten A, B, C, D berührt und ist dadurch bestimmt. Die Berührungspunkte der Schmiegungsebenen von R_4 mit β liegen auf einer Curve R_6 sechster Ordnung, welche in A, B, C, D stationäre Punkte besitzt und als vollständiger Schnitt von β mit einer Fläche dritter Ordnung erscheint, für die R_6 eine Haupttangentencurve ist. Durch jeden Punkt des Raumes gehen sechs Schmiegungsebenen von R_4, welche einem Büschel zweiter Ordnung angehören. Die Gleichung sechsten Grades, von welcher die Bestimmung dieser sechs Ebenen abhängt, ist für die Punkte von β algebraisch lösbar mittelst zweier Gleichungen dritten Grades. Die vier Geraden a, b, c, d bestimmen eine Fläche zweiter Ordnung α, welche von den doppelt berührenden Ebenen der R_4 tangirt wird. Die Doppelcurve D_6 der Abwickelbaren Ψ_6 wird von jeder der Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ osculirt in Punkten der Geraden a, b, c, d und einfach berührt in den Punkten A, B, C, D. Die Tangenten von D_6 in diesen Punkten sind bezüglich β reciprok zu a, b, c, d. Ausserdem wird D_6 von jeder Ebene $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ noch in einem Punkte geschnitten. D_6 ist der vollständige Schnitt einer Fläche dritter Ordnung, für welche sie Haupttangentencurve ist, mit einer Fläche γ_1 zweiter Ordnung. Letztere ist bestimmt durch die Bedingungen, dass die drei Flächen γ, γ_1, β einem Büschel und β, β_1, γ_1 einer Schaar angehören *). γ enthält die Tangenten von D_6 in den Punkten A, B, C, D.

29. Die Schmiegungsebenen einer jeden C_3 sind durch die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ zu Quadrupeln geordnet. Je vier Ebenen eines Quadrupels bilden ein Poltetraeder für eine bestimmte Fläche F_2', welche die drei Hauptaxen der Quadrupelanordnung enthält. Alle Flächen F_2' haben $(\mathfrak{abcd})$ zum gemeinsamen Poltetraeder, und die Polarebenen des Punktes L_4 bezüglich dieses Flächensystems sind die Schmiegungsebenen von R_4. Die F_2' berühren die vier Ebenen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, des Tetraeders $(L_1L_2L_3L_4)$ und vier andere Ebenen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, welche von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ durch L_4 und die

---

*) Vgl. dieses Journal, Bd. 99, S. 154.

Ebene λ_4 oder $(L_1 L_2 L_3)$ harmonisch getrennt sind. Die acht Ebenen bilden mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ eine sogenannte desmische Configuration. Durch die projectiven Beziehungen zwischen den C_3, welche durch die Tangenten von R_4 bestimmt werden, sind einfach unendlich viele räumliche Collineationen gegeben, welche den Complex K erzeugen. Die einander entsprechenden Punkte dieser collinearen Räume liegen je auf einem Complexstrahle *). Da in diesen Collineationen die F_2' einander entsprechen, so bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte ein Strahlensystem sechster Ordnung zweiter Klasse, welches in dem Complexe K liegt. Die beiden Schaaren von Erzeugenden der F_2' bilden zwei Strahlensysteme sechster Ordnung zweiter Klasse, welche ebenfalls je einem *Reye*schen Complexe angehören, und zwar liegen die Erzeugenden der F_2', welche mit den Hauptaxen zu einer Schaar gehören, in einem Complexe mit dem Tetraeder $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1)$ und die andern in einem Complexe mit dem Tetraeder $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$. Je zwei dieser drei Strahlensysteme gehen auf mehrfache Weise durch involutorische Collineationen in einander über. Sie umhüllen alle dieselbe Brennfläche, die sogenannte ***desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse,*** deren Haupteigenschaften wir nun ableiten wollen.

30. Alle Flächen zweiter Ordnung f_2', welche $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ zum Poltetraeder haben, bilden ein Gebüsch von Flächen in einem Raume P′, welches wir der Art auf die Ebenen eines Raumes P beziehen wollen, dass jede f_2' derjenigen Ebene von P entspricht, welche bezüglich f_2' Polarebene von L_4 ist **). Dann entspricht einem Büschel von Flächen f_2' ein Ebenenbüschel in P, einem Bündel der f_2' ein Ebenenbündel. Jedem Punkte von P sind somit acht bezüglich des Tetraeders $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ symmetrisch gelegene einander associirte Punkte von P′ zugewiesen. Jeder Geraden von P′ entspricht in P ein Kegelschnitt, welcher Complexcurve eines zu $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ gehörenden *Reye*schen Complexes ist, dem die Gerade von P′ angehört. Der Fläche Ψ_{12}', welche von den F_2' umhüllt wird, entspricht in P die Abwickelbare Ψ_6 von R_4. Den Flächen f_2' einer Schaar entsprechen die Ebenen eines Büschels dritter Ordnung in P, zu welchem $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gehören, und umgekehrt. Den Schmiegungsebenen einer C_3 entsprechen so die Flächen f_2' einer Schaar, welche von den acht Ebenen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ be-

---

*) Vgl. *Reye:* Geom. d. Lage, Bd. II, S. 135.

**) Vgl. über diese Beziehung: *Reye,* Geom. d. Lage, Bd. II, S. 234ff.

rührt wird, da C_3 mit R_4 zwei unendlich nahe Schmiegungsebenen gemein hat. Den Flächen f_2' der Schaarschaar, welche von den acht genannten Ebenen berührt werden, entsprechen deshalb in P die sämmtlichen Tangentialebenen der *Steiner*schen Fläche F_4. Diese Fläche ist somit auf jede der acht Ebenen eindeutig in bekannter Weise abgebildet. Die Curve R_4 wird von Kegelschnitten der F_4 eingehüllt, welche dem Complexe K angehören. In P′ entsprechen daher der Curve R_4 die Complexkegelschnitte der acht Ebenen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, und diese Kegelschnitte sind Rückkehrcurven von Ψ_{12}'. Je zwei unendlich nahe F_2' schneiden sich in einer Raumcurve, welche die acht Ebenen in Punkten der Complexcurven osculirt.

31. Um zu anderen Eigenschaften von Ψ_{12}' zu kommen, schicken wir folgende Bemerkungen voraus.

Im Allgemeinen entsprechen jedem Punkte P von P acht Punkte in P′; liegt aber P in einer der Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, so entsprechen ihm nur vier Punkte in P′, und liegt endlich P in einer Kante des Tetraeders $(\mathfrak{abcd})$, so hat P nur zwei entsprechende Punkte in P′. Zu einer Curve p_n n^{ter} Ordnung im Raume P gehört eine Curve p_{4n}' $4n^{\text{ter}}$ Ordnung im Raume P′, welche für das Tetraeder $(\mathfrak{abcd})$ symmetrisch liegt. Befindet sich p_n in einer der Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, so entspricht ihr eine p_{2n}' in derselben Ebene. Berührt p_n eine der Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, so hat p_{4n}' in derselben Ebene vier Doppelpunkte.

Ist eine der Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ Schmiegungsebene von p_n, so hat p_{4n}' in derselben Ebene vier stationäre Punkte oder Spitzen, deren Tangenten ebenfalls in dieser Ebene liegen. Einer Fläche φ_n n^{ter} Ordnung in P entspricht eine Fläche φ_{2n}' $2n^{\text{ter}}$ Ordnung in P′. Hat φ_n mit einer der Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ eine einfache Berührung, so hat φ_{2n}' in derselben Ebene vier Knotenpunkte. Berührt φ_n eine der Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ längs einer Curve m^{ter} Ordnung, so hat φ_{2n}' in derselben Ebene eine Doppelcurve $2m^{\text{ter}}$ Ordnung. Wird φ_n von einer der Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in einer Curve m^{ter} Ordnung geschnitten und gleichzeitig berührt, so hat φ_{2n}' in derselben Ebene eine Rückkehrcurve $2m^{\text{ter}}$ Ordnung. Man kann sich von der Figur in P′, welche aus einer gegebenen in P entsteht, annähernd dadurch ein Bild machen, dass man die Theile der Figur von P, welche im Inneren eines der durch die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ hergestellten Raumtheiles liegt, beibehält und zu diesem Theile der Figur die hinsichtlich des Tetraeders $(\mathfrak{abcd})$ symmetrisch gelegenen Figuren hinzufügt. Oder strenger: Wenn

die Coordinaten des Punktes P mit x, y, z, w bezüglich des Coordinatentetraeders ($\mathfrak{abcd}$) bezeichnet werden, so sind die Punkte P' so bestimmt, dass ihre Coordinaten ξ, η, ζ, ω die Quadratwurzeln der ersteren sind.

Wir fügen noch hinzu, dass die Fläche Ψ'_{12} bezüglich der drei Tetraeder ($\mathfrak{abcd}$), ($\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$), ($\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$) symmetrisch ist, und dass deshalb aus den Schnitten von Ψ'_{12} mit den Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Schnitte der Fläche mit den übrigen acht Ebenen abgeleitet werden könnten.

32. Nach diesen Vorbereitungen können wir folgende Eigenschaften von Ψ'_{12} und von den Strahlensystemen sechster Ordnung zweiter Klasse aussprechen.

Die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ schneiden Ψ_6 je in einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt und drei Wendetangenten, welche mit den Kanten von ($\mathfrak{abcd}$) zusammenfallen. Ψ'_{12} schneidet daher die zwölf singulären Ebenen in Curven sechster Ordnung mit vier Doppelpunkten und mit sechs Spitzen, welche paarweise in den Kanten der Tetraeder liegen. Die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ osculiren Ψ_6 längs der Geraden a, b, c, d. Letzteren entsprechen Rückkehrkegelschnitte von Ψ'_{12} in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, welche die in denselben Ebenen befindlichen Schnittcurven von Ψ'_{12} je viermal berühren. Da durch R_4 *eine* Fläche β_1 zweiter Ordnung geht, so lässt sich durch je zwei Gruppen der zwölf Rückkehrkegelschnitte *eine* Fläche vierter Ordnung legen, welche bezüglich des dritten Tetraeders symmetrisch ist.

Der Doppelcurve D_6 von Ψ_6 entspricht die Doppelcurve D'_{24} von Ψ'_{12}. Da D_6 die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ osculirt und vier Spitzen auf R_4 enthält, so besitzt D'_{24} im Ganzen 48 Spitzen, welche zu je vieren auf den zwölf Rückkehrkegelschnitten von Ψ'_{12} liegen. Da D_6 die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in den Punkten A, B, C, D berührt, so hat D'_{24} im Ganzen 16 Doppelpunkte, welche sich auf die 16 Geraden vertheilen, in denen je drei singuläre Ebenen von Ψ'_{12} zusammenstossen. In jedem Doppelpunkte von D'_{24} berühren einander drei Rückkehrkegelschnitte. D_6 ist der vollständige Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung γ_1 mit einer Fläche dritter Ordnung; D'_{24} ist daher der vollständige Schnitt einer Fläche γ'_1 vierter Ordnung mit einer Fläche sechster Ordnung. Die Flächen f'_2, welche D'_{24} osculiren, umhüllen eine Fläche zwölfter Ordnung mit vier Doppelkegelschnitten und einer Doppelcurve sechzehnter Ordnung, und berühren alle eine bestimmte bezüglich ($\mathfrak{abcd}$) symmetrisch gelegene Fläche vierter Ordnung γ'. Die Flächen F'_2 berühren alle eine bestimmte bezüglich ($\mathfrak{abcd}$) symmetrische

Fläche vierter Ordnung β', welche Ψ'_{12} längs einer Curve 24. Ordnung tangirt. Diese Curve besitzt in den Knotenpunkten von D'_{24} Doppelspitzen. Da β und γ die Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ berühren, so haben β' und γ' je 16 Knotenpunkte und sind specielle *Kummer*sche Flächen, sogenannte Tetraedroide. Die Knotenpunkte von β' fallen zusammen mit den Doppelpunkten von D'_{24}. Die Flächen γ', γ'_1 und β' liegen in einem Büschel. Für die Punkte von β' ist das Problem, die sechs durch sie gehenden Strahlen der Ψ'_{12} umhüllenden gleichartigen Strahlensysteme zu construiren, algebraisch lösbar mittelst zweier Gleichungen dritten Grades *).

Clebsch giebt noch eine Curve 24. Ordnung an, für deren Punkte das soeben genannte Problem algebraisch lösbar ist durch drei Gleichungen zweiten Grades. Dieser Curve entspricht in P diejenige Curve sechster Ordnung, welche von den doppelt berührenden Tangentialebenen von R_4 osculirt wird. Die Curve hat 48 Spitzen und ist der vollständige Schnitt einer bezüglich ($\mathfrak{abcd}$) symmetrischen Fläche α'_1 vierter Ordnung mit einer Fläche sechster Ordnung; alle die Curve osculirenden f'_2 berühren *eine* zu ($\mathfrak{abcd}$) symmetrische Fläche vierter Ordnung α', und es liegen β', β'_1 und α' in einem Büschel, wenn β'_1 die acht in den Ebenen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ liegenden Rückkehrkegelschnitte verbindet.

33. Den Kegelschnitten der Abwickelbaren φ_4 der C_3 entsprechen in P′ die Strahlen des Strahlensystems S' sechster Ordnung zweiter Klasse, welches Ψ'_{12} doppelt berührt und dem Complexe K angehört. Es schneidet die F'_2 in entsprechenden Punkten der zwischen den F'_2 bestehenden Collineationen. Einer Fläche φ_4 entspricht in P′ eine Fläche φ'_8, welche ebenfalls abwickelbar ist. φ'_8 hat vier Doppelkegelschnitte in den Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und eine Rückkehrcurve C'_{12} zwölfter Ordnung, welche auf Ψ'_{12} liegt und 16 Spitzen hat. Ausser in C'_{12} berühren die Strahlen von φ'_8 die Ψ'_{12} in den Punkten einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art, welche der gemeinsamen Tangente von C_3 und R_4 entspricht. Das System dieser Curven und dasjenige der C'_{12} überdecken Ψ'_{12} einfach; zwei Curven verschiedener Systeme schneiden einander in acht Punkten. Die beiden andern mit S' gleichartigen Systeme liefern analoge Curvenschaaren auf Ψ'_{12}. Auf jeder F'_2 liegt ein System von Curven vierter Ordnung erster Art, welches durch eine Schaar von f'_2, der auch F'_2 angehört, ausgeschnitten wird. Es hat

*) Vgl. hier und im Folgenden *Clebsch* a. a. O.

die Eigenschaft, dass es auf den Abwickelbaren, in welche das Strahlensystem S' sich ordnet, liegt. Die Abwickelbare, welche die Schaar dieser f'_2 einhüllt, gehört selbst zu S'. Einer Fläche χ_4 (No. 27) entspricht in P' eine Fläche χ'_8 mit vier Doppelkegelschnitten in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und einer Doppelcurve zwölfter Ordnung mit 16 Doppelpunkten in denselben Ebenen. Jede bezüglich ($\mathfrak{abcd}$) symmetrische Curve vierter Ordnung erster Art auf einer F'_2 ergiebt eine solche χ'_8. Diese Fläche ist keine andere, als die von *de la Gournerie* ausführlich betrachtete *Quadrospinale* *), und alle projectiven Eigenschaften derselben lassen sich aus dieser Beziehung zu χ_4 ableiten.

34. Wir betrachten jetzt die drei gleichartigen Strahlensysteme, welche Ψ'_{12} doppelt berühren. Ihnen entsprechen im Raume P gewisse Kegelschnittsysteme, von welchen zwei zusammenfallen und alle diejenigen Kegelschnitte enthalten, welche in den Schmiegungsebenen der R_4 liegen und gleichzeitig von den Ebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ berührt werden. Das dritte System enthält aber die Complexkegelschnitte von K in den Schmiegungsebenen aller C_3. Da letztere die *Steiner*sche Fläche, für welche R_4 Haupttangentencurve ist, berühren, so liegen die drei Systeme von Kegelschnitten in einem Systeme von dreifach unendlicher Mächtigkeit derjenigen Kegelschnitte, welche in den Tangentialebenen von F_4 liegen und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ berühren. Diesen Curven entsprechen im Raume P' die Strahlen eines Complexes dritten Grades, welche auf den einer Schaarschaar angehörenden Flächen f'_2 sich befinden. ***Die drei gleichartigen Strahlensysteme, welche Ψ'_{12} einhüllen, liegen daher in einem Complexe dritten Grades.*** Dieser zeigt gewisse Analogien mit dem ***Reye***schen Complexe und soll ein ***desmischer Complex dritten Grades*** heissen. Alle Geraden der zwölf singulären Ebenen von Ψ'_{12} sowie alle Strahlen, welche durch die zwölf Punkte gehen, in denen je drei Kanten der Symmetrietetraeder sich treffen, gehören diesem Complexe an. Er ist dadurch vollständig bestimmt. Wird auf F_4 die Haupttangentencurve verändert, so bleibt der desmische Complex der gleiche, und er kann deshalb auf dreifache Art durch ein Strahlensystem sechster Ordnung zweiter Klasse beschrieben werden. Eines dieser Strahlensysteme erscheint als Schnitt des desmischen Complexes mit einem *Reye*schen Complexe. Unter den verschiedenen Ψ'_{12}

*) Recherches sur les surfaces réglées. Paris 1867.

befinden sich zwei äquianharmonische Flächen *) mit je einer dreifachen Curve achter Ordnung und drei harmonische Flächen mit je einer in zwei Curven zwölfter Ordnung zerfallenden Doppelcurve. Jede dieser Curven liegt auf einer Fläche zweiten Grades.

Andere specielle Fälle von Ψ'_{12} können nur durch Specialisirung der *Steiner*schen Fläche gefunden werden.

*) Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ alle reell, so sind diese beiden Flächen conjugirt imaginär.

Aachen, im Juli 1885.

Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches für einen beliebigen algebraischen Primdivisor.

(Von Herrn *K. Hensel.*)

Die vorliegende Arbeit ist aus Untersuchungen über die gemeinsamen ausserwesentlichen Primtheiler p der Discriminanten aller ganzzahligen Gleichungen eines beliebigen Gattungsbereiches hervorgegangen, welche ich für den Fall, dass die Primzahl nicht in der Discriminante der betreffenden Gattung enthalten ist, in meiner Dissertation durchgeführt habe *).

Der Zweck der erwähnten Arbeit machte es damals nothwendig, die Primzahl p nicht für die vorgelegte, sondern für diejenige Gattung der niedrigsten Ordnung in ihre Primdivisoren zu zerlegen, welche die erstere, nebst allen zu ihr conjugirten Gattungen unter sich enthält. Ausserdem wurde ein sehr ausgedehnter Gebrauch von der Voraussetzung gemacht, dass die Primzahl nicht in der Discriminante der zu untersuchenden Gattung enthalten ist.

Als die Frage der ausserwesentlichen Theiler auch für den Fall untersucht werden sollte, dass p ein Theiler der Gattungsdiscriminante ist, ergab sich das Resultat, dass die über das Verhalten der Zahlen einer Gattung in Bezug auf einen Primdivisor gefundenen Sätze zum grössten Theil von der vorhin erwähnten Voraussetzung unabhängig sind; und ein weiteres Eingehen auf diesen Gegenstand machte es auch möglich, den Uebergang zu der höheren Gattung vollkommen zu vermeiden.

*) Arithmetische Untersuchungen über Discriminanten und ihre ausserwesentlichen Theiler. Berlin, 1884. Verlag von *Mayer* und *Müller*. Die entsprechenden Resultate für den in dieser Arbeit noch ausgeschlossenen Fall sind in einer anderen Arbeit hergeleitet, welche demnächst erscheinen wird.

Ein Hauptzweck dieser Arbeit ist der, die von Herrn *Kronecker* in seiner Festschrift *) aufgestellten Begriffe des Gattungsbereiches, der Gattung und des Fundamentalsystems in der Weise zu fassen, dass sie ihre Bedeutung und ihre wesentlichen Merkmale auch dann noch beibehalten, wenn man die ganzen algebraischen Zahlen nicht mehr als solche, sondern nur in Bezug auf einen beliebigen algebraischen Primdivisor betrachtet.

Eine charakteristische Eigenschaft aller algebraischen Zahlen desselben Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$ ist die, dass sie sich sämmtlich als ganze Functionen mit rationalen Zahlcoefficienten von einer unter ihnen darstellen lassen. Man kann jedoch die zur Darstellung aller Zahlen des Bereiches dienende Zahl nicht ganz beliebig auswählen. In der That folgt daraus, dass eine Zahl des Bereiches durch eine andere rational dargestellt werden kann, noch keineswegs, dass auch das Umgekehrte möglich sein muss. Dieser Umstand ergiebt ein weiteres Eintheilungsprincip für die Zahlen des Bereiches $(\mathfrak{G})$: Man bezeichnet nämlich zwei Zahlen dann als zu derselben Gattung $\mathfrak{G}_h$ gehörig, wenn sie sich *gegenseitig* rational durch einander darstellen lassen. Eine Gattung ist unter einer anderen enthalten, wenn sich alle Zahlen der ersten rational durch jede der letzten Gattung darstellen lassen, die umgekehrte Darstellung aber nicht möglich ist. Die Gesammtheit aller Zahlen, welche zu einer Gattung $\mathfrak{G}_h$ oder zu einer unter ihr enthaltenen Gattung gehören, constituirt den *Gattungsbereich* $(\mathfrak{G}_h)$. Ein einfaches, endliches Verfahren führt schliesslich zu einer angemessenen Darstellung aller ganzen Zahlen eines jeden unter $(\mathfrak{G})$ enthaltenen Gattungsbereiches als homogene lineare ganzzahlige Functionen einer bestimmten Anzahl unter ihnen. Diese Zahlen bilden ein Fundamentalsystem für die Gattung $\mathfrak{G}_h$. Von diesen Definitionen ausgehend, gelangt man dann unter Benutzung der irreductiblen, die Zahlen des Bereiches $(\mathfrak{G})$ definirenden Gleichungen zu den Begriffen der conjugirten Gattungen, der Ordnung einer Gattung, sowie zu den Sätzen über das Verhältniss der Ordnungszahlen der enthaltenden und enthaltenen Gattung.

Die hier angegebene Ableitung des Gattungsbegriffes ist nicht genau dieselbe, wie diejenige, welche im ersten Paragraphen dieser Arbeit im Anschluss an die Festschrift gegeben werden wird; einmal jedoch sieht man

*) *Kronecker,* Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Festschrift zu Herrn *Kummers* Doctorjubiläum. Diese Arbeit soll bei Anführungen kurz durch F. bezeichnet werden.

leicht, dass die hier gegebenen Definitionen sich mit den analogen der Festschrift vollkommen decken; dann aber erhält man durch die soeben gegebenen Bemerkungen einen Hinweis darauf, wie die Begriffe des Gattungsbereiches und der Gattung, des Fundamentalsystems und der Ordnung zu fassen sind, sobald man die Zahlen eines Bereiches (𝔊) in Bezug auf einen Primdivisor P_1 einer reellen Primzahl p betrachtet.

Nachdem die Anzahl $p^{\varkappa}$ aller modulo P_1 incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches (𝔊) mit Hülfe der Theorie der Modulsysteme bestimmt ist, ergiebt sich unmittelbar aus der Herleitung dieses Resultates ein endliches Verfahren, $\varkappa$ Zahlen so zu bestimmen, dass sich alle ganzen algebraischen Zahlen des Bereiches (𝔊), modulo P_1 betrachtet, eindeutig als homogene lineare ganze ganzzahlige Functionen derselben darstellen lassen. Daher wird man jedes solches System ganzer Zahlen ein *Fundamentalsystem* für die Gattung 𝔊 und den Modul P_1 nennen können. Hierbei muss hervorgehoben werden, dass die $\varkappa$ Elemente dieses Fundamentalsystems für den Modul P_1 aus den n Zahlen eines jeden vorgelegten Fundamentalsystems selbst ausgewählt werden können. — Alle Zahlen w des Gattungsbereiches (𝔊) genügen modulo P_1 einer einfachen Congruenz des Grades $p^{\varkappa}$:

$$\psi(w, \varkappa) = w^{p^{\varkappa}} - w \equiv 0 \pmod{P_1}.$$

Stellt man nun für jede Zahl des Bereiches diejenige Function $\psi(w, \varkappa_h)$ des niedrigsten Grades auf, deren Congruenzwurzel sie ist, und betrachtet alle diejenigen Zahlen, welche in diesem Sinne zu derselben Function $\psi(w, \varkappa_h)$ gehören, so kann man nachweisen, dass alle diese Zahlen sich, modulo P_1 betrachtet, ganzzahlig durch einander ausdrücken lassen, und dass auch nur diese Zahlen die erwähnte Eigenschaft besitzen. Daher wird man dieselben als für den Modul P_1 zu derselben *Gattung* Γ_h' gehörig bezeichnen können. Die Zahl $\varkappa_h$ soll aus sogleich zu erörternden Gründen die *Ordnung* dieser Gattung heissen. Da alle Zahlen, welche der Congruenz

$$\psi(w, \varkappa_h) \equiv 0 \pmod{P_1}$$

genügen, und nur diese, rational durch jede der zur Gattung Γ_h' gehörigen Zahlen ausdrückbar sind, so sollen sie als zum *Gattungsbereiche* (Γ_h') gehörig definirt werden. Auch für jeden Gattungsbereich (Γ_h') ist es möglich, ein Fundamentalsystem von $\varkappa_h$ Elementen aufzustellen.

Die nächste Aufgabe ist die, die Anzahl aller modulo P_1 incongruenten Zahlen zu bestimmen, welche zu einem Gattungsbereiche (Γ_h'), beziehungs-

weise einer Gattung Γ_h gehören, sowie diejenigen Functionen zu finden, deren Congruenzwurzeln diese Zahlen und nur sie sind. Ihre Lösung ergiebt sich unter Benutzung des Fundamentalsystems für den Gattungsbereich (Γ_h) mit Hülfe einer zuerst von *Dirichlet* angewandten Methode. Die Zahlen einer und derselben Gattung Γ_h zerfallen dann noch weiter nach dem Exponenten, zu dem sie modulo P_1 gehören. Derselbe steht zur Ordnungszahl $\varkappa_h$ der Gattung Γ_h in dem einfachen Verhältniss, dass für ihn die Primzahl p selbst zum Exponenten $\varkappa_h$ gehört. Auch die Anzahl aller zu demselben Exponenten gehörigen Zahlen, sowie die ganzzahlige Congruenz, deren Wurzeln sie sind, lässt sich nach der vorher angegebenen Methode leicht bestimmen.

Endlich zeigt sich, dass jede Zahl einer Gattung Γ_h, modulo P_1 betrachtet, einer irreductiblen ganzzahligen Congruenz des Grades $\varkappa_h$ genügt; dieser Umstand giebt den Grund, warum vorher $\varkappa_h$ die Ordnung der Gattung Γ_h genannt wurde. Diejenigen Zahlen, welche einer und derselben irreductiblen Congruenz genügen, wird man als modulo P_1 *conjugirte* Zahlen zu bezeichnen haben.

Zum Schluss wird noch eine Reihe von Sätzen abgeleitet, welche das Verhältniss verschiedener Gattungen und ihrer Ordnungszahlen zu einander behandeln und den entsprechenden Resultaten in der Algebra völlig analog sind.

Die wichtigsten Arbeiten, welche früher über diesen Gegenstand veröffentlicht worden sind, sind folgende: *Gauss,* Disquisitiones generales circa congruentias. Gesammelte Werke II, pag. 212—240. Diese Abhandlung ist vermuthlich schon 1797 oder 1798 geschrieben. *Ev. Galois,* Sur la théorie des nombres, zuerst veröffentlicht im 13. Bande des Bulletin des sciences de *M. Férussac,* Juniheft 1830. *Schönemann,* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der höheren Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist. Dieses Journal, Bd. 31; sowie die Fortsetzung: Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. *Serret,* Propriétés des fonctions entières d'une variable relativement à un module premier. (*Serret,* Cours d'algèbre supérieure, t. II, sect. III, chap. III.) *Serret* hat diesen Gegenstand in einer Arbeit zuerst behandelt, die am 4. December 1865 der Akademie der Wissenschaften überreicht worden ist.

Alle diese Arbeiten behandeln den Fall, dass die Primzahl p innerhalb der, der Untersuchung zu Grunde gelegten Gattung $\mathfrak{G}$ ihren Primzahl-

charakter nicht verliert, d. h. unzerlegbar bleibt. In der That werden daselbst ***der Sache nach*** die ganzzahligen Functionen einer Variablen x für ein Modulsystem $(p, F(x))$ untersucht; die Function $F(x)$ wird aber jedesmal als irreductibel für den Modul p angenommen.

Da das hier untersuchte Problem das Thema der eben angeführten Arbeiten aus dem Grunde als einen speciellen Fall enthält, weil hier über das Verhältniss der Primzahl p zu der zu untersuchenden Gattung keinerlei Voraussetzung gemacht wird, so kommen naturgemäss einige der im Folgenden abgeleiteten Resultate und Ausdrücke schon in jenen Abhandlungen für den Fall vor, dass p innerhalb $\mathfrak{G}$ als irreductibel angenommen wird. Indessen sind auch diese einzelnen Sätze, der allgemeineren Natur unseres Problems entsprechend, stets auf einem von dem früher betretenen abweichenden Wege hergeleitet worden; ausserdem wurden sie auch deshalb in die vorliegende Arbeit aufgenommen, weil es für eine demnächst erscheinende Abhandlung wichtig war, die Sätze über die Beziehungen der Zahlen einer Gattung zu einem beliebigen Primdivisor möglichst genau und vollständig zu entwickeln.

Einige der im Folgenden entwickelten *allgemeinen* Resultate finden sich schon in den *Dedekind*schen Publicationen. Ich würde sie im Einzelnen an den betreffenden Stellen dieser Abhandlung citiren, wenn nicht die ganz verschiedene Terminologie eine zu weitläufige Darlegung für die Vergleichung der Resultate erforderte. Aber ich werde dies in einer späteren Arbeit nachholen.

§ 1.

Es sei ξ eine Wurzel einer beliebigen irreductiblen ganzzahligen Gleichung vom Grade n. Die Gesammtheit aller derjenigen algebraischen Zahlen, welche durch ξ rational ausgedrückt werden können, heisst „der durch die Zahl ξ charakterisirte Gattungsbereich ($\mathfrak{G}$)". (F. § 2). Alle Zahlen des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) genügen dann irreductiblen Gleichungen, deren Grad gleich n oder gleich einem Theiler von n ist. — Die Gesammtheit aller derjenigen Zahlen des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$), welche einer *irreductiblen* Gleichung vom Grade n genügen, wird als „die durch die Zahl ξ charakterisirte Gattung $\mathfrak{G}$" bezeichnet. (F. § 2). Die Zahl n heisst die Ordnung dieser Gattung.

Im Folgenden sollen nur die *ganzen* algebraischen Zahlen des Gattungsbereiches (𝔊), d. h. diejenigen Zahlen untersucht werden, in deren ganzzahliger Gleichung der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten den Werth Eins hat. Die Gesammtheit aller ganzen algebraischen Zahlen des Gattungsbereiches (𝔊) heisst der Integritätsbereich (𝔊).

Es existiren nun stets n ganze algebraische Zahlen

$$(1.)\qquad \xi_1,\ \xi_2,\ \dots\ \xi_n$$

des Bereiches (𝔊), die so beschaffen sind, dass jede ganze Zahl von (𝔊) auf eine und nur auf eine Weise als homogene lineare Function der Grössen (1.) mit reellen ganzzahligen Coefficienten dargestellt werden kann. Die Form

$$(2.)\qquad w_1 = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_n\xi_n$$

wird also alle ganzen algebraischen Zahlen des Gattungsbereiches (𝔊) darstellen, wenn man den Unbestimmten $u_1, \dots u_n$ alle möglichen ganzzahligen Werthe beilegt. Deshalb heissen die Zahlen (1.) ein ***Fundamentalsystem***, die Form (2.) für unbestimmte u eine *Fundamentalform* des Gattungsbereiches (𝔊).

Im Folgenden sollen die ganzen algebraischen Zahlen des Bereiches (𝔊) für eine Primzahl p untersucht werden. Da indessen eine reelle Primzahl sich im allgemeinen innerhalb eines Gattungsbereiches als Product algebraischer Zahlen darstellen lässt, so würde man hier zu ähnlichen Resultaten gelangen, wie wenn man in der Theorie der reellen Zahlen diese zuerst für eine zusammengesetzte Zahl als Modul untersuchen wollte. Man wird daher die Zahl p im Gebiete der Gattung 𝔊 in ihre irreductiblen Factoren zu zerlegen haben.

Diese Zerlegung ist aber im allgemeinen keine eindeutige; es ist vielmehr meistens möglich, p innerhalb (𝔊) auf verschiedene Weisen als Product nicht mehr zerlegbarer ganzer algebraischer Zahlen darzustellen.

Um hier die Untersuchung unbeschadet der Allgemeinheit ebenso einfach wie in der Theorie der reellen Zahlen gestalten zu können, stütze ich mich auf die von Herrn *Kronecker* in seiner Festschrift durchgeführte Theorie der algebraischen Divisoren, aus der ich nur diejenigen Sätze kurz heraushebe, welche hier in Betracht kommen.

Es wird hier gezeigt, dass man wieder zu einer eindeutigen Zerlegung in einfachste Elemente, und dadurch auch zu einer methodischen

Arithmetik gelangen kann, wenn man die algebraischen Zahlen nicht für sich, sondern innerhalb desjenigen weiteren Bereiches behandelt, der durch die Gesammtheit aller algebraischen Formen des Gattungsbereiches (𝔊) mit beliebig vielen Variablen gebildet wird, und von welchem die algebraischen Zahlen offenbar einen Theilbereich bilden. — Ebenso wie die ganzen algebraischen Zahlen kann man auch die *ganzen* algebraischen Formen als diejenigen Formen charakterisiren, deren definirende Gleichung als Coefficienten ganzzahlige Formen der Unbestimmten besitzt, wenn man den Coefficienten der höchsten Potenz der Variablen gleich Eins voraussetzt.

Sei nun

$$F(v_1, v_2, \dots)$$

eine beliebige ganze algebraische Form des Gattungsbereiches (𝔊) mit den Unbestimmten $v_1, v_2, \dots$, so wird die über alle n zu 𝔊 conjugirten Gattungen erstreckte Norm von $F(v_1, v_2, \dots)$ eine ganze ganzzahlige reelle Form der Unbestimmten $v_1, v_2, \dots$ sein. Denkt man sich aus ihr den grössten gemeinsamen Theiler m aller Coefficienten herausgehoben, so wird sich eine Gleichung ergeben

$$\mathrm{Nm}(F(v_1, v_2, \dots)) = mE(v_1, v_2, \dots),$$

wo $E(v_1, v_2, \dots)$ eine primitive, d. h. eine solche Form des natürlichen Rationalitätsbereiches ist, deren Coefficienten den grössten gemeinsamen Theiler Eins haben. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, dass der in der Norm auftretende grösste gemeinsame Theiler gleich der Einheit, also die Norm von $F(v_1, v_2, \dots)$ selbst eine primitive ganzzahlige Form ist. Eine solche Form $F(v_1, v_2, \dots)$ des Gattungsbereiches (𝔊), deren Norm eine primitive Form des natürlichen Rationalitätsbereiches ist, soll dann: eine *primitive* Form des Gattungsbereiches (𝔊) oder eine *Einheitsform* genannt werden. Ebenso wie zwei Zahlen des Gattungsbereiches (𝔊) absolut äquivalent heissen, welche sich nur durch eine Einheit, d. h. durch eine solche Zahl unterscheiden, deren Norm gleich Eins ist, sind auch zwei Formen *absolut äquivalent* zu nennen, welche sich allein durch eine primitive Form (Einheitsform) unterscheiden, weil zwei solche Formen einander als Moduln vollständig ersetzen können. In diesem erweiterten Bereiche werden also die primitiven ganzen algebraischen Formen oder Einheitsformen genau dieselbe Rolle spielen, wie in einem Gattungsbereiche die Einheiten: man

wird in allen Fragen, welche sich auf die Theilbarkeit und Zerlegbarkeit der Formen und Zahlen beziehen, von ihnen wie von jenen abstrahiren können.

Ist nun p eine beliebige reelle Primzahl, so kann man sie stets auf eine und nur auf eine Weise als Product einer Anzahl von Formen $P_1, P_2, \dots P_h$ in der Weise darstellen, dass das Product $P_1.P_2\dots P_h$ sich von p nur durch eine primitive Form des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) unterscheidet. Die Eindeutigkeit dieser Zerlegung ist hier ebenfalls so aufzufassen, dass die bei jeder anderen Zerlegung von p auftretenden unzerlegbaren Formen sich von den vorher angegebenen nur durch primitive Formen unterscheiden können. So ist es z. B. unmöglich, in der durch die beiden elfgliedrigen Perioden ε_1, ε_2 der 23. Wurzeln der Einheit constituirten Gattung die Primzahl 2 in eindeutiger Weise als das Product zweier Zahlen $a\varepsilon_1+b\varepsilon_2$ und $a_1\varepsilon_1+b_1\varepsilon_2$ darzustellen; dagegen ist dieselbe Primzahl, abgesehen von einer primitiven Form, gleich dem Product der beiden conjugirten Formen

$$2+u\varepsilon_1 \quad \text{und} \quad 2+u\varepsilon_2.$$

Es ist nämlich

$$(2+u\varepsilon_1)(2+u\varepsilon_2) = 2(2-u+3u^2),$$

und es ist unmöglich, einen dieser Factoren als das Product zweier anderen Formen darzustellen, ohne dass die Norm einer von ihnen primitiv wäre.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Nachweis, dass diese Zerfällung von p in unzerlegbare Formen $P_1, \dots P_h$ stets durch eine endliche Anzahl von Operationen ausgeführt werden kann. Der Beweis dieser Behauptung ist F. § 18 gegeben; ich hebe hier nur die wesentlichsten Punkte hervor.

Offenbar braucht man die Formen $P_1, \dots P_h$ nur modulo p zu bestimmen; daher kann man sich darauf beschränken, sämmtliche Coefficienten dieser Formen auf ihren kleinsten Rest modulo p reducirt anzunehmen. Da nun alle Zahlen des Gattungsbereiches einer der p^n incongruenten Zahlen

$$w_1 = u_1\xi_1+\dots+u_n\xi_n \qquad \left(\begin{smallmatrix} u_a = 0,\,1,\,\dots\,(p-1) \\ a=1,\,2,\,\dots\,n \end{smallmatrix}\right)$$

modulo p congruent sind, wenn $\xi_1, \dots \xi_n$ die n Elemente eines Fundamentalsystems sind, so hat man zunächst zu untersuchen, wieviele von den p^n

linearen Formen

$$p+uw_1$$

primitiv sind. Diese Untersuchung führt man so, dass man die Normen aller dieser Formen bildet und prüft, ob die so sich ergebenden Formen des natürlichen Rationalitätsbereiches primitiv sind. Sind alle diese Divisoren primitiv, so ist man sicher, dass p innerhalb des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) selbst eine Primzahl ist. Im entgegengesetzten Falle seien

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_s$$

diejenigen Formen, welche nicht primitiv sind. Von diesen ausgehend, kann man dann zu den unzerlegbaren Formen gelangen, welche vorher definirt sind, und zwar mit Hülfe der folgenden Sätze:

1) Es giebt ein endliches Verfahren, um zu entscheiden, ob ein Divisor durch einen anderen theilbar ist.

2) Es giebt ein endliches Verfahren, um den grössten gemeinsamen Theiler zweier Divisoren darzustellen.

3) Jede reelle Zahl ist dem Product einer endlichen Anzahl von Divisoren äquivalent.

Es möge nun die Primzahl p innerhalb des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) in ihre irreductiblen Divisoren zerlegt vorausgesetzt werden. Es sei

$$(3.) \qquad P_1 \sim \xi_0+v_1\xi_1+\cdots+v_r\xi_r$$

einer von ihnen. Dieser soll dann der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt werden. Es ist vorhin hervorgehoben worden, dass sich jede ganze algebraische Zahl des Bereiches ($\mathfrak{G}$) auf eine eindeutige Weise in die Form

$$(2.) \qquad w_1 = u_1\xi_1+\cdots+u_n\xi_n$$

setzen lässt, wenn den Unbestimmten u ganzzahlige Werthe gegeben werden. Legt man hier den letzteren unabhängig von einander alle Werthe $0, 1, \ldots p-1$ bei, so erkennt man, dass jede ganze Zahl des Bereiches einer von den p^n so sich ergebenden Zahlen modulo p, also auch für den Divisor P_1 congruent ist. Ferner ist es leicht, nachzuweisen, dass diese p^n Zahlen modulo p incongruent sind, dass also eine Zahl nur auf eine Weise modulo p auf die Form (2.) gebracht werden kann. Dasselbe lässt sich jedoch nicht für den Divisor P_1 von p behaupten; im allgemeinen wird es vielmehr möglich sein, eine und dieselbe ganze algebraische Zahl auf verschiedene Arten so in die Form (2.) zu setzen, dass die Coefficienten nicht negativ und kleiner

als p sind. Es ist daher von Wichtigkeit, eine analoge, aber eindeutige Darstellung der Zahlen des Bereiches ($\mathfrak{G}$) für P_1 als Modul zu finden.

Zu diesem Zwecke untersuche ich die Form (2.) bei unbestimmten u für das Modulsystem

$$(3.)\qquad M \sim (P_1,\ u_1^p-u_1,\ u_2^p-u_2,\ \dots\ u_n^p-u_n),$$

indem ich zwei ganze Formen $\varphi(u_1, \dots u_n)$ und $\psi(u_1, \dots u_n)$, deren Coefficienten dem Bereiche ($\mathfrak{G}$) angehören, für das System M congruent nenne, wenn man eine Gleichung der folgenden Form aufstellen kann:

$$(4.)\qquad \varphi(u_1, \dots u_n) = \psi(u_1, \dots u_n)+P_1\chi(u_1, \dots u_n)+\sum_{a=1}^{n}(u_a^p-u_a)\chi_a(u_1, \dots u_n).$$

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass zwei Formen, welche bei unbestimmten u für das Modulsystem M congruent sind, einander modulo P_1 congruent bleiben, sobald man den Unbestimmten $u_1, \dots u_n$ beliebige ganzzahlige Werthe beilegt. Dann sind nämlich in (4.) alle Ausdrücke $u_a^p-u_a$ nach dem *Fermat*schen Satze durch p, also *a fortiori* durch P_1 theilbar; für ganzzahlige u geht also die Gleichung (4.) über in die Congruenz

$$(5.)\qquad \varphi(u_1, \dots u_n) \equiv \psi(u_1, \dots u_n) \pmod{P_1}.$$

Auch der umgekehrte Satz kann bewiesen werden: Besteht nämlich die Congruenz (5.) für *alle* ganzzahligen Werthe der Unbestimmten $u_1, \dots u_n$, so sind die Functionen φ und ψ einander bei unbestimmten u für das Modulsystem M congruent. Der Beweis dieses Satzes soll in einer anderen Arbeit gegeben und an dieser Stelle auf denselben nur verwiesen werden.

§ 2.

Der am Ende des vorigen Paragraphen angeführte Satz kann für die vorliegende Untersuchung offenbar so ausgesprochen werden:

Bedeutet w_1 eine Fundamentalform der Gattung $\mathfrak{G}$, so besteht eine ganzzahlige Congruenz

$$(1.)\qquad F(w_1) \equiv 0 \quad (\text{modd. } P_1,\ u_1^p-u_1,\ \dots\ u_n^p-u_n)$$

dann und nur dann, wenn dieselbe Congruenz für jede ganze Zahl des Bereiches ($\mathfrak{G}$) und für den Modul P_1 erfüllt ist.

Man denke sich nun die Fundamentalform w_1 zur p^{ten} Potenz erhoben; dieselbe wird für das Modulsystem (M) der folgenden Linearform con-

gruent sein:

$$u_1\xi_1^p+u_2\xi_2^p+\cdots+u_n\xi_n^p.$$

Erhebt man diese Form wieder in die p^{te} Potenz und fährt so fort, so muss man schliesslich zu einer Form gelangen, welche zu w_1 für dieses Modulsystem congruent ist. In der That ist eine Congruenz

$$(2.)\qquad w_1^{p^x}-w_1\equiv\Sigma u_h(\xi_h^{p^x}-\xi_h)\equiv 0\quad (\text{modd. } P_1,\ \ldots,\ u_a^p-u_a,\ \ldots)$$

nach dem soeben bewiesenen Hülfssatze dann und nur dann erfüllt, wenn für dasselbe x die n Congruenzen

$$(3.)\qquad \xi_h^{p^x}-\xi_h\equiv 0\quad (\text{mod. } P_1)\qquad\qquad {\scriptstyle (h=1,\ldots n)}$$

bestehen. Eine solche Zahl x kann man aber immer finden, weil die Anzahl aller modulo P_1 incongruenten algebraischen Zahlen, wie vorher gezeigt wurde, eine endliche ist. Hierbei muss die Bemerkung gemacht werden, dass keineswegs *eine* Zahl ξ_h des Fundamentalsystems existiren muss, für welche die Congruenz (3.) die niedrigste dieser Art ist, die für den Modul P_1 besteht. Dagegen sieht man leicht, dass, wenn für jedes ξ_h die Congruenz

$$\xi_h^{p^{x_h}}-\xi_h\equiv 0\quad (\text{mod. } P_1)$$

die niedrigste dieser Art ist, das kleinste gemeinsame Vielfache der n Zahlen $x_1,\ \ldots\ x_n$ gleich dem vorher charakterisirten x sein muss. Wäre dies nämlich nicht der Fall, und $\bar{x}<x$ wäre dieses Vielfache, so würden für jedes h die Congruenzen:

$$\xi_h^{p^{\bar{x}}}-\xi_h\equiv 0\quad (\text{mod. } P_1)$$

und daher für das Modulsystem M die Congruenz

$$w_1^{p^{\bar{x}}}-w_1\equiv 0\quad (\text{mod. } M)$$

bestehen, was gegen die soeben gemachte Voraussetzung verstiesse.

Es sei nun x der niedrigste Exponent von p, für den eine Congruenz

$$(4.)\qquad w_1^{p^x}-w_1\equiv 0\quad (\text{mod. } M)$$

bei variablen u besteht. Bildet man dann die x Formen

$$(5.)\qquad w_1,\quad w_1^p,\quad w_1^{p^2},\quad \ldots\quad w_1^{p^{x-1}},$$

so werden diese für das Modulsystem (M) den x linearen Formen

$$(6.)\qquad w_1,\quad w_2,\quad w_3,\quad \ldots\quad w_x$$

beziehungsweise congruent sein, wenn allgemein

$$(7.)\qquad w_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} u_\beta \xi_\beta^{p^{\alpha-1}} \qquad (\alpha=1,2,\dots \varkappa)$$

gesetzt ist.

Diese $\varkappa$ Formen sind für variable u modulo P_1 von einander verschieden; wäre nämlich etwa

$$w_{\alpha-1} \equiv w_{\gamma-1} \pmod{P_1},$$

so bestünde für das Modulsystem (M) die Congruenz

$$w_1^{p^\gamma} \equiv w_1^{p^\alpha} \pmod{M}.$$

Ist nun z. B. $\alpha > \gamma$, so erhebe man beide Seiten zur $(p^{\varkappa-\alpha})^{\text{ten}}$ Potenz, dann ergiebt sich mit Berücksichtigung von (4.):

$$(8.)\qquad w_1^{p^{\varkappa-(\alpha-\gamma)}} \equiv w_1 \pmod{M}.$$

Diese Congruenz streitet aber gegen die Annahme, dass $\varkappa$ der niedrigste Exponent ist, für den eine Congruenz der Form (4.) besteht. Mithin sind in der That die $\varkappa$ Formen (6.) modulo P_1 verschieden.

Hieraus folgt weiter, dass ihre Discriminante

$$(9.)\qquad D(w) = \prod_{h>i} (w_h - w_i) \qquad (h, i = 1, 2, \dots \varkappa)$$

für variable u durch P_1 nicht theilbar ist. Die Form $D(w)$ lässt sich aber bekanntlich in Determinantengestalt darstellen, und zwar ist

$$(10.)\qquad D(w) = |w_h^g| \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=1,2,\dots \varkappa \\ g=0,1,\dots \varkappa-1 \end{smallmatrix}\right).$$

Da nun w_1 eine Fundamentalform ist, so kann man die Glieder der ersten Verticalreihe von D auf die Gestalt bringen:

$$(11.)\qquad w_1^g = \sum_{h=1}^{n} U_{gh}\xi_h \qquad (g=0,\dots \varkappa-1),$$

wo die Coefficienten U_{gh} homogene ganzzahlige Functionen der g^{ten} Dimension der Unbestimmten $u_1, \dots u_n$ sind. Berücksichtigt man, dass sich die Producte und Potenzen z. B. der n Zahlen

$$(12.)\qquad \xi_1^{p^\alpha},\ \xi_2^{p^\alpha},\ \dots,\ \xi_n^{p^\alpha} \qquad (\alpha=1,2,\dots \varkappa-1),$$

modulo P_1 betrachtet, durch genau dieselben ganzzahligen homogenen linearen Functionen der n Zahlen (12.) darstellen lassen, wie dies für $\alpha=0$ durch die Elemente des Fundamentalsystems geschieht, so findet man aus (11.) die folgende Darstellung aller $\varkappa^2$ Elemente von $D(w)$:

$$(13.)\qquad w_h^g \equiv \Sigma U_{gh}\xi_h^{p^{h-1}} \pmod{P_1} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h=1,2,\dots \varkappa \\ g=0,1,\dots \varkappa-1 \end{smallmatrix}\right).$$

Wenn diese Ausdrücke für die Formen w_λ^ϱ in (10.) substituirt werden, so lässt sich die Determinante nach dem erweiterten Multiplicationssatze entwickeln und ergiebt sich als das Product der beiden rechteckigen Determinanten:

$$(14.)\qquad D(w) \equiv |\xi_\lambda^{p^a}| . |U_{a\lambda}| \pmod{P_1} \qquad \binom{\lambda=1,\ldots n}{a=0,1,\ldots \varkappa-1}.$$

Man erhält also $D(w)$ als homogene lineare Function der sämmtlichen aus der rechteckigen Determinante

$$(15.)\qquad |\xi_\lambda^{p^a}| \qquad \binom{\lambda=1,2,\ldots n}{a=0,1,\ldots \varkappa-1}$$

sich ergebenden Determinanten $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung mit ganzen ganzzahligen Functionen der Variablen $u_1, \ldots u_n$ als Coefficienten. Angenommen nun, alle diese Determinanten enthielten P_1 als Factor, so müsste dasselbe von $D(w)$ gelten, eine Voraussetzung, deren Unrichtigkeit soeben dargethan worden ist. —

Es muss also mindestens eine der aus (15.) sich ergebenden Determinanten $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung existiren, welche durch P_1 nicht theilbar ist. Da über die Bezeichnung der Elemente des Fundamentalsystems noch nichts vorausgesetzt worden ist, so sollen dieselben so gewählt werden, dass die Determinante

$$(16.)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_\varkappa \\ \xi_1^p & \xi_2^p & \ldots & \xi_\varkappa^p \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \xi_1^{p^{\varkappa-1}} & \xi_2^{p^{\varkappa-1}} & \ldots & \xi_\varkappa^{p^{\varkappa-1}} \end{vmatrix}$$

durch P_1 nicht divisibel ist. Das Quadrat von $\varDelta$ ist einer reellen ganzen Zahl congruent. Erhebt man nämlich $\varDelta$ zur p^{ten} Potenz und lässt die Vielfachen von p fort, so vertauschen sich die $\varkappa$ Horizontalreihen cyklisch, $\varDelta^2$ bleibt somit ungeändert. Also ist $\varDelta^2$ eine ganze algebraische Zahl des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$), die der Congruenz

$$(\varDelta^2)^p - (\varDelta^2) \equiv 0 \pmod{P_1}$$

genügt; und da die p reellen Zahlen $0, 1, 2, \ldots (p-1)$ die sämmtlichen incongruenten Wurzeln dieser Congruenz sind, so folgt

$$(17.)\qquad \varDelta^2 \equiv a \pmod{P_1},$$

wo a eine bestimmte reelle ganze, durch p nicht theilbare Zahl bedeutet.

Mit Hülfe der soeben erlangten Resultate kann man den folgenden Fundamentalsatz beweisen:

Sind $\xi_1, \dots \xi_\varkappa$ $\varkappa$ Zahlen eines beliebigen Fundamentalsystems von ($\mathfrak{G}$), deren Determinante

$$|\xi_h^{p^\delta}| \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \dots \varkappa \\ \delta = 0, 1, \dots \varkappa-1 \end{pmatrix}$$

modulo P_1 nicht verschwindet, so lässt sich jede ganze algebraische Zahl ξ des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) für den Modul P_1 auf eine und nur auf eine Weise in die Form

$$(18.) \qquad u_1\xi_1 + \dots + u_\varkappa \xi_\varkappa$$

setzen, wenn die Coefficienten u die Werthe

$$0, \ 1, \ \dots \ (p-1)$$

annehmen dürfen. Die Anzahl aller modulo P_1 incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) ist demnach gleich $p^\varkappa$.

Zunächst kann man zeigen, dass alle in der Form (18.) dargestellten Zahlen modulo P_1 incongruent sind. Wären nämlich zwei derselben

$$w_1^{(1)} = u_1^{(1)}\xi_1 + \dots + u_\varkappa^{(1)}\xi_\varkappa,$$
$$w_1^{(2)} = u_1^{(2)}\xi_1 + \dots + u_\varkappa^{(2)}\xi_\varkappa$$

einander congruent, ohne gleich zu sein, so müsste ihre Differenz

$$w_0 = w_1^{(2)} - w_1^{(1)} = u_1^{(0)}\xi_1 + \dots + u_\varkappa^{(0)}\xi_\varkappa$$

durch P_1 theilbar sein, ohne dass alle Coefficienten $u^{(0)}$ den Werth 0 haben. Ist aber die Congruenz

$$w_0 \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1)$$

erfüllt, so muss sie bestehen bleiben, wenn man sie $(\varkappa-1)$-mal zur p^{ten} Potenz erhebt. Daraus ergeben sich die $\varkappa$ Congruenzen

$$(19.) \qquad u_1^{(0)}\xi_1^{p^\alpha} + u_2^{(0)}\xi_2^{p^\alpha} + \dots + u_\varkappa^{(0)}\xi_\varkappa^{p^\alpha} \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1) \qquad (\alpha = 0, 1, \dots \varkappa-1).$$

Aus ihnen folgt aber, dass die $\varkappa$ Zahlen u sämmtlich durch p theilbar sein müssen. In der That, multiplicirt man die $\varkappa$ Congruenzen mit denjenigen Unterdeterminanten der $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Adjungirten etwa der ersten Verticalreihe der Determinante Δ in (18.) sind, so erhält man

$$(20.) \qquad u_1^{(0)}\Delta \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1);$$

und da Δ durch P_1 nicht theilbar, $u_1^{(0)}$ nach der Voraussetzung eine ganze reelle Zahl ist, so muss $u_1^{(0)}$ sowohl P_1, also auch p als Factor enthalten. Dies ist aber dann und nur dann möglich, wenn $u_1^{(0)} = 0$ ist, weil jeder der $\varkappa$ Coefficienten von w_0 offenbar nur die Werthe

$$0, \quad \pm 1, \quad \ldots \quad \pm(p-1)$$

annehmen kann. Genau dasselbe lässt sich auch von allen übrigen Coefficienten $u_\alpha^{(i)}$ nachweisen. Demnach erkennt man, dass unter den soeben angegebenen Beschränkungen zwei Zahlen $w_1^{(1)}$ und $w_1^{(2)}$ nur dann modulo P_1 congruent sind, wenn sie einander gleich sind, dass also alle Zahlen der Form (18.) modulo P_1 incongruent sind.

Um jetzt zu beweisen, dass man die Coefficienten u in (18.) so bestimmen kann, dass für eine beliebige Zahl ξ des Bereiches $(\mathfrak{G})$ die Congruenz erfüllt ist:

$$(21.) \qquad u_1\xi_1 + \cdots + u_\varkappa \xi_\varkappa \equiv \xi \quad (\text{mod. } P_1),$$

berücksichtige man, dass dieselbe nach den soeben gemachten Bemerkungen wieder das folgende Congruenzensystem nach sich zieht, sobald die u als reelle Zahlen bestimmt werden sollen:

$$(22.) \qquad u_1\xi_1^{p^\alpha} + \cdots + u_\varkappa \xi_\varkappa^{p^\alpha} \equiv \xi^{p^\alpha} \quad (\text{mod. } P_1) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots \varkappa-1).$$

Hierdurch sind, da die Determinante Δ durch P_1 nicht theilbar ist, die u als Zahlen des Gattungsbereiches für den Modul P_1 eindeutig bestimmt. Die Zahlen nun, welche sich aus (22.) für die u ergeben, sind modulo P_1 betrachtet ganz. Der einzige Nenner nämlich, welcher auftreten kann, ist offenbar Δ^2; und da dieses Determinantenquadrat einer reellen Zahl a congruent ist, so kann man den Nenner fortschaffen, indem man, anstatt mit Δ^2 zu dividiren, mit einer reellen Zahl a_1 multiplicirt, die der Bedingung

$$aa_1 \equiv 1 \quad (\text{mod. } p)$$

genügt.

Es ist also nur noch zu zeigen, dass die Zahlen u auch reell sind. Zu diesem Ende denke man sich die $\varkappa$ Congruenzen (22.) zur p^{ten} Potenz erhoben. Lässt man Vielfache von p fort, so erhält man genau dasselbe System wieder, in welchem nur an Stelle der Grössen $u_1, \ldots u_\varkappa$ ihre p^{ten} Potenzen getreten sind; ausserdem haben sich die Congruenzen cyklisch um eine Stelle verschoben. Zieht man diese neuen Congruenzen, denen die vorher bestimmten Grössen u offenbar ebenfalls genügen, von den entsprechenden des Systems (22.) ab, so wird:

$$(23.) \qquad (u_1^p - u_1)\xi_1^{p^\alpha} + \cdots + (u_\varkappa^p - u_\varkappa)\xi_\varkappa^{p^\alpha} \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1) \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots \varkappa-1);$$

und aus dem vorhin durchgeführten Beweise folgt unmittelbar, dass diese

$\varkappa$ Congruenzen dann und nur dann bestehen können, wenn man zugleich hat

$$(24.)\qquad u_\beta^p \equiv u_\beta \pmod{P_1} \qquad (\beta = 1, \dots \varkappa).$$

Folglich sind alle Coefficienten u in der That reellen ganzen Zahlen congruent und durch die Bedingung (21.) modulo P_1 eindeutig bestimmt. Die Form (18.) ist also modulo P_1 eine nothwendige reducirte Form für alle ganzen Zahlen des Bereiches ($\mathfrak{G}$).

Legt man demnach den Coefficienten u in (18.) unabhängig von einander die Werthe $0, 1, \dots (p-1)$ bei, so erhält man ein vollständiges Restsystem für die Gattung $\mathfrak{G}$ und den Modul P_1; und da die Anzahl der so gewonnenen Zahlen offenbar $p^\varkappa$ ist, so hat man den folgenden Satz:

Ist $p^\varkappa$ die niedrigste Potenz von p, für welche die Congruenz

$$(25.)\qquad w_1^{p^\varkappa} \equiv w_1 \quad (\text{modd. } P_1, \dots u_\alpha^p - u_\alpha, \dots)$$

erfüllt ist, so kann man durch eine endliche Anzahl von Operationen aus einem beliebig vorgelegten Fundamentalsystem

$$\xi_1, \dots \xi_n$$

$\varkappa$ Zahlen

$$\xi_1, \dots \xi_\varkappa$$

so auswählen, dass sich jede Zahl des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) auf eine und nur auf eine Weise in die Form

$$(26.)\qquad u_1\xi_1 + \cdots + u_\varkappa \xi_\varkappa \qquad \begin{pmatrix} u_\alpha = 0, 1, \dots (p-1) \\ \alpha = 1, 2, \dots \varkappa \end{pmatrix}$$

setzen lässt. Die Anzahl aller modulo P_1 incongruenten Zahlen des Bereiches ist somit $p^\varkappa$.

Ein System von $\varkappa$ Zahlen $\xi_1, \dots \xi_\varkappa$, durch welches jede Zahl des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) in der Form (26.) dargestellt werden kann, soll ein *Fundamentalsystem* für die Gattung $\mathfrak{G}$ und den Modul P_1 genannt werden.

§ 3.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen ist der folgende:

Jede ganze algebraische Zahl des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) ist eine Wurzel der Congruenz

$$(1.)\qquad w^{p^\varkappa} - w \equiv 0 \pmod{P_1},$$

und die Congruenz (1.) ist die niedrigste dieser Art, welche für *alle* Zahlen des Bereiches besteht.

Im allgemeinen bedarf dieser Satz immer noch eines besonderen Beweises; hier wird derselbe durch die Methode, welche zur Aufstellung eines vollständigen Restensystems für den Modul P_1 geführt hat, selbstverständlich. — Setzt man nämlich in der Congruenz (25.) des vorigen Paragraphen für die Variabeln

$$u_1, \quad . \; . \; . \quad u_n$$

beliebige reelle ganze Zahlen und berücksichtigt, dass dann die Elemente $u_a^p - u_a$ des Modulsystems (M) durch P_1 theilbar werden, so erhält man die für jede Zahl des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$ gültige Congruenz

$$w^{p^x} - w \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1).$$

Ebenso leicht kann man nachweisen, dass alle Zahlen des Bereiches $(\mathfrak{G})$ keiner niederen Congruenz von der Form

$$w^{p^{x_1}} - w \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1) \qquad (x_1 < x)$$

genügen können. Wäre dieselbe für ein bestimmtes x_1 immer erfüllt, so bestünde sie auch für die Fundamentalform w_1 bei allen ganzzahligen Werthen der Unbestimmten $u_1, \ldots u_n$. Nach dem in § 1 angeführten Satze würde sich aber hieraus für variable u die Congruenz

$$(2.) \qquad w_1^{p^{x_1}} - w_1 \equiv 0 \quad (\text{modd. } P_1, \ldots u_a^p - u_a, \ldots)$$

ergeben. Diese stünde mit der Annahme in Widerspruch, dass die Potenz p^x die niedrigste ist, für die eine Congruenz der Form (2.) besteht.

Bezeichnet man die in (26.) des vorigen Paragraphen gefundenen p^x modulo P_1 incongruenten Zahlen

$$(3.) \qquad u_1 \xi_1 + \cdots + u_x \xi_x \qquad \left(\begin{smallmatrix} u_a = 0, 1, \ldots (p-1) \\ a = 1, 2, \ldots x \end{smallmatrix} \right)$$

in einer beliebigen Reihenfolge mit

$$(4.) \qquad w_1, \quad w_2, \quad . \; . \; . \quad w_s,$$

wo

$$s = p^x \quad \text{und} \quad w_1 = 0$$

sein soll, so sind die s Zahlen (4.) die sämmtlichen incongruenten Wurzeln der Congruenz (1.) innerhalb des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$. Einmal nämlich genügen sie alle dieser Congruenz, und zweitens kann eine Congruenz für einen Primzahlmodul nicht mehr incongruente Wurzeln besitzen, als ihr Grad angiebt. Hieraus folgt endlich noch, dass für ein variables w die Congruenz bestehen muss:

$$(5.)\qquad w^{p^\varkappa}-w \equiv \prod_{h=1}^{h=s}(w-w_h) \quad (\text{mod. } P_1),$$

denn die Differenz beider Seiten ist in Bezug auf w höchstens vom Grade $p^\varkappa-1$, und da sie offenbar für $p^\varkappa$ incongruente Werthe von w modulo P_1 verschwindet, so muss dasselbe auch für ein variables w der Fall sein.

Es war schon im vorigen Paragraphen erwähnt worden, dass von den n Zahlen des Fundamentalsystems der Gattung $\mathfrak{G}$ eine jede einer Congruenz von der Form

$$(6.)\qquad \xi_h^{p^{\varkappa_h}}-\xi_h \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1) \qquad\qquad (h=1,\dots n)$$

genügen kann, in der $\varkappa_h < \varkappa$, wenn nur $\varkappa$ das kleinste gemeinsame Vielfache aller Zahlen $\varkappa_h$ ist. Es ist daher die Frage berechtigt, ob *alle* $p^\varkappa$ modulo P_1 incongruenten Zahlen des Bereiches $(\mathfrak{G})$ vielleicht niederen Congruenzen der Gestalt (6.) genügen können, oder ob mindestens eine Zahl ξ existirt, für welche die Congruenz

$$(7.)\qquad \xi^{p^\varkappa}-\xi \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1)$$

die niedrigste Congruenz von der Form (6.) ist.

Es würde leicht sein, eine solche Zahl wirklich herzustellen; dasselbe Resultat wird sich aber viel ungezwungener auf dem folgenden Wege ergeben. Offenbar ist es stets möglich, durch eine endliche Anzahl von Operationen zu einer jeden der $p^\varkappa$ incongruenten Zahlen w_h den niedrigsten Exponenten $\varkappa_h$ zu bestimmen, für den die Congruenz

$$(8.)\qquad w_h^{p^{\varkappa_h}}-w_h \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1)$$

noch erfüllt ist. Rechnet man alsdann alle diejenigen Zahlen w_h, für welche dieser kleinste Exponent $\varkappa_h$ derselbe ist, in eine Klasse, so ergiebt sich hieraus eine Eintheilung der $p^\varkappa$ modulo P_1 incongruenten Zahlen des Bereiches $(\mathfrak{G})$, welche, wie sich später zeigen wird, durchaus naturgemäss ist.

Zunächst lässt sich nachweisen, dass für eine jede Zahl w_h der gesuchte kleinste Exponent $\varkappa_h$ von p nothwendig ein Theiler von $\varkappa$ sein muss. Ist nämlich

$$(9.)\qquad w_h^{p^{\varkappa_h}} \equiv w_h \quad (\text{mod. } P_1),$$

und erhebt man diese Congruenz wiederholt zur $(p^{\varkappa_h})^{\text{ten}}$ Potenz, so folgt für jedes ganzzahlige m

$$(10.)\qquad w_h^{p^{m\varkappa_h}} \equiv w_h \quad (\text{mod. } P_1).$$

Ist nun $\varkappa_h$ der kleinste, von Null verschiedene Exponent von p, für den die Congruenz (9.) besteht, so kann man für den Fall, dass $\varkappa_h$ in $\varkappa$ nicht enthalten ist, die letztere Zahl jedenfalls auf die Form bringen

$$(11.)\qquad \varkappa = m\varkappa_h + \bar{\varkappa}_h,$$

wo m eine ganze positive Zahl und $\bar{\varkappa}_h$ kleiner als $\varkappa_h$, aber grösser als Null ist. Da nun für jede Zahl w_h die Congruenz besteht

$$(12.)\qquad w_h^{p^\varkappa} = w_h^{p^{m\varkappa_h+\bar{\varkappa}_h}} = (w_h^{p^{m\varkappa_h}})^{p^{\bar{\varkappa}_h}} \equiv w_h \quad (\text{mod. } P_1),$$

so würde man mit Rücksicht auf (10.) erhalten

$$(13.)\qquad w_h^{p^{\bar{\varkappa}_h}} \equiv w_h \quad (\text{mod. } P_1) \qquad\qquad (0 < \bar{\varkappa}_h < \varkappa_h),$$

was der Voraussetzung widerspräche, dass $\varkappa_h$ die kleinste Zahl ist, für welche eine Congruenz von der Form (10.) erfüllt ist.

Ist ferner w_h eine Zahl, die der Congruenz genügt

$$(14.)\qquad w^{p^{\varkappa_h}} - w \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1),$$

so kann sie nicht mehrfache Wurzel derselben sein; denn sonst müsste auch

$$(15.)\qquad \frac{w^{p^{\varkappa_h}} - w}{w - w_h} = \frac{(w^{p^{\varkappa_h}} - w_h^{p^{\varkappa_h}}) - (w - w_h)}{w - w_h}$$

durch P_1 theilbar werden, sobald man $w = w_h$ annimmt. Dann verwandelt sich aber der Ausdruck (15.), modulo P_1 betrachtet, in

$$p^{\varkappa_h} w_h^{p^{\varkappa_h}-1} - 1,$$

und diese Zahl ist durch P_1 nicht divisibel, da sie für diesen Modul stets den Werth -1 annimmt. Also enthält die Congruenz (14.) überhaupt keine gleichen Wurzeln.

Alle Zahlen des Bereiches ($\mathfrak{G}$), welche Wurzeln der Congruenz (14.) sind, bilden zusammengefasst einen Bereich, dessen Individuen sich durch Addition und Multiplication, modulo P_1 betrachtet, wieder erzeugen. Sind nämlich w_1 und w_2 zwei beliebige dem erwähnten Bereiche angehörige Zahlen, so ist:

$$\left.\begin{aligned} (w_1 + w_2)^{p^{\varkappa_h}} &\equiv w_1^{p^{\varkappa_h}} + w_2^{p^{\varkappa_h}} \equiv w_1 + w_2 \\ (w_1 w_2)^{p^{\varkappa_h}} &\equiv w_1^{p^{\varkappa_h}} w_2^{p^{\varkappa_h}} \equiv w_1 w_2 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod. } P_1);$$

es gehören also in der That $w_1 + w_2$ und $w_1 w_2$ zu demselben Bereiche wie

w_1 und w_2 selbst. Aus diesem sowie aus anderen später zu erörternden Gründen will ich die folgenden drei Definitionen aufstellen:

I. Eine Zahl w, die der Congruenz

$$w^{p^{\varkappa_h}} - w \equiv 0 \pmod{P_1}$$

genügt, gehört für den Primdivisor P_1 zu einem Gattungsbereich (Γ_h) der Ordnungszahl $\varkappa_h$.

II. Genügt eine Zahl w der Congruenz

$$w^{p^{\varkappa_h}} - w \equiv 0 \pmod{P_1}$$

und keiner anderen von derselben Form, in der der Exponent $\bar{\varkappa}_h$ kleiner als $\varkappa_h$ ist, so soll w als zur Gattung Γ_h der Ordnungszahl $\varkappa_h$ oder als zur Ordnungszahl $\varkappa_h$ für den Divisor P_1 gehörig bezeichnet werden.

III. Eine Gattung der Ordnungszahl $\varkappa_h$ ist unter einer anderen der Ordnungszahl $\varkappa'_h$ enthalten, wenn $\varkappa_h$ ein Theiler von $\varkappa'_h$ ist.

§ 4.

Es soll nun zunächst die Anzahl derjenigen incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$ gefunden werden, welche (nach der Definition I. am Schlusse des vorigen Paragraphen) modulo P_1 zu einem Gattungsbereich der Ordnungszahl $\varkappa_h$ gehören, wenn $\varkappa_h$ ein Theiler von $\varkappa$, also $\varkappa = \varkappa_h \bar{\varkappa}_h$ ist.

Diese Frage lässt sich in sehr einfacher Weise entscheiden. Es wird nämlich gelingen, für diesen Gattungsbereich ebenfalls ein Fundamentalsystem modulo P_1 zu bestimmen, welches aber jetzt nur $\varkappa_h$ Elemente enthält; und hieraus folgt dann, dass $p^{\varkappa_h}$ die Anzahl aller incongruenten Zahlen dieses Bereiches ist.

Denkt man sich nämlich in der Determinante

$$(1.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\varkappa \\ \xi_1^p & \xi_2^p & \dots & \xi_\varkappa^p \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \xi_1^{p^{\varkappa-1}} & \xi_2^{p^{\varkappa-1}} & \dots & \xi_\varkappa^{p^{\varkappa-1}} \end{vmatrix}$$

die $\varkappa_h$ ersten Horizontalreihen in der Weise geändert, dass man allgemein zur λ^{ten} Horizontalreihe alle diejenigen Horizontalreihen addirt, deren Stellenzahl modulo $\varkappa_h$ congruent λ ist, so wird hierdurch der Werth von Δ nicht

geändert. Die $\varkappa_h$ Zahlen, welche dann an die Stelle z. B. von $\xi_1, \xi_1^p, \ldots \xi_1^{p^{\varkappa_h-1}}$ treten, mögen sein $\bar{\xi}_{10}, \bar{\xi}_{11}, \ldots \bar{\xi}_{1,\varkappa_h-1}$; dann ist

$$(2.)\qquad \bar{\xi}_{1,\delta} = \sum_{\gamma=0}^{\varkappa_h-1} \xi_1^{p^{\gamma\varkappa_h+\delta}} \qquad (\delta=0,1,\ldots \varkappa_h-1).$$

Hieraus ergiebt sich aber wieder, dass die Zahlen

$$\bar{\xi}_{10},\quad \bar{\xi}_{11},\quad \ldots\quad \bar{\xi}_{1,\varkappa_h-1}$$

den Zahlen

$$\bar{\xi}_{10},\quad \bar{\xi}_{10}^p,\quad \ldots\quad \bar{\xi}_{10}^{p^{\varkappa_h-1}}$$

beziehungsweise congruent sind, und dasselbe wird für die übrigen Zahlen der $\varkappa_h$ ersten Horizontalreihen gelten. Nennt man daher die $\varkappa$ Elemente der umgeformten ersten Horizontalreihe

$$(3.)\qquad \zeta_1,\quad \zeta_2,\quad \ldots\quad \zeta_\varkappa,$$

so wird man für die $\varkappa_h$ ersten Reihen modulo P_1 die folgenden Zahlen schreiben können

$$(4.)\qquad \begin{cases} \zeta_1 & \zeta_2 & \ldots \zeta_\varkappa, \\ \zeta_1^p & \zeta_2^p & \ldots \zeta_\varkappa^p, \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \zeta_1^{p^{\varkappa_h-1}} & \zeta_2^{p^{\varkappa_h-1}} & \ldots \zeta_\varkappa^{p^{\varkappa_h-1}}. \end{cases}$$

Ferner ergiebt sich aus der Darstellung (2.) der Zahlen (4.), dass sie alle modulo P_1 zum Gattungsbereiche (Γ_h) der Ordnung $\varkappa_h$ gehören. Denkt man sich nämlich $\bar{\xi}_{1\delta}$ zur $(p^{\varkappa_h})^{\text{ten}}$ Potenz erhoben, so werden sich in der Summe auf der rechten Seite der Gleichung (2.) die Summanden cyklisch um eine Stelle verschieben, die Summe selbst wird also ungeändert bleiben.

Denkt man sich jetzt die Determinante $\varDelta$ in (1.) nach ihren neuen $\varkappa_h$ ersten Horizontalreihen entwickelt, so ergiebt sie sich als homogene lineare Function derjenigen $\varkappa_h$-gliedrigen Determinanten, welche man aus dem rechteckigen Systeme (4.) bilden kann. Hieraus folgt wieder, dass mindestens eine dieser Determinanten durch P_1 nicht theilbar sein kann, da es im entgegengesetzten Fall auch $\varDelta$ sein müsste.

Es mögen die Elemente des Fundamentalsystems für die Gattung $\mathfrak{G}$ so angeordnet angenommen werden, dass die Determinante

$$(5.)\qquad \varDelta_{\varkappa_h} = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \ldots \zeta_{\varkappa_h} \\ \zeta_1^p & \zeta_2^p & \ldots \zeta_{\varkappa_h}^p \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \zeta_1^{p^{\varkappa_h-1}} & \zeta_2^{p^{\varkappa_h-1}} & \ldots \zeta_{\varkappa_h}^{p^{\varkappa_h-1}} \end{vmatrix}$$

den Divisor P_1 sicher nicht als Factor enthält. Dann beweist man wörtlich ebenso, wie dies vorher für die Gattung von der Ordnung $\varkappa$ geschehen ist, dass die $\varkappa_h$ Zahlen

$$(6.)\quad \zeta_1,\ \zeta_2,\ \dots\ \zeta_{\varkappa_h}$$

für den Gattungsbereich der Ordnung $\varkappa_h$ in der Weise ein Fundamentalsystem bilden, dass jede zu ihm gehörige Zahl auf eine und nur auf eine Weise in die Form

$$(7.)\quad u_1\zeta_1+u_2\zeta_2+\cdots+u_{\varkappa_h}\zeta_{\varkappa_h} \qquad \binom{u_\alpha=0,1,\dots p-1}{\alpha=1,2,\dots \varkappa_h}$$

gebracht werden kann. Demnach ist die Anzahl aller incongruenten zum Gattungsbereiche (Γ_h) der Ordnungszahl $\varkappa_h$ gehörenden Zahlen gleich $p^{\varkappa_h}$.

Jede Zahl ζ des Gattungsbereiches der Ordnung $\varkappa_h$ genügt der Congruenz

$$(8.)\quad \zeta^{p^{\varkappa_h}}-\zeta \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1),$$

und umgekehrt ist jede Zahl, welche der Congruenz (8.) genügt, einer der $p^{\varkappa_h}$ Zahlen congruent, die man aus (7.) erhält, indem man den Coefficienten alle ihnen zukommenden Werthe beilegt. Sind wieder

$$(9.)\quad w_{1,h},\ w_{2,h},\ \dots\ w_{s_h,h}$$

die $s_h = p^{\varkappa_h}$ incongruenten Zahlen des Bereiches (Γ_h), so besteht für ein variables w die Congruenz

$$(10.)\quad w^{p^{\varkappa_h}}-w \equiv \prod_{i=1}^{s_h}(w-w_{i,h}) \quad (\text{mod. } P_1).$$

Die nächste Aufgabe, welche hier gelöst werden soll, ist die Beantwortung der Frage nach der Anzahl der zu einer Gattung Γ_h von der Ordnungszahl $\varkappa_h$ gehörigen incongruenten ganzen algebraischen Zahlen. Es bezeichne

$$(11.)\quad g(\varkappa_h)$$

diese Anzahl. Nimmt man dann die Gesammtheit aller derjenigen ganzen algebraischen Zahlen, welche zum Bereiche (Γ_h) gehören, so gehören zu ihm alle diejenigen incongruenten Zahlen und nur diese, welche zur Gattung Γ_h selbst und die, welche zu allen unter Γ_h enthaltenen Gattungen gehören, d. h. diejenigen, deren Ordnungszahl ein Theiler von $\varkappa_h$ ist. Die Summe aller dieser Zahlen muss also gleich $p^{\varkappa_h}$ sein. Mit Benutzung der Bezeichnung (11.) erhält man also die für jeden Theiler $\varkappa_h$ von $\varkappa$ gültigen

Gleichungen

$$(12.)\qquad \sum_{d\,|\,\varkappa_h} g(d) = p^{\varkappa_h},$$

wo auf der linken Seite über alle Theiler d von $\varkappa_h$ zu summiren ist. *Dirichlet* hat zuerst eine Methode gegeben, um Gleichungen von dieser Form direct aufzulösen. Die Auflösung wird sehr übersichtlich durch die Benutzung eines Symboles, von dem Herr *Kronecker* in seinen Universitätsvorlesungen häufigen Gebrauch zu machen pflegt.

Sei nämlich d ein beliebiger Theiler einer Zahl $\varkappa_h$, so soll dem Symbole ε_d der Werth 0 beigelegt werden, wenn der Quotient $\frac{\varkappa_h}{d}$ irgend welche gleichen Primfactoren enthält. Sind dagegen alle Primfactoren von $\frac{\varkappa_h}{d}$ von einander verschieden, so soll ε_d gleich $+1$ oder -1 angenommen werden, je nachdem die Anzahl dieser Primtheiler eine gerade oder ungerade ist.

Mit Benutzung dieses Symbols kann man die Auflösung des Gleichungssystems (12.) folgendermassen schreiben:

$$(13.)\qquad g(\varkappa_h) = \sum_{d\,|\,\varkappa_h} \varepsilon_d p^d.$$

Man überzeugt sich sehr leicht, dass diese Ausdrücke für $g(\varkappa_h)$ nie verschwinden können (es sind zu diesem Zwecke von Herrn *Serret* in seiner in der Einleitung citirten Arbeit einfache Grenzen für $g(\varkappa_h)$ aufgestellt worden), und hieraus ergiebt sich auch das vorhin erwähnte Resultat: dass in der That stets Zahlen w existiren, welche modulo P_1 zu einer Gattung Γ_h von der Ordnung $\varkappa_h$ gehören, falls $\varkappa_h$ ein Theiler von $\varkappa$ ist.

Die soeben angewendete Methode ergiebt auch diejenige Congruenz, der alle Zahlen einer Gattung Γ_h der Ordnungszahl $\varkappa_h$ und nur diese genügen.

Es sei nämlich $\varkappa_h$ irgend ein Divisor von $\varkappa$, so befriedigen alle $p^{\varkappa_h}$ zum Gattungsbereiche (Γ_h) gehörigen Zahlen die Congruenz

$$(14.)\qquad w^{p^{\varkappa_h}} - w \equiv 0 \pmod{P_1};$$

und für ein variables w besteht die Congruenz

$$(15.)\qquad w^{p^{\varkappa_h}} - w \equiv \prod_{i=1}^{s} (w - w_{i,h}) \pmod{P_1},$$

aus der auch hervorgeht, dass jede der $p^{\varkappa_h}$ incongruenten Zahlen w_{ih} nur

eine einfache Wurzel der Congruenz (14.) ist. Fasst man nun auf der rechten Seite von (15.) immer diejenigen $g(d)$ Differenzen $(w-w_{i,k})$ in ein Product $V_d(w)$ zusammen, deren Wurzeln modulo P_1 zu derselben Gattung Γ_d der Ordnungszahl d gehören, so wird man alle Congruenzwurzeln von (14.) und jede auch nur einmal erhalten, wenn man für d der Reihe nach alle Divisoren von $\varkappa_h$ setzt. Also besteht für jeden Divisor $\varkappa_h$ von $\varkappa$ die Congruenz

$$(16.)\qquad w^{p^{\varkappa_h}}-w \equiv \prod_{d\,|\,\varkappa_h} V_d(w) \pmod{P_1},$$

wo das Product rechts über alle Divisoren von $\varkappa_h$ zu erstrecken ist.

Nimmt man in (16.) auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man eine ebensolche Congruenz wie die vorher behandelte. Löst man dieselbe in der dort angegebenen Weise auf und geht wieder von den Logarithmen zu den Functionen selbst über, so erhält man

$$(17.)\qquad V_{\varkappa_h}(w) = \prod_{d\,|\,\varkappa_h} (w^{p^d}-w)^{\varepsilon_d}.$$

Das Resultat dieses Paragraphen kann man so aussprechen:

IV. Die Anzahl aller incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches $(\mathfrak{G})$, welche modulo P_1 zu einer Gattung Γ_h der Ordnungszahl $\varkappa_h$ gehören, ist

$$g(\varkappa_h) = \sum_{d\,|\,\varkappa_h} \varepsilon_d . p^d,$$

und diese $g(\varkappa_h)$ Zahlen sind die sämmtlichen incongruenten Wurzeln der ganzzahligen Congruenz des Grades $g(\varkappa_h)$:

$$V_{\varkappa_h}(w) = \prod_{d\,|\,\varkappa_h} (w^{p^d}-w)^{\varepsilon_d} \equiv 0 \pmod{P_1}.$$

§ 5.

Ich wende mich jetzt derjenigen Eintheilung der $p^{\varkappa}$ Zahlen des Restensystems von $(\mathfrak{G})$ für den Modul P_1 zu, welche auch in der elementaren Zahlentheorie auftritt, nämlich der Anordnung dieser Zahlen nach dem Exponenten, zu dem sie modulo P_1 gehören.

Aus den Resultaten des vorigen Paragraphen ergiebt sich nämlich, dass jede dem Gattungsbereiche $(\mathfrak{G})$ angehörige ganze Zahl w, welche durch P_1 nicht theilbar ist, der Congruenz

$$(1.)\qquad w^{p^{\varkappa}-1} \equiv 1 \pmod{P_1}$$

genügt. Offenbar kann auch eine niedere Potenz einer solchen Zahl w für den betrachteten Modul congruent Eins sein, und man kann sich die Aufgabe stellen, zu jeder Zahl w_1 den kleinsten von Null verschiedenen Exponenten σ_1 zu bestimmen, für welchen

$$(2.)\quad w_1^{\sigma_1} \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, P_1)$$

ist; dieselbe lässt sich offenbar durch eine endliche Anzahl von Versuchen finden; es soll dann w_1 als zum Exponenten σ_1 modulo P_1 gehörig bezeichnet werden.

Setzt man zur Abkürzung

$$(3.)\quad p^{\varkappa}-1 = \sigma,$$

so kann man wieder leicht zeigen, dass ein jeder Exponent σ_1, zu dem überhaupt eine Zahl w_1 gehören kann, ein Theiler von σ sein muss. Ist nämlich σ_1 der niedrigste Exponent von w_1, für den eine Congruenz von der Form (2.) erfüllt ist, so muss jede andere Zahl $\bar{\sigma}_1$, für welche die Congruenz stattfindet:

$$(4.)\quad w_1^{\bar{\sigma}_1} \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, P_1)$$

ein ganzes Vielfaches von σ_1 sein; da aber σ selbst nach (1.) zu den Zahlen $\bar{\sigma}_1$ gehört, so muss σ durch σ_1 theilbar sein.

Es sei nun σ_1 ein beliebiger Theiler von σ, so werden diejenigen Zahlen w, welche zum Exponenten σ_1 gehören, Wurzeln der Congruenz

$$(5.)\quad w^{\sigma_1}-1 \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, P_1)$$

sein müssen. Ist ferner w_1 eine zum Exponenten σ_1 gehörige Zahl, so genügen, wie man sich sofort überzeugt, die Zahlen

$$(6.)\quad 1,\ w_1,\ w_1^2,\ \ldots\ w_1^{\sigma_1-1}$$

sämmtlich der Congruenz (5.). Ebenso leicht erkennt man, dass die Zahlen (6.) modulo P_1 verschieden sind, da im entgegengesetzten Fall w_1 zu einem niederen Exponenten gehören müsste. — Existirt also überhaupt eine zum Exponenten σ_1 gehörige Zahl w_1 innerhalb des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$), so hat die Congruenz (5.) ebensoviele incongruente Wurzeln, als ihr Grad angiebt.

Ferner wird ebenso gezeigt, wie dies früher geschehen ist, dass im letzten Falle für ein variables w die Congruenz

$$(7.)\quad w^{\sigma_1}-1 \equiv (w-1)(w-w_1)\dots(w-w_1^{\sigma_1-1}) \pmod{P_1}$$

bestehen muss. Ist daher w eine Zahl des Bereiches ($\mathfrak{G}$), für welche die Congruenz (5.) erfüllt ist, so folgt aus (7.), dass sie einer ganzen Potenz von w_1 modulo P_1 congruent sein muss. Endlich ergiebt sich aus (7.), dass die Congruenz (5.) keine mehrfachen Wurzeln enthält.

Es werde jetzt vorausgesetzt, dass in der That *eine* Zahl w_1 zum Exponenten σ_1 gehöre; dann ist es, genau wie bei dem entsprechenden Problem der elementaren Zahlentheorie, möglich, die Anzahl *aller* incongruenten Zahlen anzugeben, welche zu demselben Exponenten σ_1 gehören. Aus (7.) ergiebt sich nämlich, dass alle diese Zahlen der Reihe (6.) angehören, und hier sieht man ohne jede Rechnung, dass alle diejenigen $\varphi(\sigma_1)$ Potenzen von w_1 und nur sie zum Exponenten σ_1 gehören, deren Exponenten relativ prim zu σ_1 sind.

Hieraus folgt somit zunächst der Satz:

Ist σ_1 ein beliebiger Theiler von $\sigma = p^\varkappa-1$, so gehört entweder keine Zahl des Bereiches ($\mathfrak{G}$) zum Exponenten σ_1, oder ihre Anzahl ist $\varphi(\sigma_1)$.

Die erste Eventualität lässt sich aber abwehren. In der That gehört jede der $p^\varkappa-1$ incongruenten, durch P_1 nicht theilbaren Zahlen des Bereiches ($\mathfrak{G}$) zu einem und nur zu einem Theiler von $p^\varkappa-1$ als Exponenten. Bedeutet also für jeden Theiler σ_a von σ die Function $\chi(\sigma_a)$ die Anzahl der zu σ_a gehörigen Zahlen w, so besteht die Gleichung

$$\sum_{\sigma_a|\sigma}\chi(\sigma_a) = p^\varkappa-1,$$

während für einen jeden Theiler σ_a von σ die Zahl $\chi(\sigma_a)$ nur gleich Null oder gleich $\varphi(\sigma_a)$ sein kann. Da aber nach einem Satze der elementaren Zahlentheorie die Gleichung besteht

$$\sum_{\sigma_a|\sigma}\varphi(\sigma_a) = p^\varkappa-1,$$

so muss für einen jeden Theiler σ_1 von $p^\varkappa-1$ die Anzahl der zu ihm als Exponenten gehörigen incongruenten Zahlen gleich $\varphi(\sigma_1)$ sein.

Dasselbe Resultat lässt sich auch auf einem Wege ableiten, der demjenigen sehr ähnelt, welcher im vorigen Paragraphen bei Bestimmung der zu einer Gattung der Ordnungszahl $\varkappa_h$ gehörigen Zahlen eingeschlagen wurde.

Sei nämlich $\varkappa_1$ ein beliebiger Theiler von $\varkappa$, so werden alle zum Gattungsbereiche (Γ_1) der Ordnungszahl $\varkappa_1$ gehörigen Zahlen und nur diese

zu einem Exponenten d gehören, der ein Theiler von

$$\sigma_1 = p^{\varkappa_1}-1$$

ist, sofern sie nicht P_1 als Divisor enthalten. In der That, ist für eine Zahl w_1 die Congruenz

$$w_1^d \equiv 1 \pmod{P_1}$$

erfüllt, in der d ein Theiler von σ_1 ist, so muss für sie auch die Congruenz

$$w_1^{p^{\varkappa_1}} \equiv w_1 \pmod{P_1}$$

bestehen, w_1 muss also zum Bereiche (Γ_1) gehören. — Ferner gehört jede der $(p^{\varkappa_1}-1)$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches (Γ_1) zu einem und nur zu einem Theiler von $(p^{\varkappa_1}-1)$ als Exponenten. Nennt man daher $\chi(d)$ die Anzahl aller incongruenten, zu d gehörigen Zahlen des Gattungsbereiches (Γ_1), so besteht für jeden Theiler $\varkappa_1$ von $\varkappa$ die Gleichung

$$(8.)\qquad \sum_{d\,|\,\sigma_1}\chi(d) = p^{\varkappa_1}-1 = \sigma_1;$$

und hieraus folgt, genau wie im vorigen Paragraphen:

$$(9.)\qquad \chi(\sigma_1) = \sum_{d\,|\,\sigma_1}\varepsilon_d.d,$$

wo das Symbol ε_d wieder in Bezug auf σ_1 dieselbe Bedeutung hat wie früher in Bezug auf $\varkappa_1$. Die rechte Seite ist aber bekanntlich gleich $\varphi(\sigma_1)$, also erhält man wie vorher:

$$(10.)\qquad \chi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_1).$$

Ebenso kann man endlich noch die Congruenz des Grades $\varphi(\sigma_1)$ ableiten, deren sämmtliche incongruente Wurzeln die zum Exponenten σ_1 gehörigen Zahlen des Bereiches (Γ_1) sind. Zu diesem Zwecke gehe man von der Congruenz

$$w^{p^{\varkappa_1}-1}-1 \equiv (w-w_1)(w-w_2)\dots(w-w_{\sigma_1}) \pmod{P_1}$$

aus, in welcher rechts alle incongruenten, durch P_1 nicht theilbaren Zahlen des Bereiches (Γ_1) sich befinden. Fasst man diejenigen Differenzen $w-w_a$ in besondere Producte zusammen, in denen die Zahlen w_a zu demselben Exponenten d von σ_1 gehören, und nennt diese Producte $\Phi_d(w)$, so besteht für jedes σ_1 die Gleichung

$$w^{\sigma_1}-1 = \prod_{d\,|\,\sigma_1}\Phi_d(w);$$

hieraus erhält man ähnlich, wie dies im vorigen Paragraphen angegeben

wurde:

$$\Phi_{\sigma_1}(w) = \prod_{d|\sigma_1}(w^d-1)^{\varepsilon_d}$$

für jedes σ_1, das ein Theiler von $p^\varkappa-1$ ist. Man hat also den Satz:

V. Die Anzahl derjenigen incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$), welche für den Divisor P_1 zu einem beliebigen Theiler σ_1 von $p^\varkappa-1$ als Exponenten gehören, ist

$$\varphi(\sigma_1) = \sum_{d|\sigma_1}\varepsilon_d . d,$$

und diese $\varphi(\sigma_1)$ Zahlen sind die sämmtlichen incongruenten Wurzeln der folgenden ganzzahligen Congruenz

$$\Phi_{\sigma_1}(w) = \prod_{d|\sigma_1}(w^d-1)^{\varepsilon_d}.$$

§ 6.

Es sollen jetzt die in den beiden vorhergehenden Paragraphen gegebenen Classificationen der $p^\varkappa$ Zahlen des Restensystemes für die Gattung $\mathfrak{G}$ und den Modul P_1 mit einander verglichen und dadurch ihre wahre Bedeutung ins Licht gesetzt werden. Es wird sich nämlich zeigen, dass die nach diesen beiden Principien durchgeführten verschiedenen Anordnungen der Zahlen w nicht in einander greifen, sondern dass die Zahlen einer und derselben Gattung Γ_h noch weiter nach dem Exponenten zerfallen, zu dem sie für den Modul P_1 gehören.

Um dieses Resultat abzuleiten, denke man sich alle zu einer beliebigen Gattung Γ_h der Ordnungszahl $\varkappa_h$ gehörenden ganzen Zahlen w, deren Anzahl also gleich $g(\varkappa_h)$ ist, aufgestellt, und untersuche, zu welchem Exponenten sie modulo P_1 gehören. Da nun alle Zahlen der betrachteten Gattung der Congruenz

$$(1.) \qquad w^{p^{\varkappa_h}} \equiv w \pmod{P_1}$$

und keiner ähnlichen genügen, in welcher der Exponent von p kleiner ist als $\varkappa_h$, und da ferner keine von diesen Zahlen durch P_1 theilbar ist, so sind sie sämmtlich Wurzeln der folgenden Congruenz:

$$(2.) \qquad w^{p^{\varkappa_h}-1} \equiv 1 \pmod{P_1}.$$

Gehört nun eine beliebige Zahl w_1 der Gattung Γ_h zum Exponenten $\sigma_h^{(1)}$, so ist auch

$$(3.) \qquad w_1^{\sigma_h^{(1)}} \equiv 1 \pmod{P_1},$$

woraus sich in Verbindung mit (2.) ergiebt

$$(4.)\qquad p^{\varkappa_h} \equiv 1 \pmod{\sigma_h^{(1)}}.$$

Die Primzahl p muss aber für den Modul $\sigma_h^{(1)}$ auch wirklich zum Exponenten $\varkappa_h$ selbst gehören, d. h. es kann keine unter $\varkappa_h$ liegende Zahl $\bar{\varkappa}_h$ existiren, für die die Congruenz

$$(5.)\qquad p^{\bar{\varkappa}_h} \equiv 1 \pmod{\sigma_h^{(1)}}$$

erfüllt wäre. Bestünde nämlich eine solche für irgend ein $\bar{\varkappa}_h$, wäre also $p^{\bar{\varkappa}_h}-1$ durch $\sigma_h^{(1)}$ theilbar, so würde man aus (3.) erhalten:

$$(6.)\qquad w_1^{p^{\bar{\varkappa}_h}} \equiv w_1 \pmod{P_1};$$

und diese Congruenz steht im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass w_1 zur Gattung Γ_h selbst gehört.

VI. Dieser Satz giebt die Möglichkeit, alle Exponenten

$$(7.)\qquad \sigma_h^{(1)},\quad \sigma_h^{(2)},\quad \dots\quad \sigma_h^{(\mu)}$$

zu finden, zu denen die einer Gattung Γ_h angehörenden Zahlen modulo P_1 gehören. Dieselben sind nämlich die sämmtlichen „eigentlichen" Divisoren von $p^{\varkappa_h}-1$, wenn man unter dieser Bezeichnung diejenigen Theiler versteht, die in keiner Zahl von der Form $p^{\bar{\varkappa}_h}-1$ enthalten sind, wenn $\bar{\varkappa}_h < \varkappa_h$ ist.

VII. Weiss man umgekehrt, dass eine Zahl w_1 zum Exponenten $\sigma_h^{(1)}$ gehört, so wird die Ordnung $\varkappa_h$ ihrer Gattung Γ_h durch den Exponenten bestimmt, zu dem p für den Modul $\sigma_h^{(1)}$ gehört.

Diese beiden interessanten Sätze geben demnach eine Abhängigkeit der beiden bis jetzt charakterisirten Eintheilungen der incongruenten Zahlen von $(\mathfrak{G})$ in der Weise an, dass die Zahlen einer und derselben Gattung Γ_h sich noch weiter nach dem Exponenten in Unterabtheilungen ordnen lassen, zu dem sie modulo P_1 gehören.

An die Sätze VI. und VII. kann man noch eine elementare Beziehung anknüpfen, welche die Zahlen $g(\varkappa_\alpha)$ mit den $\varphi(\sigma_\alpha)$ verbindet.

Ist nämlich $\varkappa_h$ ein beliebiger Divisor von $\varkappa$ und sind die μ Zahlen

$$(7.)\qquad \sigma_h^{(1)},\quad \dots\quad \sigma_h^{(\mu)}$$

die sämmtlichen eigentlichen Divisoren von $p^{\varkappa_h}-1$, so gehören alle diejenigen Zahlen, welche zu einem Exponenten $\sigma_h^{(\gamma)}$ der Reihe (7.) gehören, auch zur Gattung Γ_h. Umgekehrt gehört jede der $g(\varkappa_h)$ incongruenten

Zahlen von Γ_h auch zu einer der Zahlen (7.) als Exponent. Hieraus folgt die Identität:

$$(8.)\qquad g(\varkappa_h) = \sum_{\gamma=1}^{\mu} \varphi(\sigma_h^{(\gamma)})$$

oder mit Benutzung des Symboles ε_d:

$$(9.)\qquad \sum_{d\,|\,\varkappa_h} \varepsilon_d p^d = \sum_{\gamma=1}^{\mu} \sum_{d\,|\,\sigma_h^{(\gamma)}} \varepsilon_d . d.$$

Diese Relationen sind ein specieller Fall eines etwas allgemeineren Satzes, der hier gleich bewiesen werden mag.

Es ist bekanntlich für jede Zahl m:

$$(a.)\qquad \sum_{d\,|\,m} \varphi(d) = m;$$

setzt man hierin

$$(b.)\qquad m = n_1^{\varkappa_1} - n_2^{\varkappa_2} = n_1^{\lambda_1 \varkappa} - n_2^{\lambda_2 \varkappa},$$

wo $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ zwei beliebige reelle positive Zahlen sind, deren grösster gemeinsamer Theiler $\varkappa$ ist, so sieht man unmittelbar, dass m durch jede Zahl

$$(c.)\qquad m_h = n_1^{\lambda_1 \varkappa_h} - n_2^{\lambda_2 \varkappa_h}$$

theilbar ist, wenn $\varkappa_h$ irgend einen Theiler von $\varkappa$ bedeutet. Es werden sich also alle Divisoren d von m derjenigen niedrigsten Zahl m_h eindeutig zuordnen lassen, in der sie noch enthalten sind.

Bezeichnet man demnach mit d_{m_h} die in dem angegebenen Sinne zu m_h gehörigen Divisoren von m, so lässt sich die Gleichung ($a.$) auch so schreiben:

$$(d.)\qquad \sum_{\varkappa_h\,|\,\varkappa} \sum_{d\,|\,m_h} \varphi(d_{m_h}) = m.$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung

$$(e.)\qquad \sum_{d\,|\,m_h} \varphi(d_{m_h}) = g(\varkappa_h),$$

wo sich die Summation auf alle eigentlichen Divisoren von m_h bezieht, so wird

$$(f.)\qquad \sum_{\varkappa_h\,|\,\varkappa} g(\varkappa_h) = n_1^{\lambda_1 \varkappa} - n_2^{\lambda_2 \varkappa},$$

und diese Gleichung besteht identisch für jedes $\varkappa$, also auch für jeden Theiler der hier gewählten Zahl $\varkappa$. Somit findet man mit Hülfe des vorher erwähnten Satzes

$$(g.)\qquad g(\varkappa_h) = \sum_{d\,|\,\varkappa_h} \varepsilon_d (n_1^{\lambda_1 d} - n_2^{\lambda_2 d}),$$

und vermittelst (*e.*) für jedes ganzzahlige $\varkappa$

$$(h.)\qquad \sum_{d|m}\varphi(d_{m_h}) = \sum_{d|\varkappa}\varepsilon_d(n_1^{\lambda_1 d}-n_2^{\lambda_2 d}),$$

wo sich die Summation links auf alle eigentlichen Theiler von m, rechts auf alle Theiler von $\varkappa$ bezieht. Diese Formel geht in (9.) über, wenn man setzt

$$(i.)\qquad \lambda_1=\lambda_2=1,\quad n_1=p,\quad n_2=1.$$

Sei nun wieder w_1 eine beliebige zur Gattung Γ_h gehörende Zahl; dann gehören auch die $\varkappa_h$ Zahlen

$$(10.)\qquad w_1,\quad w_1^p,\quad w_1^{p^2},\quad \dots\quad w_1^{p^{\varkappa_h-1}}$$

zu derselben Gattung: Da nämlich für w_1 die Congruenz besteht:

$$(11.)\qquad w_1^{p^{\varkappa_h}} \equiv w_1 \pmod{P_1},$$

so erhält man, indem man dieselbe zur $(p^\delta)^{\text{ten}}$ Potenz erhebt und die durch P_1 theilbaren Glieder vernachlässigt, für jedes ganzzahlige δ:

$$(12.)\qquad (w_1^{p^\delta})^{p^{\varkappa_h}} \equiv w_1^{p^\delta} \pmod{P_1};$$

die Zahlen der Reihe (10.) gehören folglich alle zum Gattungsbereiche (Γ_h). Dieselben gehören aber auch zur Gattung Γ_h selbst; denn gehörte eine Zahl $w_1^{p^\delta}$ etwa zu einer unter Γ_h enthaltenen Gattung von der Ordnungszahl $\bar{\varkappa}_h$, so wäre

$$(13.)\qquad (w_1^{p^\delta})^{p^{\bar{\varkappa}_h}} = (w_1^{p^{\bar{\varkappa}_h}})^{p^\delta} \equiv w_1^{p^\delta} \pmod{P_1};$$

indem man hier beiderseits zur Potenz $p^{\varkappa_h-\delta}$ erhebt, würde sich ergeben

$$(w_1^{p^{\bar{\varkappa}_h}})^{p^{\varkappa_h}} = w_1^{p^{\varkappa_h}} \pmod{P_1}$$

oder wegen (12.)

$$(14.)\qquad w_1^{p^{\bar{\varkappa}_h}} \equiv w_1 \pmod{P_1},$$

und eine solche Congruenz kann nicht bestehen, da w_1 modulo P_1 zur Gattung Γ_h der Ordnung $\varkappa_h$ gehört.

Endlich sieht man, dass die $\varkappa_h$ Zahlen (10.) modulo P_1 incongruent sind. Besteht nämlich für zwei derselben die Congruenz:

$$w_1^{p^{\delta+\gamma}} \equiv w_1^{p^\delta} \pmod{P_1},$$

und erhebt man beide Seiten zur Potenz $p^{\varkappa_h-\delta}$, so folgt:

$$(15.)\qquad w_1^{p^\gamma} \equiv w_1 \pmod{P_1},$$

eine Relation, die mit der über w_1 gemachten Voraussetzung im Widerspruch steht.

Weiter kann gezeigt werden, dass die $\varkappa_h$ Zahlen (10.) modulo P_1 zu demselben Exponenten σ_h gehören, zu dem w_1 gehört. Wenn eine von ihnen zu einem anderen Exponenten $\bar{\sigma}_h$ gehörte, so müsste dieser ein Theiler von σ_h sein, weil aus der für w_1 vorausgesetzten Congruenz

$$(16.)\qquad w_1^{\sigma_h} \equiv 1 \pmod{P_1}$$

für jede Zahl $w_1^{p^\delta}$ der Reihe (10.) folgt:

$$(w_1^{p^\delta})^{\sigma_h} \equiv 1 \pmod{P_1}.$$

Hätte man aber für einen Theiler $\bar{\sigma}_h$ von σ_h

$$(w_1^{p^\delta})^{\bar{\sigma}_h} \equiv 1 \pmod{P_1}$$

und erhöbe man beide Seiten dieser Congruenz zur $(p^{\varkappa_h-\delta})^{\text{ten}}$ Potenz, so erhielte man

$$(w_1^{\bar{\sigma}_h})^{p^{\varkappa_h}} \equiv 1 \pmod{P_1}$$

oder, da w_1, also auch $w_1^{\bar{\sigma}_h}$ zum Gattungsbereiche (Γ'_h) gehört,

$$w_1^{\bar{\sigma}_h} \equiv 1 \pmod{P_1},$$

eine Gleichung, welche der über w_1 gemachten Voraussetzung widerspräche.

Aus diesen beiden Resultaten ergiebt sich eine weitere Eintheilung der $g(\varkappa_h)$ Zahlen, welche zu derselben Gattung, beziehungsweise der $\varphi(\sigma_h)$ Zahlen, die zu demselben Exponenten σ_h gehören: Zu jeder Zahl w_1 einer Gattung Γ'_h von der Ordnung $\varkappa_h$ gehören nämlich innerhalb derselben Gattung $\varkappa_h$ Zahlen

$$(17.)\qquad w_1,\quad w_2,\quad \ldots\quad w_{\varkappa_h},$$

welche modulo P_1 incongruent und den Zahlen

$$(18.)\qquad w_1,\quad w_1^p,\quad \ldots\quad w_1^{p^{\varkappa_h-1}}$$

für den betrachteten Modul beziehungsweise congruent sind. In derselben Weise kann man mithin alle $g(\varkappa_h)$ incongruenten Zahlen der Gattung Γ_h in Klassen von je $\varkappa_h$ Elementen anordnen, und es ergiebt sich dadurch auch das ebenfalls der elementaren Zahlentheorie angehörige Resultat: dass die Zahl $g(\varkappa_h)$ durch $\varkappa_h$ ohne Rest theilbar ist.

Im Folgenden soll der Ausdruck

$$\frac{g(\varkappa_h)}{\varkappa_h} = \frac{\Sigma \varepsilon_d p^d}{\varkappa_h},$$

der also eine positive ganze Zahl ist, mit

$$\bar{g}(\varkappa_h)$$

bezeichnet werden.

Man kann demnach innerhalb der modulo P_1 incongruenten Zahlen, die zu einer Gattung Γ_h der Ordnung $\varkappa_h$ gehören, stets $\bar{g}(\varkappa_h)$ Zahlen

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots \quad w_{\bar{g}(\varkappa_h)}$$

so bestimmen, dass die Zahlen des Systems

$$(19.)\quad \begin{cases} w_1 & w_2 & \ldots w_{\bar{g}(\varkappa_h)} \\ w_1^p & w_2^p & \ldots w_{\bar{g}(\varkappa_h)}^p \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ w_1^{p^{\varkappa_h-1}} & w_2^{p^{\varkappa_h-1}} & \ldots w_{\bar{g}(\varkappa_h)}^{p^{\varkappa_h-1}} \end{cases}$$

modulo P_1 incongruent sind und somit, da ihre Anzahl gleich $g(\varkappa_h)$ ist, ein vollständiges Restensystem für den Modul P_1 und die Gattung Γ_h bilden. Ausserdem gehören die Zahlen derselben Verticalreihe modulo P_1 zu einem und demselben Exponenten.

Da immer je $\varkappa_h$ in einer Verticalreihe stehende Zahlen des Systems (19.) zu demselben Exponenten σ_h gehören, so kann man wieder genau ebenso, wie dies für $g(\varkappa_h)$ geschehen ist, nachweisen, dass auch die Zahl $\varphi(\sigma_h)$, welche angiebt, wie viele incongruente Zahlen von Γ_h zum Exponenten σ_h gehören, durch $\varkappa_h$ theilbar sein muss, wenn p modulo σ_h zum Exponenten $\varkappa_h$ gehört. Dies Resultat lässt sich auch direct auf elementarem Wege ableiten, denn es ist nach den gemachten Voraussetzungen

$$p^{\varkappa_h} \equiv 1 \quad (\text{mod. } \sigma_h).$$

Andererseits folgt aber aus dem erweiterten *Fermat*schen Satze

$$p^{\varphi(\sigma_h)} \equiv 1 \quad (\text{mod. } \sigma_h);$$

und da p zum Exponenten $\varkappa_h$ gehört, so ergiebt sich aus diesen beiden Congruenzen

$$\varphi(\sigma_h) \equiv 0 \quad (\text{mod. } \varkappa_h), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Berücksichtigt man endlich, dass, wie im vorigen Paragraphen gezeigt ist, für jedes $\varkappa_h$ die Gleichung besteht

$$g(\varkappa_h) = \sum_{\gamma=1}^{\mu} \varphi(\sigma_h^{(\gamma)})$$

und dass jedes Glied der rechten Seite durch $\varkappa_h$ theilbar ist, wie eben auf elementarem Wege nachgewiesen ist, so giebt diese Gleichung den elementaren Beweis für die Theilbarkeit von $g(\varkappa_h)$ durch $\varkappa_h$.

Durch diese letzten Resultate ist nun eine vollständige Eintheilung der $p^\varkappa$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) modulo P_1 gegeben. — Dieselben zerfallen nämlich zunächst in soviele Gattungen Γ_h als $\varkappa$ Theiler besitzt. Jede dieser Gattungen enthält $g(\varkappa_h)$ incongruente Zahlen. Die $g(\varkappa_h)$ zu derselben Gattung Γ_h der Ordnung $\varkappa_h$ gehörenden Zahlen theilen sich dann nach ihrem Exponenten $\sigma_h^{(\gamma)}$ in soviele Klassen, als $(p^{\varkappa_h}-1)$ eigentliche Divisoren enthält; jede dieser Klassen enthält $\varphi(\sigma_h^{(\gamma)})$ incongruente Zahlen. Endlich theilen sich die $\varphi(\sigma_h^{(\gamma)})$ zu demselben Exponenten $\sigma_h^{(\gamma)}$ gehörenden Zahlen in $\bar{\varphi}(\sigma_h^{(\gamma)}) = \frac{\varphi(\sigma_h^{(\gamma)})}{\varkappa_h}$ Gruppen, deren jede $\varkappa_h$ Glieder in sich fasst, welche den von einander modulo P_1 verschiedenen $(p^\delta)^{\text{ten}}$ Potenzen einer beliebigen unter ihnen congruent sind.

Die drei hier angegebenen Klassificationen der modulo P_1 incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) lassen sich demnach in durchaus naturgemässer Weise combiniren, ohne in einander zu greifen.

§ 7.

Von der im letzten Paragraphen angegebenen dritten Eintheilung der incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) war bis jetzt nur nachgewiesen worden, dass sie sich mit den vorhin charakterisirten Klassen combiniren liess. — Die nun folgenden Betrachtungen sollen die engere Zusammengehörigkeit der zu einer Gattung Γ_h der Ordnung $\varkappa_h$ modulo P_1 gehörigen Zahlen

$$(1.) \qquad w_1, \quad w_1^p, \quad \dots \quad w_1^{p^{\varkappa_h-1}}$$

deutlich machen.

Sei zunächst

$$\varkappa_h = 1.$$

In diesem einfachsten Falle genügen alle modulo P_1 zur Gattung Γ_1 ge-

hörigen Zahlen der Congruenz

$$(2.)\qquad w^p - w \equiv 0 \pmod{P_1},$$

und umgekehrt gehören auch alle Wurzeln der Congruenz (2.) zur Gattung Γ_1, weil der Exponent von p hier keinen Theiler mehr hat, der kleiner als er selbst wäre. Also ist die Anzahl $g(1)$ der incongruenten Zahlen dieser niedrigsten Gattung Γ_1 gleich p. Da aber ferner die p modulo P_1 incongruenten Zahlen

$$0,\ 1,\ \ldots\ p-1$$

offenbar zur Gattung Γ_1 gehören, so bilden diese ein vollständiges Restsystem für dieselbe; hiermit ergiebt sich der folgende Satz:

VIII. Jede Zahl des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$), welche modulo P_1 zur Gattung Γ_1 der Ordnungszahl 1 gehört, ist einer reellen positiven ganzen Zahl congruent.

Derselbe Satz lässt sich auch in einer anderen Form aussprechen, in welcher er häufige Anwendung findet:

VIII^a. Eine Zahl w des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$), die modulo P_1 ungeändert bleibt, wenn man sie zur p^{ten} Potenz erhebt, ist für diesen Modul einer der p reellen Zahlen $0, 1, \ldots (p-1)$ congruent.

Es sei jetzt w_1 eine Zahl, welche modulo P_1 zu einer beliebigen Gattung Γ_k der Ordnungszahl $\varkappa_k$ gehört. Denkt man sich die Function gebildet, deren Nullstellen die $\varkappa_k$ Zahlen

$$(3.)\qquad w_1,\ w_1^p,\ \ldots\ w_1^{p^{\varkappa_k-1}}$$

sind, und setzt

$$(4.)\qquad G_{\varkappa_k}(w) = \prod_{\delta=0}^{\varkappa_k-1}\left(w - w_1^{p^\delta}\right) = w^{\varkappa_k} - f_1 w^{\varkappa_k-1} + \cdots \pm f_{\varkappa_k},$$

so werden die Coefficienten $f_1, \ldots f_{\varkappa_k}$ ganze Zahlen des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) sein, welche modulo P_1 offenbar ungeändert bleiben, wenn man sie zur p^{ten} Potenz erhebt, da die Zahlen (3.), deren elementare symmetrische Functionen sie sind, sich bei der erwähnten Operation nur cyklisch permutiren. Nach dem soeben bewiesenen Satze (VIII^a.) sind die Zahlen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_{\varkappa_k}$ reellen ganzen Zahlen congruent; die $\varkappa_k$ Zahlen (3.) genügen also modulo P_1 einer ganzzahligen Congruenz

$$(5.)\qquad G_{\varkappa_k}(w) \equiv 0 \pmod{P_1}$$

des Grades $\varkappa_k$.

Die Congruenz (5.) ist aber auch für den betrachteten Modul irreductibel, d. h. man kann nicht zwei ganze ganzzahlige Functionen $H(w)$

und $K(w)$ finden, welche von niederem Grade als $G_{\varkappa_h}(w)$ wären, und für die bei einem variablen w die Congruenz stattfände

$$(6.)\qquad G_{\varkappa_h}(w) \equiv H(w)K(w) \quad (\text{mod. } P_1).$$

Wäre nämlich eine solche Congruenz möglich, so müsste eine der Functionen, z. B. $H(w)$, für $w = w_1$ durch P_1 theilbar sein. Ist also δ der Grad von $H(w)$ für den betrachteten Modul, so hätte man eine ganzzahlige Congruenz von der Form

$$(7.)\qquad H(w_1) = u_0 w_1^\delta + u_1 w_1^{\delta-1} + \cdots + u_\delta \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1) \qquad (\delta < \varkappa_h),$$

wo $u_0, u_1, \dots u_\delta$ reelle ganze Zahlen bedeuten und u_0 durch P_1 sicher nicht theilbar ist. Erhebt man aber (7.) wiederholt in die p^{te} Potenz und berücksichtigt, dass modulo P_1 die Zahlen $u_0, \dots u_\delta$ bei dieser Operation ungeändert bleiben, so ergiebt sich für jedes ganzzahlige γ:

$$(8.)\qquad H(w_1^{p^\gamma}) \equiv u_0 (w_1^{p^\gamma})^\delta + \cdots + u_\delta \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1) \qquad (\gamma = 0, 1, \dots (\varkappa_h - 1)).$$

Verschwindet also eine ganzzahlige Function $H(w)$ für $w = w_1$, so muss sie auch durch P_1 theilbar sein, wenn man der Variablen jeden der $\varkappa_h$ incongruenten Werthe der Reihe (3.) beilegt; da aber der Grad δ von $H(w)$ niedriger als $\varkappa_h$ sein soll und eine Congruenz für einen Primzahlmodul nicht mehr incongruente Wurzeln haben kann, als ihr Grad angiebt, so ist die Congruenz (7.), also auch (6.) nicht möglich, und es ergiebt sich der Satz:

IX. Ist w_1 eine für den Modul P_1 zu einer beliebigen Gattung Γ_h gehörige Zahl, so genügen die $\varkappa_h$ Zahlen

$$w_1, \quad w_1^p, \quad \dots \quad w_1^{p^{\varkappa_h}-1}$$

einer irreductiblen Congruenz des Grades $\varkappa_h$

$$G_{\varkappa_h}(w) \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1)$$

mit reellen ganzzahligen Coefficienten.

Ist demnach eine ganze ganzzahlige Function $H(w)$ für $w = w_1$ durch P_1 theilbar, so ist sie es auch für eine jede Wurzel von $G_{\varkappa_h}(w)$. Also wird die Congruenz bestehen

$$(9.)\qquad H(w) \equiv G_{\varkappa_h}(w)K(w) \quad (\text{mod. } P_1).$$

Man überzeugt sich leicht durch wirkliche Ausführung der Division, dass $K(w)$ ebenfalls eine dem natürlichen Rationalitätsbereiche angehörige Function ist, sobald $H(w)$ eine solche ist. Dasselbe kann man auch direct beweisen. Erhebt man die Congruenz (9.) zur p^{ten} Potenz, so erhält man

$$(H(w))^p \equiv (G_{\varkappa_h}(w))^p (K(w))^p \quad (\text{mod. } P_1);$$

da aber sowohl $H(w)$ als auch $G_{\varkappa_h}(w)$ reelle ganzzahlige Functionen von w sind, so folgt aus der obigen Congruenz

$$H(w^p) \equiv G_{\varkappa_h}(w^p)(K(w))^p \pmod{P_1}.$$

Setzt man andererseits in (9.) w^p an die Stelle von w, so ist

$$H(w^p) \equiv G_{\varkappa_h}(w^p)K(w^p) \pmod{P_1},$$

woraus für ein variables w hervorgeht

$$K(w^p) \equiv (K(w))^p \pmod{P_1}.$$

Sei nun

$$K(w) = a_0 w^\delta + a_1 w^{\delta-1} + \cdots + a_\delta,$$

wo $a_0, \ldots a_\delta$ jedenfalls ganzen algebraischen Zahlen des Gattungsbereiches ($\mathfrak{G}$) congruent sind, so folgt aus der obigen Congruenz

$$(a_0^p - a_0)w^\delta + (a_1^p - a_1)w^{\delta-1} + \cdots + (a_\delta^p - a_\delta) \equiv 0 \pmod{P_1}.$$

Eine solche Congruenz kann aber für ein variables w, wie leicht zu erkennen ist, nur dann erfüllt sein, wenn für alle Coefficienten die Congruenz

$$a_h^p - a_h \equiv 0 \pmod{P_1}$$

besteht, wenn also alle Coefficienten reellen ganzen Zahlen congruent sind, w. z. b. w. — Dann besteht aber die Congruenz (9.) nicht nur modulo P_1, sondern auch modulo p selbst; man kann folglich den weiteren Satz aussprechen:

X. Ist eine ganze ganzzahlige Function $H(w)$ für $w = w_1$ durch P_1 theilbar, so enthält $H(w)$ das Modulsystem

$$(p,\ G_{\varkappa_h}(w))$$

im Sinne der *Kronecker*schen Festschrift. Die Umkehrung dieses Satzes ist selbstverständlich.

Dieser Satz lässt sich auch so fassen:

X[a]. Eine ganze ganzzahlige Function $H(w)$ verschwindet dann und nur dann modulo P_1 für $w = w_1$, wenn sie das Modulsystem $(p, G_{\varkappa_h}(w))$ enthält und $G_{\varkappa_h}(w)$ diejenige für P_1 irreductible Function bezeichnet, deren Congruenzwurzel w_1 ist.

Durch diesen Satz ist, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, ein Weg angegeben, wie man, ohne die Theorie der Primdivisoren zu Hülfe zu nehmen, die in dieser Arbeit abgeleiteten Resultate gewinnen

könnte. Derselbe soll in einer bald erscheinenden Arbeit weiter verfolgt werden.

Da die $\varkappa_h$ Zahlen

$$(10.)\qquad w_1,\quad w_1^p,\quad \dots\quad w_1^{p^{\varkappa_h-1}}$$

die sämmtlichen incongruenten Wurzeln einer irreductibeln Congruenz sind, so will ich sie als die modulo P_1 zu w_1 conjugirten Zahlen bezeichnen. Diese Definition ist völlig analog den Bezeichnungen der Festschrift, und sie ist aus dem Grunde zweckmässig, weil die Zahlen der Reihe (10.), wie in einer späteren Arbeit gezeigt werden wird, in der That gewissen zu w_1 conjugirten Zahlen für einen bestimmten Primtheiler von p congruent sind.

Aus den Sätzen IX. und X. ergiebt sich, dass eine Congruenz

$$(11.)\qquad u_1 w_1^{\varkappa_h-1}+\dots+u_{\varkappa_h} \equiv 0 \pmod{P_1}$$

mit den ganzzahligen Coefficienten $u_1, \dots u_{\varkappa_h}$ nur dann möglich ist, wenn alle Coefficienten u durch p theilbar sind. Also sind die $p^{\varkappa_h}$ Zahlen, welche man aus (11.) erhält, indem man den Coefficienten u unabhängig von einander alle Werthe $0, 1, \dots p-1$ beilegt, modulo P_1 incongruent; offenbar gehören aber alle diese Zahlen zum Gattungsbereiche (Γ_h); da nun innerhalb dieses Bereiches überhaupt nur $p^{\varkappa_h}$ incongruente Zahlen existiren, so erhält man den Satz:

> XI. Ist w_1 eine modulo P_1 zur Gattung Γ_h der Ordnung $\varkappa_h$ gehörige Zahl, so bilden die $\varkappa_h$ Zahlen
>
> $$1,\quad w_1,\quad w_1^2,\quad \dots\quad w_1^{\varkappa_h-1}$$
>
> für den Gattungsbereich (Γ_h) und den Modul P_1 ein Fundamentalsystem.

Die soeben angeführten Sätze lassen eine Verallgemeinerung zu, welche an sich interessant und für eine an einem anderen Orte anzugebende Untersuchung von Wichtigkeit ist.

Es seien (Γ_h) und (Γ_i) zwei beliebige Gattungsbereiche der Ordnungszahlen $\varkappa_h$ und $\varkappa_i$; ferner sei $\varkappa_{hi}$ der grösste gemeinsame Theiler, K_{hi} das kleinste gemeinsame Vielfache von $\varkappa_h$ und $\varkappa_i$, so dass also, wenn

$$\varkappa_h = \lambda_h \varkappa_{hi},\quad \varkappa_i = \lambda_i \varkappa_{hi},$$
$$K_{hi} = \lambda_h \lambda_i \varkappa_{hi}$$

gesetzt wird, die Zahlen λ_h und λ_i keinen gemeinsamen Theiler besitzen.

Es sei nun w_1 eine beliebige Zahl der Gattung Γ_h. Dann sind die λ_h Zahlen

$$(12.)\qquad w_1,\quad w_1^{p^{\varkappa_i}},\quad \ldots\quad w_1^{p^{(\lambda_h-1)\varkappa_i}}$$

modulo P_1 incongruent und λ_h unter den $\varkappa_h$ modulo P_1 zu w_1 conjugirten Zahlen congruent. Die niedrigsten Exponenten dieser Zahlen sind offenbar die kleinsten Reste, welche die Zahlen $0,\ \varkappa_i,\ \ldots\ (\lambda_h-1)\varkappa_i$, modulo $\varkappa_h$ betrachtet, lassen; die Zahlen (12.) sind also, abgesehen von ihrer Reihenfolge, den Zahlen

$$(12^a.)\qquad w_1,\quad w_1^{p^{\varkappa_{hi}}},\quad \ldots\quad w_1^{p^{(\lambda_h-1)\varkappa_{hi}}}$$

modulo P_1 congruent. Bildet man jetzt die Function, deren Congruenzwurzeln die λ_h Zahlen (12.) sind, so erkennt man unmittelbar aus ihrer Form, dass ihre Coefficienten modulo P_1 ungeändert bleiben, wenn man sie zur $\varkappa_i^{\text{ten}}$ Potenz erhebt, sie werden daher dem Gattungsbereiche (Γ_i) angehören. Ferner kann man zeigen, dass sich die Function $G_{\varkappa_i}(w, \Gamma_i)$, deren Congruenzwurzeln die Zahlen (12.) sind, innerhalb des Gattungsbereiches (Γ_i) nicht weiter zerlegen lässt. Man weist dies genau ebenso nach, wie in dem vorher betrachteten Falle eines natürlichen Rationalitätsbereiches, indem man darthut, dass eine jede Function des Gattungsbereiches (Γ_i), welche für $w=w_1$ durch P_1 theilbar ist, auch jede der λ_h incongruenten Zahlen der Reihe (12.) als Congruenzwurzel besitzen, also modulo P_1 betrachtet, durch $G_{\varkappa_h}(w, \Gamma_i)$ theilbar sein muss.

Jedoch könnte man hier noch die weitere Frage aufwerfen, ob die Coefficienten der modulo P_1 irreductiblen Function $G_{\varkappa_i}(w, \Gamma_i)$ vielleicht für jedes zur Gattung Γ_h gehörige w_1 auch einem Gattungsbereiche (Γ_{i_1}) angehören könnten, dessen Ordnung $\varkappa_{i_1}$ kleiner als $\varkappa_i$ ist. Es ist leicht zu zeigen, dass dieses stets der Fall sein muss. Zunächst sieht man, dass die Ordnungszahl $\varkappa_{i_1}$ eines solchen niedrigsten Gattungsbereiches für jede Zahl w_1 der Gattung Γ_h ein Theiler von $\varkappa_i$ sein muss, da alle symmetrischen Functionen $\mathfrak{f}$ der Zahlen (12.) der Congruenz

$$\mathfrak{f}^{p^{\varkappa_i}}-\mathfrak{f}\equiv 0\quad (\text{mod. } P_1)$$

genügen.

Sei nun (Γ_{i_1}) der niedrigste Gattungsbereich, innerhalb dessen die Coefficienten $\mathfrak{f}$ stets liegen müssen, und $\varkappa_{i_1}$ seine Ordnungszahl. Seien dann

$$G_{\varkappa_h}^{(1)}(w, \Gamma_i),\quad G_{\varkappa_h}^{(2)}(w, \Gamma_i),\quad \ldots\quad G_{\varkappa_h}^{(\varkappa_{i_1})}(w, \Gamma_i)$$

die $\varkappa_{i_1}$ incongruenten Functionen, welche man aus $G_{\varkappa_h}(w, \Gamma_i)$ erhält, wenn

alle ihre Coefficienten zur 0ten, p^{ten}, ... $(p^{\varkappa_{i_1}-1})^{ten}$ Potenz erhoben werden, so wird das Product

$$(13.)\qquad \bar{G}(w) = \prod_{a=1}^{\varkappa_i} G_{\varkappa_h}^{(a)}(w,\ \Gamma_i)$$

offenbar eine Function des $\lambda_h.\varkappa_{i_1}{}^{ten}$ Grades sein, deren Coefficienten modulo P_1 ungeändert bleiben, wenn man sie zur p^{ten} Potenz erhebt; also gehört $\bar{G}(w)$ dem natürlichen Rationalitätsbereiche an. Da aber diese Function für $w = w_1$ verschwindet, so muss sie modulo P_1 durch die irreductible Function $G_{\varkappa_h}(w)$ des Grades $\varkappa_h = \lambda_h \varkappa_{hi}$ theilbar sein, der w_1 im natürlichen Rationalitätsbereiche genügt. Hieraus folgt also, dass die Zahl $\varkappa_{i_1}$ mindestens gleich $\varkappa_{hi}$, d. h. gleich dem grössten gemeinsamen Theiler von $\varkappa_h$ und $\varkappa_i$ sein muss.

Dass die Adjunction dieser Gattung aber auch in der That genügt, erkennt man am leichtesten, wenn man die λ_h für Γ_i zu w_1 conjugirten Wurzeln in der Form (12ª.) dargestellt annimmt; denn hier sieht man sofort, dass die elementaren symmetrischen Functionen derselben in der That ungeändert bleiben, wenn man sie zur $(p^{\varkappa_{hi}})^{ten}$ Potenz erhebt.

Die soeben gewonnenen Resultate lassen sich folgendermassen aussprechen:

XII. Denkt man sich einen beliebigen Gattungsbereich (Γ_i) der Ordnungszahl $\varkappa_i$ dem natürlichen Rationalitätsbereiche adjungirt, so ist jede Zahl w_1 einer anderen Gattung Γ_h der Ordnung $\varkappa_h$, modulo P_1 betrachtet, die Wurzel einer irreductiblen Congruenz des Grades λ_h, wenn $\varkappa_{hi}$ der grösste gemeinsame Theiler von $\varkappa_h$ und $\varkappa_i$ und

$$\varkappa_h = \lambda_h \varkappa_{hi},\quad \varkappa_i = \lambda_i \varkappa_{hi}$$

ist. Die Coefficienten dieser Congruenz gehören sämmtlich dem grössten, unter Γ_h und Γ_i zugleich enthaltenen Gattungsbereiche (Γ_{hi}) der Ordnungszahl $\varkappa_{hi}$ an, und dies ist der niedrigste Bereich, innerhalb dessen sie sich für ein jedes w_1 der Gattung Γ_h befinden können.

Da hier $\varkappa_h$ und $\varkappa_i$ als ganz beliebige Theiler von $\varkappa$ angenommen worden sind, so kann man dem Resultate noch eine etwas andere Form geben, welche die grosse Analogie zwischen den hier für einen Primdivisor charakterisirten und den in der Festschrift definirten Gattungen algebraischer Zahlen deutlich hervortreten lässt.

Ebenso nämlich wie sich jede irreductible Congruenz der Gattung Γ_h unter Adjunction der Gattung Γ_i in $\varkappa_{hi}$ irreductible Factoren des λ_h^{ten} Grades zerlegt, zerfällt auch jede irreductible Congruenz der Gattung Γ_i unter Adjunction von Γ_h in $\varkappa_{hi}$ Factoren des Grades λ_i. Man kann den vorher bewiesenen Satz also auch so aussprechen:

XII^a. Es mögen $\varkappa_h$ und $\varkappa_i$ die Ordnungszahlen zweier beliebigen Gattungen Γ_h und Γ_i sein. Reducirt sich dann die Ordnung von Γ_h unter Adjunction von Γ_i auf die Zahl λ_h und die Ordnung von Γ_i unter Adjunction von Γ_h auf λ_i, so sind λ_h und λ_i die kleinsten ganzen Zahlen, für welche die Proportion besteht

$$\frac{\varkappa_h}{\varkappa_i} = \frac{\lambda_h}{\lambda_i}.$$

Ist

$$(14.)\quad G_{\varkappa_h}(w;\, \Gamma_{hi}) = w^{\lambda_h} - \mathfrak{f}_1 w^{\lambda_h-1} + \cdots \pm \mathfrak{f}_{\lambda_h}$$

die modulo P_1 für den Gattungsbereich (Γ_i) irreductible Function, der eine Zahl w_1 der Gattung Γ_h genügt, so folgt eben aus der Irreductibilität dieser Function, dass eine Congruenz

$$(15.)\quad u_1 w_1^{\lambda_h-1} + \cdots + u_{\lambda_h} \equiv 0 \quad (\text{mod. } P_1),$$

in der die Zahlen u dem Gattungsbereiche (Γ_i) oder irgend einem unter diesem enthaltenen Bereiche (Γ_{i_1}) angehören, nur dann bestehen kann, wenn alle Zahlen u durch P_1 theilbar sind. Also werden zunächst alle diejenigen Zahlen incongruent sein, die man erhält, wenn man die Coefficienten u unabhängig von einander alle $p^{\varkappa_i}$ incongruenten Zahlen des Gattungsbereiches (Γ_i) durchlaufen lässt. Dadurch ergeben sich aber aus der Form (15.) offenbar

$$p^{\lambda_h \varkappa_i} = p^{K_{hi}}$$

incongruente ganze algebraische Zahlen, welche, wie man leicht erkennt, sämmtlich zu dem Gattungsbereiche $(\bar{\Gamma}_{hi})$ der Ordnung K_{hi}, d. h. zu dem niedrigsten Gattungsbereiche gehören, unter dem die beiden Gattungsbereiche (Γ_h) und (Γ_i) zugleich enthalten sind. Da aber $p^{K_{hi}}$ auch die Anzahl der incongruenten Zahlen dieses Gattungsbereiches selbst ist, so bilden die λ_h Zahlen

$$(16.)\quad 1,\ w_1,\ \ldots\ w_1^{\lambda_h-1}$$

für den Gattungsbereich $(\bar{\Gamma}_{hi})$ und den Rationalitätsbereich Γ_i ein Fundamentalsystem für den Modul P_1.

Dieselben λ_h Zahlen bilden aber auch für den Gattungsbereich (Γ_h) und den Rationalitätsbereich (Γ_{hi}) ein Fundamentalsystem für den Modul P_1, wenn wie in XII. (Γ_{hi}) der grösste, unter Γ_h und Γ_i zugleich enthaltene Gattungsbereich ist. In der That sind alle diejenigen Zahlen modulo P_1 incongruent, welche man aus (15.) erhält, wenn man dort die Unbestimmten $u_1, \dots u_{\lambda_h}$ unabhängig von einander alle $p^{\varkappa_{hi}}$ incongruenten Zahlen eines Restensystems des Gattungsbereiches (Γ_{hi}) der Ordnungszahl $\varkappa_{hi}$ durchlaufen lässt. Dadurch findet man aber aus (15.) $p^{\varkappa_{hi}\lambda_h} = p^{\varkappa_h}$ incongruente ganze algebraische Zahlen, die offenbar sämmtlich dem Gattungsbereiche (Γ_h) angehören; und da $p^{\varkappa_h}$ die Anzahl aller incongruenten Zahlen dieses Bereiches ist, so ist damit die soeben aufgestellte Behauptung bewiesen.

Aehnlich kann man zeigen, dass die λ_h Zahlen

$$(16.)\quad 1,\ w_1,\ \dots\ w_1^{\lambda_h-1}$$

überhaupt ein Fundamentalsystem für jeden Gattungsbereich $(\Gamma_{\bar{\varkappa}_i})$ der Ordnungszahl $\bar{\varkappa}_i$ bilden, wenn $\bar{\varkappa}_i$ mit $\varkappa_h$ den grössten gemeinsamen Theiler $\varkappa_{hi}$ hat; indessen braucht der Beweis hier nicht ausgeführt zu werden, da er sich aus dem soeben Angegebenen mit Leichtigkeit ableiten lässt.

Zum Abschluss dieser Arbeit soll noch die Zerlegung der Function $(w^{p^\varkappa}-w)$ für den Modul P_1, also auch für p, innerhalb des natürlichen Rationalitätsbereiches angedeutet werden, welche sich nach den vorangegangenen Sätzen leicht erledigt.

Setzt man wieder $p^\varkappa = s$ und geht von der vorhin bewiesenen Congruenz

$$(17.)\quad (w^{p^\varkappa}-w) \equiv \prod_{a=1}^{s}(w-w_a) \quad (\text{mod. } P_1)$$

aus, in der die s Zahlen $w_1, \dots w_s$ ein vollständiges Restensystem der Gattung $\mathfrak{G}$ bedeuten, so hatte sich gezeigt, dass man hier rechter Hand diejenigen Factoren $(w-w_h)$ in ein ganzzahliges Product $V_{\varkappa_h}(w)$ zusammenfassen kann, deren Wurzeln w_h derselben Gattung Γ_h angehören. Es ist also zuerst

$$(w^{p^\varkappa}-w) \equiv \prod_{\varkappa_h} V_{\varkappa_h}(w) \quad (\text{mod. } P_1).$$

Jede dieser Functionen V zerfällt weiter in ebenso viele ganzzahlige Factoren $\Phi_{\sigma_h^{(\gamma)}}(w)$, als $(p^{\varkappa_h}-1)$ eigentliche Divisoren enthält. Also ist

$$(w^{p^\varkappa}-w) \equiv \prod_{\varkappa_h}\prod_{\sigma_h^{(\gamma)}} \Phi_{\sigma_h^{(\gamma)}}(w).$$

Von diesen Functionen zerfällt nun endlich jede in $\frac{\varphi(\sigma_h^{(\gamma)})}{\varkappa_h}$ irreductible Factoren des Grades $\varkappa_h$. Es ist also

$$(18.)\quad (w^{p^{\varkappa}}-w) \equiv \prod_{\varkappa_h}\prod_{\sigma_h^{(\gamma)}}\prod_{\beta} G_{\varkappa_h}^{(\beta)}(w) \quad (\text{mod. } p).$$

Ist $A_\varkappa$ die Anzahl der modulo P_1 (oder was hier dasselbe ist, modulo p) irreductiblen Factoren, so ist dieselbe offenbar

$$(19.)\quad A_\varkappa = \sum_{\varkappa_h}\bar{g}(\varkappa_h),$$

wo sich die Summation auf alle Theiler von $\varkappa$ bezieht.

Berlin, 1884.

Ein specieller $F^{(2)}$-Bündel und der dazu gehörige Bündel Raumcurven dritter Ordnung.

(Von Herrn *J. Cardinaal* in Tilburg in Holland.)

In der „Geometrie der Lage" von Herrn *Th. Reye,* 2. Auflage S. 233, wird ein specieller $F^{(2)}$-Bündel erwähnt, und es werden einige Sätze in Bezug darauf bewiesen. Im Folgenden werde ich einige weitere Eigenschaften dieses Gebildes angeben und auf die Anwendungen desselben verweisen; die dabei vorkommenden imaginären Elemente werden besonders beachtet werden.

1. Es seien gegeben drei Regelflächen zweiter Ordnung H, H_1, H_2 mit den sich darauf befindenden Regelschaaren $L, K; L_1, K_1; L_2, K_2$, welche eine Erzeugende k der Schaaren K, K_1, K_2 mit einander gemein haben. Die Schnittcurven von H_1 und H_2 mit H sind Raumcurven dritter Ordnung k_1^3 und k_2^3, deren gemeinschaftliche Sehnen aus Erzeugenden der Schaar K bestehen, und die höchstens vier Punkte mit einander gemein haben. Die Frage nach der Realität dieser gemeinschaftlichen Punkte soll zuerst gestellt werden.

2. Nehmen wir an, dass k_1^3 und k_2^3 einen gemeinschaftlichen Punkt A besitzen. Die aus A gezogenen Sehnen der beiden Curven bilden zwei Kegelflächen zweiter Ordnung mit einem gemeinschaftlichen Strahle, der Erzeugenden k_a der Schaar K; sie haben also noch mindestens einen zweiten Strahl gemeinschaftlich. Letztgenannter Strahl kann keine Erzeugende von K sein, muss also durch einen zweiten Schnittpunkt von k_1^3 und k_2^3 gehen; daraus folgen die Sätze:

Zwei Raumcurven dritter Ordnung, deren gemeinschaftliche Sehnen zu derselben Regelschaar einer Regelfläche gehören, und die einen Schnittpunkt haben, schneiden sich noch in einem zweiten Punkte.

Die zwei Raumcurven haben entweder vier oder zwei oder keine gemeinschaftlichen Punkte.

3. Die Construction der vier Schnittpunkte kann zurückgeführt werden auf die Construction der Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten, wie sich aus der hier folgenden Betrachtung ergiebt.

Man nehme einen Punkt P auf k_1^3 an und projicire von P aus k_1^3 und k_2^3 auf eine Ebene; die Projection besteht aus einer Curve zweiter Ordnung c^2 und einer Curve dritter Ordnung c^3. Die einzige durch P gehende Gerade der Schaar K schneidet die Projectionsebene in einem Doppelpunkte P' von c^3, der zugleich ein Punkt von c^2 ist. Die beiden ebenen Curven haben ausser dem Punkte P', der zwei Punkte von c^3 vertritt, noch vier Punkte gemein; verbindet man diese Punkte mit P, so erhält man die gemeinschaftlichen Strahlen der projicirenden Kegelflächen zweiten und dritten Grades, und da diese Strahlen keine gemeinschaftlichen Sehnen der Raumcurven sein können, verbinden sie die Schnittpunkte der letzteren Curven mit P. Man nehme weiter auf c^3 zwei Punkte Q', R', ziehe durch P' die Tangente p' von c^2, und denke sich c^3 entstanden aus dem Kegelschnittbüschel, bestimmt durch $Q'R'P'$ nebst der Tangente p' und einem dazu projectivischen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt S' man bestimme *). Der Kegelschnitt c^2 hat mit jedem Kegelschnitt des Büschels noch zwei Punkte gemein, deren Verbindungslinien durch einen Punkt T' laufen und einen Strahlenbüschel bilden, der gleichfalls zum Kegelschnittbüschel projectivisch ist. Die Strahlenbüschel S' und T' erzeugen einen Kegelschnitt, dessen Schnittpunkte mit c^2 zugleich die Schnittpunkte von c^2 mit c^3 sind. Aus der Theorie der Kegelschnitte können also folgende Sätze entnommen werden:

Ein Kegelschnitt, der mit einer ebenen Curve dritter Ordnung zwei Punkte oder einen Doppelpunkt gemein hat, schneidet dieselbe in noch vier Punkten, von denen jedoch zwei oder alle imaginär sein können. In den beiden letzteren Fällen giebt es jedoch zwei immer reelle gemeinschaftliche Secanten, auf welchen die imaginären Punkte durch elliptische Involutionen vertreten werden.

Jetzt sind die Schnittpunkte der Raumcurven auf H leicht construirbar. Man suche nämlich die projicirende Ebene von einer der Secanten. Diese projicirende Ebene enthält entweder die Kegelstrahlen, die P mit den Schnittpunkten von c^2 mit der Secante verbinden, oder die Strahleninvolution,

*) Für diese Construction vgl. *Reye*, G. d. L., Th. II, S. 210.

die diese vertritt; sie schneidet ausserdem die Regelfläche H in einem Kegelschnitt durch P. Im Falle der reellen Strahlen construire man ihre zweiten Schnittpunkte mit diesem Kegelschnitt und verbinde diese; im Falle der elliptischen Involution construire man das Involutionscentrum und dessen Polare (Involutionsaxe). Die letztere ist die immer reelle Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte der Raumcurven k_1^3 und k_2^3. Daraus folgt:

Wenn die Raumcurven zwei oder vier imaginäre Schnittpunkte haben, so giebt es zwei reelle Verbindungslinien dieser Punkte; die auf diesen Geraden durch die Regelfläche bestimmten Involutionen vertreten jedenfalls die Schnittpunkte. Nur im Falle von vier reellen Punkten entsteht ein reelles Tetraeder; in den anderen Fällen entsteht ein imaginäres Tetraeder mit zwei immer reellen Kanten und zwei oder vier imaginären Ebenen oder Eckpunkten.

4. Obige Betrachtung zeigt eine Uebereinstimmung der Beziehung zwischen zwei Raumcurven dritter Ordnung auf einer Regelfläche zweiter Ordnung und zwei Kegelschnitten in einer Ebene. Diese Uebereinstimmung wird noch einleuchtender, wenn man die Regelflächen H, H_1, H_2 als Bestimmungsflächen eines F^2-Bündels betrachtet. Dieser F^2-Bündel schneidet nämlich die zu ihm gehörende Fläche H in einem Büschel von Raumcurven dritter Ordnung und jede Gerade auf H in einer Involution. Die Involutionen auf den Geraden der Schaar L jedoch sollen ausser Betrachtung bleiben; sie sind parabolischer Art, da jede Gerade dieser Schaar mit den Curven auf H nur einen einzigen Punkt gemein hat und der zweite Punkt auf k gelegen ist. Die Involutionen auf den Geraden der Schaar K geben Anlass zu den folgenden Sätzen:

Vier Punkte und eine Sehne bestimmen auf einer sie enthaltenden Regelfläche einen k^3-Büschel; die Punkte können reell oder in Gruppen zu je zwei conjugirt-imaginär sein, die Sehne wird von dem Büschel in einer Involution geschnitten.

Zwei Curven des k^3-Büschels bestimmen eine Regelfläche zweiter Ordnung: die Geraden der Schaar, zu der die Sehne gehört, werden von dem Büschel in Involutionen geschnitten.

Die Art der letztgenannten Involutionen steht im Zusammenhang mit der reellen oder imaginären Beschaffenheit der Schnittpunkte, die wir Basispunkte nennen können. Man denke sich nämlich die Schaar K durch

die sich bewegende Gerade k beschrieben. Jedesmal, wenn k bei der Bewegung über einen Basispunkt wegstreift, wird eine Aenderung stattfinden; die Involution wird für den Basispunkt parabolisch, und an der einen Seite des Punktes befinden sich elliptische, an der andern hyperbolische Involutionen. Daraus folgt:

Bei vier reellen Basispunkten giebt es zwei Gruppen hyperbolischer und zwei Gruppen elliptischer Involutionen, getrennt durch vier parabolische Involutionen; bei zwei reellen Basispunkten eine Gruppe elliptischer und eine Gruppe hyperbolischer Involutionen; sind alle vier Basispunkte imaginär, so giebt es lauter hyperbolische Involutionen.

5. Auf jeder Fläche des F^2-Bündels befindet sich also ein k^3-Büschel, und das ganze Gebilde kann man einen k^3-Bündel nennen. So wie die Raumcurven den Schnitt der zum Bündel gehörenden Flächen bilden, so kann man umgekehrt, von den Raumcurven ausgehend, zu den Flächen gelangen, weil jede Combination von zwei Curven eine Fläche bestimmt. Denkt man sich nämlich zur Bestimmung des k^3-Bündels drei Curven k^3, k_1^3, k_2^3 mit der gemeinschaftlichen Sehne k gegeben, so bestimmen k_1^3 und k_2^3 eine Fläche; jede zum k^3-Büschel auf dieser Fläche gehörige Curve bestimmt mit k^3 eine neue Fläche, auf der wieder ein k^3-Büschel bestimmt ist; auf diese Weise fortfahrend, kann man den ganzen Curvenbündel construiren. Zugleich ergiebt sich eine Eigenschaft des Bündels. Eine zum Büschel $k_1^3 k_2^3$ gehörige Curve k_n^3 bestimmt mit k^3 eine Involution auf k, deren Doppelpunkte zu den Schnittpunkten von k^3 mit k harmonisch conjugirt sind. Ebenso sind die Doppelpunkte der aus k^3 mit einer anderen Curve des Büschels $k_1^3 k_2^3$ entstandenen Involution zu denselben Schnittpunkten harmonisch conjugirt; daraus folgt:

Auf jeder Fläche des F^2-Bündels, die durch eine bestimmte Raumcurve k^3 des k^3-Bündels geführt werden kann, wird durch die Schnittpunkte der Curven mit k eine Involution bestimmt. Die Doppelpunkte dieser Involutionen auf k bilden eine neue Involution, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte von k^3 mit k sind.

Wenn die Schnittpunkte von k_1^3, k_2^3 und k^3 mit k imaginär sind, wird dieser Beweis illusorisch; man kann ihn durch den folgenden ersetzen. Jede der Curven bestimmt auf k eine Involution, die in diesem Falle elliptisch ist. Man denke sich nun eine Ebene durch k und in dieser Ebene einen Hülfskegelschnitt c^2. Aus einem Punkte P dieses Hülfskegelschnitts pro-

jicire man die Involutionen auf c^2; jede derselben giebt eine Involutionsaxe, welche drei Axen a, a_1 und a_2 ein Dreieck AA_1A_2 bilden. Der Punkt A ist das Centrum der Involution durch den Büschel $k_1^3k_2^3$ auf c^2 und also auch auf k bestimmt; jede durch ihn gezogene Gerade schneidet a in einem Punkte, dem Centrum der durch k^3 und eine Curve des Büschels $k_1^3k_2^3$ auf c^2 bestimmten Involution; weil diese Centra die Gerade a beschreiben, so laufen ihre Polaren in Bezug auf c^2 durch einen Punkt; dieser Punkt ist das Centrum der durch die Doppelpunkte auf c^2 bestimmten Involution, die man also wieder auf k projiciren kann.

6. Einige Eigenschaften des k^3-Büschels lassen sich aus analogen Eigenschaften des Kegelschnittbüschels ableiten. Dies ist besonders leicht, wenn mindestens zwei der Basispunkte A und B reell sind. Projicirt man nämlich die Raumcurven aus A, so entsteht ein Büschel concentrischer Kegelflächen zweiter Ordnung; jede Kegelfläche, deren Mittelpunkt A ist, und von der einer der Strahlen die Sehne durch A ist, schneidet gleichfalls die Regelfläche in einer Raumcurve dritter Ordnung, die jedoch nicht zu dem Büschel zu gehören braucht. Legt man weiter durch zwei der gemeinschaftlichen Strahlen des Kegelbüschels Tangentenebenen an jede Kegelfläche, so bilden die Schnittlinien derselben einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kegelflächen ist, und dessen Ebene eine Diagonalenebene des Hauptvierkants des Büschels ist. Die Tangenten der Raumcurven sind die Schnittlinien der Tangentenebenen der Kegelfläche und der Regelfläche; hieraus ergiebt sich:

Die Tangenten an einer Curve des Büschels in zweien der Basispunkte beschreiben, wenn die Curve den ganzen Büschel durchläuft, zwei projectivische Strahlenbüschel, jeder in der Berührungsebene der Regelfläche in den zwei Punkten. Die beiden Strahlenbüschel besitzen je zwei Strahlen, welche die entsprechenden zwei des anderen schneiden; in diesem Falle muss die Raumcurve in einen Kegelschnitt und eine Gerade der Schaar L zerfallen. Die Tangenten, für welche dies stattfindet, liegen in den von drei der vier Basispunkte gebildeten Ebenen.

Ein anderer Satz wird auf folgende Weise erhalten. Man construire den Kegelbüschel aus A und eine Kegelfläche, von der die Sehne aus A und AB zwei Strahlen sind. Bekanntlich wird diese Kegelfläche von jeder Kegelfläche des Büschels in zwei Strahlen geschnitten, deren Verbindungsebene durch eine feste Gerade aus A geht. Die Kegelfläche schneidet H

in einer Raumcurve dritter Ordnung durch A und B; ihre Schnittpunkte mit den Curven des Büschels geben Gerade, die die Gerade aus A schneiden; daraus folgt:

Legt man durch zwei der Basispunkte eines k^3-Büschels eine Raumcurve dritter Ordnung, deren Sehnen zu der Regelschaar gehören, die der Träger des Büschels ist, so hat dieselbe mit jeder der Curven im Allgemeinen noch zwei (reelle oder conjugirt imaginäre) Punkte gemein, deren Verbindungslinien eine Regelschaar bilden, die durch die Raumcurve und eine Gerade durch den Punkt A bestimmt ist.

Endlich construire man, nachdem der Kegelflächenbüschel gefunden ist, eine Kegelfläche, die mit dem Büschel nur die Sehne durch A als gemeinschaftlichen Strahl hat. Diese Kegelfläche schneidet jede Kegelfläche des Büschels in noch drei Strahlen, die je einen Dreikant bestimmen; diese Dreikante umhüllen eine neue Kegelfläche; die Verbindungslinien der Schnittpunkte der Curven des Büschels mit der Curve dritter Ordnung, die den Schnitt von H mit der Kegelfläche durch k_a bildet, sind Tangenten der entstandenen neuen Kegelfläche; also:

Legt man durch einen der Basispunkte eines k^3-Büschels eine Raumcurve dritter Ordnung, deren Sehnen zu der Regelschaar gehören, die der Träger des Büschels ist, so hat dieselbe mit jeder der Curven im Allgemeinen noch drei Punkte gemein, deren Verbindungslinien eine Regelfläche vierter Ordnung bilden, bestimmt durch die Raumcurve und eine Kegelfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf dieser Curve liegt *).

7. Die Curven des k^3-Büschels sind verschiedener Art. Eine Untersuchung nach ihrer Art geschieht am besten, wenn man ihren Schnitt mit einer Ebene betrachtet. Eine beliebige Ebene α wird von dem F^2-Bündel in einem Kegelschnittbündel geschnitten. Es seien die Kegelschnitte, in welchen sie von H, H_1, H_2 geschnitten wird: c^2, c_1^2, c_2^2, so wird man die Schnittpunkte des k^3-Büschels mit c^2 bekommen, wenn man den Kegelschnittbüschel $c_1^2 c_2^2$ construirt und dessen Schnittpunkte mit c^2 bestimmt. Die Kegelschnitte c^2, c_1^2, c_2^2 haben einen Punkt gemein, den Schnittpunkt von k mit α; die übrigen Schnittpunkte von c^2 mit dem Büschel $c_1^2 c_2^2$ bilden Dreiecke, deren Seiten einen Kegelschnitt d^2 umhüllen, der zur weiteren Untersuchung der Raumcurven dienen kann. Der Kegelschnitt d^2 kann nämlich in Bezug auf c^2 in den folgenden Weisen gelegen sein:

---

*) Vergl. *Reye* G. d. L. Th. II, S. 115.

a) d^2 kann c^2 in vier Punkten schneiden;

b) d^2 kann c^2 in zwei Punkten schneiden;

c) d^2 kann c^2 gar nicht schneiden und c^2 einschliessen;

d) d^2 kann c^2 nicht schneiden und innerhalb von c^2 liegen.

Liegt nun ein Punkt von c^2 ausserhalb d^2, so sind zwei Tangenten an d^2 zu ziehen, und das umhüllende Dreieck ist reell; sobald ein Punkt von c^2 innerhalb d^2 liegt, sind zwei Seiten und deshalb auch zwei Eckpunkte imaginär. Die Realität der Eckpunkte des Dreiecks stimmt mit der der drei Schnittpunkte einer Curve des Büschels mit α überein.

Man nehme nun anstatt der beliebigen Ebene α die unendlich entfernte Ebene, von deren Schnitt mit H, H_1, H_2 man eine klare Vorstellung bekommt, wenn man aus einem Punkte die drei concentrischen Kegelflächen construirt, deren Strahlen den Geraden der Flächen H, H_1, H_2 parallel sind. Aus der Möglichkeit der Fälle *a*) bis *d*) folgt:

a) Der k^3-Büschel besteht aus zwei Gruppen kubischer Hyperbeln und zwei Gruppen kubischer Ellipsen. Als Uebergangscurven kommen vier parabolische Hyperbeln vor.

b) Der k^3-Büschel besteht aus einer Gruppe kubischer Ellipsen und einer Gruppe kubischer Hyperbeln. Es giebt zwei parabolische Hyperbeln.

c) Alle Curven des k^3-Büschels sind kubische Ellipsen.

d) Alle Curven des k^3-Büschels sind kubische Hyperbeln.

Im Allgemeinen kommen keine kubischen Parabeln vor. Wohl giebt es ausserdem eine Menge besonderer Fälle, welche eintreten, wenn die Fläche ein Paraboloid ist, oder wenn zwischen den Kegelschnitten c^2 und d^2 Berührung stattfindet. Die Raumcurven können weiter, wie schon bemerkt, zerfallen in einen Kegelschnitt und eine Gerade; dieser besondere Fall kann als kubische Ellipse oder Hyperbel betrachtet werden, je nachdem der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist.

8. Aus dem Behandelten ergeben sich eine Menge von Constructionen, von denen einige angegeben werden sollen. Der grösseren Allgemeinheit wegen werde ich besonders die Fälle beachten, dass gegebene Punkte imaginär sind. Wenn dies der Fall ist, so werden wir immer voraussetzen, dass auf der Verbindungslinie zweier dieser imaginären Punkte die elliptische Involution gegeben ist, welche die zwei Punkte vollständig vertritt.

a) Gegeben sind eine Gerade k und vier imaginäre Punkte; eine Regelfläche zu construiren, die zu dem dadurch bestimmten F^2-Bündel gehört.

Es seien a und b die reellen Gegenkanten des durch die vier Punkte bestimmten imaginären Tetraeders; es ist ersichtlich, dass noch zwei Punkte P und Q beliebig angenommen werden können. Man nehme sie in einer Ebene durch a an, construire einen Kegelschnitt durch P, Q, den Schnittpunkt der Ebene mit k und die zwei imaginären Punkte auf a. Jede Ebene durch b schneidet diesen Kegelschnitt in zwei Punkten und k in einem Punkte; hiermit hat man auch in dieser Ebene fünf Punkte eines Kegelschnittes und damit die Fläche genügend bestimmt.

b) Auf einer Regelfläche H eine Raumcurve dritter Ordnung zu construiren, von der fünf Punkte bekannt sind, unter denen vier imaginär.

In diesem Beispiel, wie in den folgenden, sollen immer zur Construction der Raumcurven zwei Regel- oder Kegelflächen zweiter Ordnung bestimmt werden, als deren partieller Durchschnitt die Raumcurve auftritt.

Es seien also gegeben der Punkt C und die Involutionen, die H auf den sie nicht schneidenden Geraden a und b bestimmt. Es ist ersichtlich, dass zwei Curven möglich sind, je nachdem man die Geraden der Schaar K oder der Schaar L zu Sehnen wählt. Nimmt man die Schaar K als Sehnenschaar, so construire man eine Kegelfläche zweiten Grades, bestimmt durch den Mittelpunkt C, den Strahl k der Schaar K und die Strahleninvolutionen in den Ebenen Ca und Cb. Der Durchschnitt der Kegelfläche mit der Regelfläche ist die verlangte Curve. Die zweite Raumcurve wird auf gleiche Weise construirt.

c) Eine Raumcurve dritter Ordnung zu construiren, von der zwei reelle und vier imaginäre Punkte gegeben sind.

Man wähle die reellen gegebenen Punkte C und D als Mittelpunkte der Kegelflächen zweiter Ordnung, von denen die verlangte Curve der Durchschnitt und CD der gemeinschaftliche Strahl ist. Der Punkt C bestimmt mit den Involutionen auf a und b zwei Strahleninvolutionen; die Kegelfläche kann also construirt werden, da sie durch CD und diese beiden Involutionen bestimmt ist. Auf gleiche Weise construirt man die Kegelfläche aus D; der Durchschnitt ist die verlangte Curve.

d) Eine kubische Raumcurve zu construiren, wenn von ihr sechs Punkte bekannt sind, von denen je zwei conjugirt imaginär. Es seien a, b, c die Geraden, auf denen die elliptischen Involutionen gegeben sind. Man bestimme drei Regelflächen durch die Gerade c und die imaginären Punkte auf a und b. Die Flächen können immer so gewählt werden, dass jede

der drei Raumcurven dritter Ordnung k_1^3, k_2^3, k_3^3 zwei reelle Schnittpunkte auf c bestimmt. Man bestimme jetzt auf c die Doppelpunkte A_1, A_2 und B_1, B_2 der durch k_1^3, k_2^3 und k_1^3, k_3^3 entstandenen Involutionen. Diese Doppelpunkte bilden auf einer Fläche durch k_1^3 und c wieder eine Involution; die gemeinschaftlichen conjugirten Punkte P und Q der Involution A_1A_2, B_1B_2 und der gegebenen auf c bestimmen die Doppelpunkte eines Büschels Raumcurven dritter Ordnung, von denen c eine Sehne ist und zu denen auch die Raumcurve durch die auf c gegebenen imaginären Punkte gehört. Jetzt kann eine Regelfläche, auf der die verlangte Raumcurve gelegen ist, construirt werden; denn sie ist bestimmt durch die Gerade c und zwei Raumcurven, die durch die imaginären Punkte auf a und b und je zwei Punkte auf c gehen, welche letztere harmonisch conjugirt zu P und Q sind. Es ist nun möglich, auf der Regelfläche Raumcurven dritter Ordnung durch die vier imaginären Punkte auf a und b und durch die auf a und c zu legen, und auf einer Geraden der Schaar, zu der die Sehne c gehört, die Involutionen zu bestimmen. Die gemeinschaftlichen conjugirten Punkte der beiden Involutionen liefern zwei Punkte der verlangten Raumcurve, die also durch zwei reelle und sechs imaginäre Punkte mehr als vollständig bestimmt ist. Die betreffende Gerade kann immer so gewählt werden, dass diese gemeinschaftlichen conjugirten Punkte reell werden.

Der Uebergangsfall zwischen diesem und dem vorigen Falle ist der Fall, dass gegeben sind vier imaginäre Punkte und ein Punkt mit hindurchgehender Tangente. In diesem Falle kann die Kegelfläche, auf der die verlangte Curve sich befindet, construirt werden; sie ist bestimmt durch ihren Mittelpunkt, einen Strahl und zwei Strahlen-Involutionen. Um eine zweite Fläche zu bekommen, kann man den Weg des vorigen Problems einschlagen.

e) Von zwei Raumcurven dritter Ordnung auf einer Regelschaar sind zwei gemeinschaftliche Punkte bekannt; die beiden übrigen zu finden.

Man projicire die beiden Raumcurven aus einem der gemeinschaftlichen Punkte A; dadurch werden zwei concentrische Kegelflächen zweiter Ordnung mit zwei gemeinschaftlichen Strahlen erzeugt, der Erzeugenden der Schaar aus A und der Geraden AB; die übrigen zwei gemeinschaftlichen Strahlen können also bestimmt werden. Sind diese reell, so geben ihre Schnittpunkte mit der Regelschaar die beiden gesuchten gemeinschaftlichen Punkte; sind sie imaginär, so ist jedenfalls ihre Verbindungsebene reell.

Auf gleiche Weise giebt die Kegelfläche aus B eine reelle Ebene; die Durchschnittslinie beider ist die gemeinschaftliche Sehne der beiden Curven.

f) Vier imaginäre Punkte sind auf einer Regelschaar gegeben. Auf dieser Schaar eine Raumcurve dritter Ordnung durch diese Punkte zu construiren, die eine gegebene Erzeugende der Schaar berührt.

Man construire auf der Schaar zwei Curven durch die gegebenen Punkte. Diese bestimmen auf der Geraden eine Involution; die Doppelpunkte dieser Involution sind die Berührungspunkte, und das Problem ist auf *b*) zurückgeführt.

g) Durch drei Punkte auf einer Regelschaar, von denen zwei imaginär sind, eine Raumcurve dritter Ordnung zu construiren, die zwei Gerade der Schaar oder auch zwei Tangenten der Regelfläche berührt.

Man wähle den gegebenen reellen Punkt A zum Mittelpunkt einer Kegelfläche zweiter Ordnung, von der ausserdem gegeben sind: ein Strahl, nämlich die zur Schaar gehörende Gerade aus A, die Strahlen-Involution, die A mit der Verbindungslinie der beiden imaginären Punkte verbindet, und die zwei Berührungsebenen, die A mit den gegebenen Geraden der Schaar bestimmt. Die Kegelfläche ist also zu construiren, und ihr Durchschnitt mit der Regelschaar giebt die verlangte Curve. Es giebt vier Auflösungen.

9. Die aus einem beliebigen Punkte P des Raumes an alle Raumcurven des Bündels gezogenen Sehnen bilden einen geometrischen Ort. Es ist nämlich ersichtlich, dass nicht jede Gerade aus dem Punkte P eine Sehne zu einer der Curven sein kann, da sie der Bedingung genügen muss, mit den vier Basispunkten des Bündels und der Sehne k auf einer Regelfläche zweiter Ordnung gelegen zu sein. Dieser geometrische Ort ist auf folgende Weise zu bestimmen. Der Punkt P, die Sehne k und die vier (reellen oder imaginären) Basispunkte bestimmen einen F^2-Büschel, der zu dem F^2-Bündel gehört, und dessen Grundcurve die durch die gegebenen Elemente bestimmte Raumcurve dritter Ordnung ist. Die aus P an diese Raumcurve gezogenen Sehnen sind die Erzeugenden der Regelflächen des Büschels und also auch die aus P an alle Curven des Bündels gezogenen Sehnen. Daraus folgt:

Der geometrische Ort der aus einem beliebigen Punkte an den Bündel Raumcurven dritter Ordnung gezogenen Sehnen ist eine Kegelfläche zweiter Ordnung.

Ist eine dieser Sehnen construirt, so ist sie die Erzeugende einer Regelfläche des Bündels; sie enthält also alle Punkte, die zu *P* hinsichtlich aller auf der Regelfläche befindlichen Curven conjugirt sind. Oben genannte Kegelfläche ist zugleich der geometrische Ort aller Punkte, die in Bezug auf alle Curven des Bündels zu *P* conjugirt sind.

Betrachtet man den Raumcurvenbüschel auf einer beliebigen nicht durch *P* gehenden Fläche des Bündels, so sind die zu *P* hinsichtlich der Curven auf dieser Fläche conjugirten Punkte auf der Polarebene von *P* hinsichtlich dieser Fläche gelegen. Daraus folgt:

Der geometrische Ort der Punkte, die hinsichtlich eines Curvenbüschels zu einem gegebenen Punkte conjugirt sind, ist ein Kegelschnitt in der Polarebene des Punktes in Bezug auf die Regelfläche, die der Träger des Büschels ist.

Die Polarebene von *P* schneidet die Regelfläche in einem Kegelschnitt, der mit dem obengenannten höchstens vier Punkte gemein hat. Es lassen sich aus dem Punkte *P* also höchstens vier Tangenten an den Büschel legen.

10. Die gefundenen Eigenschaften des Büschels und des Bündels kubischer Raumcurven können bei der Construction des tetraedralen Strahlencomplexes angewendet werden. Betrachten wir nämlich zwei projectivische räumliche Systeme Σ und Σ' mit den homologen Punkten *A, B, C, D, E* und *A', B', C', D', E'*, so werden die gemeinschaftlichen homologen Punkte auf folgende Weise gefunden. Man construire eine Regelfläche, die durch die projectivischen Ebenenbüschel mit den Axen *AB* und *A'B'* bestimmt ist, so liegen die Hauptpunkte des Complexes auf dieser Regelfläche. Ebenso liegen sie auf der durch die projectivischen Ebenenbüschel mit den Axen *AC* und *A'C'* erzeugten Regelfläche; und schliesslich auf der durch die projectivischen Ebenenbüschel mit den Axen *BC* und *B'C'* bestimmten Regelfläche. Da nun die Schnittlinie der Ebenen *ABC* und *A'B'C'* eine gemeinschaftliche Erzeugende der drei Regelflächen ist, so sind die Hauptpunkte die vier Schnittpunkte der durch den Schnitt der Flächen entstandenen kubischen Raumcurven; nach dem Vorhergehenden sind diese Schnittpunkte construirbar, von denen zwei oder vier imaginär sein können. Zwei Gegenkanten des Haupttetraeders sind jedoch immer reell. Ich will im Anschluss an die gegebenen Constructionen einige Anwendungen für den Fall andeuten, dass das Haupttetraeder imaginär ist.

11. Die Construction einer Ordnungscurve des Complexes ist eine directe Anwendung der Construction 8, *c*), da sie durch die vier imaginären Hauptpunkte und zwei homologe Punkte bestimmt ist. Ebenso ist eine Regelfläche, die eine Schaar von Complexstrahlen enthält, mehr als vollständig bestimmt durch zwei Complexstrahlen *a* und *b* und die vier imaginären Hauptpunkte; ihre Construction folgt also aus 8, *a*).

Ein gegebener Complexstrahl bestimmt weiter den ganzen Complex, da jeder seiner Punkte als Mittelpunkt einer Kegelfläche betrachtet werden kann, von der noch vier imaginäre Punkte bestimmt sind, die also construirbar ist. Um den Complexkegel aus einem ausserhalb des Strahles *a* gelegenen Punkte *B* zu construiren, kann man verfahren wie folgt. Man construire die durch die vier imaginären Hauptpunkte, die Sehne *a* und den Punkt *B* bestimmte Raumcurve dritter Ordnung. Die Sehnen aus *B* bilden den Complexkegel.

Es ist ersichtlich, dass in diesem Complexe keine singulären Ebenen oder Punkte vorkommen, also auch keine Strahlenbüschel erster Ordnung.

Schliesslich soll hier die Construction eines mit einem Punkte *B* homologen Punktes B' angegeben werden, wenn die collinearen räumlichen Systeme wie oben durch die vier imaginären Doppelpunkte und die zwei homologen Punkte *A* und A' bestimmt sind. Man construire wie folgt. Die Punkte *A* und A' bestimmen mit den Hauptpunkten eine Ordnungscurve k^3, die construirbar ist. Diese Curve liegt auf einer Regelfläche mit der Ordnungscurve l^3, die durch *B* geht; die Fläche ist also durch *AB* und k^3 vollständig bestimmt, und die auf ihr befindliche Ordnungscurve kann construirt werden. Aus dem Punkte A' wird nun der Leitstrahl der Regelfläche gezogen, diese schneidet l^3 in einem Punkt, dem zu *B* conjugirten Punkt B'.

Endlich können die angegebenen Sätze und Constructionen noch bei dem F^2-Büschel angewendet werden, um das Poltetraeder zu construiren. Die Ausführung dieser Constructionen kann ganz aus dem Vorhergehenden abgeleitet werden.

Tilburg, November 1884.

Ein *Steiner*sches Problem.

(Von Herrn *P. H. Schoute* in Groningen.)

Die dritte Aufgabe des Anhanges der „Syst. Entw. der Abh. geom. Gest. etc.“ lautet:

„Wenn in einer Ebene zwei beliebige Gerade A, A' und in jeder irgend vier harmonische Punkte gegeben sind, so bestimmen die letzteren, paarweise genommen, 16 Strahlen s, diese schneiden sich in 72 Punkten p, u. s. w. Welche Eigenschaft haben die Strahlen s in Hinsicht ihrer gegenseitigen Lage und welche die Punkte p? Wie oft liegen von den letzteren drei, und wie oft sechs in einer Geraden? u. s. w. (Giebt es z. B. acht Kegelschnitte, wovon jeder die gegebenen Geraden A, A' und vier Strahlen s berührt? Liegen unter anderen von den Punkten p acht mal sechs in einer Geraden, und schneiden sich von diesen vier und vier in einem Punkt? u. s. w.)“

Dr. *Bauer* aus Stettin gab im 19. Bande, Seite 214—227 dieses Journals eine vollständige Lösung dieser Aufgabe. Nach dem Hinweise auf diese Lösung ist es nur der Zweck meiner Mittheilung, in aller Kürze darzuthun, dass der eingeklammerte Theil, welchen *Steiner* etwas schalkhaft dem Satze anreiht, sich viel unmittelbarer beweisen lässt, und dass dabei eine von *Steiner* nicht angegebene, auch von *Bauer* nicht aufgedeckte Reciprocität eintritt.

Man hat bekanntlich den Hülfssatz:

„Wenn in einer Ebene zwei beliebige Gerade A, A' und in diesen zwei projectivische Punktreihen $a, b, c, d, \dots x, \dots y, \dots$ und $a', b', c', d', \dots x', \dots y', \dots$ gegeben sind, so ist der Ort des Schnittpunktes der Wechselstrahlen xy' und $x'y$ die Gerade l, welche jede der beiden Geraden A, A' in dem Punkte schneidet, der dem Schnittpunkte t (oder t') von A und A' auf der jedesmaligen anderen Geraden entspricht. Diese Gerade l ist die

Polare vom Schnittpunkte t in Bezug auf den von den Verbindungslinien der entsprechenden Punkte der Punktreihen eingehüllten Kegelschnitt."

Sind nun in den Geraden A und A' die harmonischen Würfe (ab, cd) und $(a'b', c'd')$ angenommen, so kann die Punktreihe $(a'b'c'd't'\ldots)$ von A' mit jeder der Punktreihen

$$(abcdu_1\ldots),\quad (bacdu_3\ldots),\quad (cdabu_5\ldots),\quad (dcabu_7\ldots),$$
$$(abdcu_2\ldots),\quad (badcu_4\ldots),\quad (cdbau_6\ldots),\quad (dcbau_8\ldots)$$

von A in projectivische Verbindung gebracht werden, und hieraus gehen die acht Geraden $l_1, l_2, \ldots l_8$ hervor, von welchen eine jede sechs der Punkte p enthält, die Polaren von t' in Bezug auf die acht von den Punktreihen erzeugten Kegelschnitte des Problems.

Wenn in den beiden projectivischen Punktreihen $a, b, c, d, \ldots$ und $a', b', c', d', \ldots$ des Hülfssatzes e, f die Doppelpunkte der von den Paaren (ab) und (cd) bestimmten Involution und g', h' die Doppelpunkte der von den Paaren $(a'b')$ und $(c'd')$ bestimmten Involution sind, so entspricht offenbar in diesen projectivischen Punktreihen entweder e dem g' und f dem h', oder aber e dem h' und f dem g'. Ist k der Schnittpunkt von eg' und fh', k' der Schnittpunkt von eh' und fg', so enthält jede der acht Geraden $l_1, l_2, \ldots l_8$ dem Hülfssatze nach also einen dieser beiden Punkte k oder k'. Und es lässt sich leicht entscheiden, welche Geraden l durch den einen und welche durch den anderen dieser Punkte gehen. Hat man nämlich die Buchstaben e, f und g', h' so über die Doppelpunkte der beiden Involutionen vertheilt, dass $(a'b'c'd'g'h') \overline{\wedge} (abcdef)$ ist, so hat man auch $(a'b'c'd'g'h') \overline{\wedge} (abdcfe)$, da die andere Annahme $(a'b'c'd'g'h') \overline{\wedge} (abdcef)$ auf die unmögliche Relation $(abcdef) \overline{\wedge} (abdcef)$ führt, u. s. w. So findet man, dass die Geraden l_1, l_4, l_6, l_7 durch k' und die Geraden l_2, l_3, l_5, l_8 durch k gehen, und hiermit ist der eingeklammerte Theil des Satzes bewiesen.

Bei diesem kurzen Beweise der *Steiner*schen Aufgabe ist nicht auf die Realität der eingeführten Punkte und Geraden geachtet, obgleich es bekannt ist, dass die von den zwei über einander greifenden Paaren eines harmonischen Wurfes gebildete Involution eine elliptische ist, ihre Doppelpunkte also conjugirt imaginäre Punkte sind. Indem ich also bemerke, dass meine Beweisführung mit imaginären Instrumenten operirt, will ich, bevor ich weiter gehe, zeigen, wie die offenbar jedenfalls reellen Punkte k und k', welche mit t die drei Diagonalpunkte des von den zwei Paaren conjugirt imaginärer Doppelpunkte ef, $g'h'$ gebildeten vollständigen Vier-

ecks sind, ohne Benutzung der in der Auflösung auftretenden Geraden l construirt werden können.

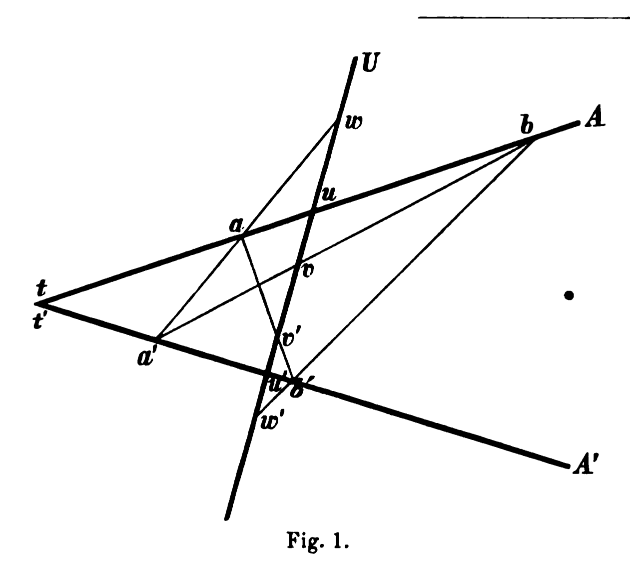


Fig. 1.

Die auf A und A' (Fig. 1) gegebenen Involutionen mögen mittelst der Paare ab, tu und $a'b'$, $t'u'$ gegeben sein, wobei t und t' im Schnittpunkte der Träger A und A' vereinigt liegen und ab und tu sowie $a'b'$ und $t'u'$ dem elliptischen Charakter der Involutionen nach über einander greifen. Dann schneiden die Kegelschnitte des Büschels mit den Basispunkten a, b, a', b' aus der Verbindungslinie U der Punkte u, u' eine Involution aus, welcher die Paare uu', vv', ww' angehören. Seien p und q die Doppelpunkte dieser neuen, offenbar hyperbolischen Involution; betrachtet man nun weiter den Büschel der Kegelschnitte, welche durch a, b gehen und U im reellen Punkte p resp. q berühren, so findet man unmittelbar, dass die von diesen Kegelschnitten auf A' bestimmte Involution mit der auf dieser Geraden schon vorliegenden identisch sein muss, da sie eben die zwei Paare $a'b'$ und $t'u'$ mit jener gemein hat. Also wird der Büschel von Kegelschnitten, welche durch a, b und die Punkte irgend eines Paares der auf A' gegebenen Involution gehen, auf U immer die nämliche Involution mit den reellen Doppelpunkten p, q hervorrufen, und dies wird offenbar nun auch von den Kegelschnitten jedes Büschels gelten, dessen vier Basispunkte aus der Combination irgend eines Paares der auf A mit irgend einem Paare der auf A' vorliegenden Involution gebildet sind. Und hieraus geht unmittelbar hervor, dass die Geraden, welche p und q auf irgend eine der beiden Weisen mit den Punkten eines Paares der auf A gegebenen Involution verbinden, A' in den Punkten eines Paares der auf A' gegebenen Involution schneiden; oder in anderer Fassung, es sind die reellen Punkte p, q die Projectionscentra, aus welchen die auf A und A' vorliegenden Involutionen sich mittelst centraler Projection in einander überführen lassen. Es sind also auch die Punkte p und q mit den oben eingeführten Punkten

k und k' identisch, d. h. die Punkte k und k' werden gefunden als die Doppelpunkte der auf U gebildeten hyperbolischen Involution, u. s. w. *).

Im Vorübergehen weise ich auf die äusserst einfache Lage der drei Involutionen auf den Geraden A, A', U hin, welche dadurch charakterisirt werden kann, dass irgend ein Kegelschnitt — und also auch ein Geradenpaar — welcher aus jeder von zwei der drei Geraden ein Paar der auf diesen Geraden vorliegenden Involutionen bestimmt, dies auch auf der dritten Geraden thut. Es sind entweder alle sechs Doppelpunkte dieser drei Involutionen reell oder aber nur zwei. Und die angegebenen Kegelschnitte bilden ein Netz, da die drei Paare von Gegenecken eines vollständigen Vierseits mit entweder vier reellen Seiten oder mit keiner Paare von conjugirten Punkten in Bezug auf alle sind **).

Ich gehe zum oben versprochenen Nachweise einer Reciprocität der *Steiner*schen Figur über. In ihr hat man:

$$(t'h'g'a') \overline{\wedge} (a'g'h't') \overline{\wedge} (aefu_1) \overline{\wedge} (afeu_2),$$
$$(t'h'g'b') \overline{\wedge} (b'g'h't') \overline{\wedge} (aefu_4) \overline{\wedge} (afeu_3),$$
$$(t'h'g'c') \overline{\wedge} (c'g'h't') \overline{\wedge} (aefu_7) \overline{\wedge} (afeu_5),$$
$$(t'h'g'd') \overline{\wedge} (d'g'h't') \overline{\wedge} (aefu_6) \overline{\wedge} (afeu_8).$$

Deshalb ist auch

$$(t'h'g'a'b'c'd') \overline{\wedge} (aefu_1u_4u_7u_6) \overline{\wedge} (afeu_2u_3u_5u_8),$$

und also

$$(a'b'c'd') \overline{\wedge} (u_1u_4u_7u_6) \overline{\wedge} (u_2u_3u_5u_8),$$

---

*) Diese Construction habe ich im Jahre 1877 ohne Beweis veröffentlicht in „Eenige beschouwingen enz“ (Verslagen en mededeelingen der koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 2e Reeks, deel XIII).

**) Diese hier nur beiläufig im Beweise auftretende Figur der drei verwandten Involutionen auf den Geraden A, A', U mit ihrer dualistisch gegenüberstehenden ist in Bezug auf alle möglichen Fälle der Realität in aller Ausführlichkeit von Herrn *H. Schroeter* als Grundlage der geometrischen Theorie des Kegelschnittbüschels mit zwei Paaren conjugirt-imaginärer Basispunkte, respective der Kegelschnittschaar mit zwei Paaren conjugirt-imaginärer Basistangenten behandelt worden. Man vergleiche in Herrn *Schroeters* Bearbeitung von „*Jacob Steiners* Vorlesungen über synthetische Geometrie“, II. Theil, Leipzig 1876, 2. Auflage die Paragraphen 42, 49, 51 und die dritte Aufgabe von Seite 404.

Dass ich bei der umgekehrten Gedankenfolge zum Beweise der Verwandtschaft der drei Involutionen nur die aus der Definition der Involution unmittelbar hervorgehenden Eigenschaften des Schnittpunktensystems von einer Geraden mit den Kegelschnitten eines Büschels mit vier reellen Basispunkten zu benutzen brauche, wird wohl genügend zeigen, dass bei meiner Behandlung nicht an einen Kreisbeweis zu denken sei.

d. h. die beiden Strahlenwürfe $k'(u_1u_4, u_6u_7)$ und $k(u_2u_3, u_5u_8)$, oder (l_1l_4, l_6l_7) und (l_2l_3, l_5l_8) sind harmonisch. Von den beiden harmonischen Punktwürfen (ab, cd) und $(a'b', c'd')$ auf A und A' ausgehend, gelangt man also mittelst der Construction des Problems zu den zwei harmonischen Strahlenwürfen (l_1l_4, l_6l_7) und (l_2l_3, l_5l_8) um k' und k. Es fragt sich nun, ob man umgekehrt auf dem dualistisch gegenüberliegenden Wege von den Strahlenwürfen um k und k' ausgehend zu zwei auf A und A' liegenden harmonischen Punktwürfen zurückgeführt wird.

Aus der Projectivität von $(a'b'c'd't')$ mit jedem der acht im Anfange angegebenen Punktquintupeln

$$(abcdu_1),\quad (bacdu_3),\quad (cdabu_5),\quad (dcabu_7),$$
$$(abdcu_2),\quad (badcu_4),\quad (cdbau_6),\quad (dcbau_8),$$

folgt unmittelbar, dass die Paare u_1u_4, u_6u_7 und u_2u_3, u_5u_8 der Involution ab, cd angehören und somit von e, f harmonisch getrennt sind *). Daher sind eh' und fg' die Doppelstrahlen der Involution l_1l_4, l_6l_7 um k' und eg' und fh' die Doppelstrahlen der Involution l_2l_3, l_5l_8 um k. Also findet man durch reciproke Umbildung der erhaltenen Resultate, dass die harmonischen Strahlenwürfe (l_1l_4, l_6l_7) und (l_2l_3, l_5l_8) zu zwei harmonischen Punktwürfen führen, von denen der eine auf A aus zwei von e, f harmonisch getrennten Paaren, der andere auf A' aus zwei von g', h' harmonisch getrennten Paaren besteht. Also führt das dualistisch gegenüber stehende Problem wirklich zu zwei auf A und A' liegenden harmonischen Punktwürfen, wobei die Punkte ef und $g'h'$ in ungeänderter Weise auftreten, und die Figur des Problems ist in Bezug auf die Träger A und A' der Punktquadrupel, die Mittelpunkte k und k' der Strahlenquadrupel und die Doppelpunkte und Doppelstrahlen eine in sich abgeschlossene. Allein die neuen Punktwürfe stimmen im Allgemeinen nicht mit den ursprünglichen überein, wie ich nun zeigen werde.

Wenn bei der reciproken Umbildung der Anordnung $\binom{ab,\ cd}{a'b',\ c'd'}$ der Punktwürfe die Anordnung $\binom{l_1l_4,\ l_7l_6}{l_2l_3,\ l_5l_8}$ der Strahlenwürfe entspricht, so ist der der Geraden l_1 entsprechende Punkt α offenbar der Schnittpunkt von der die Punkte l_1l_3 und l_2l_4 verbindenden Geraden mit der Geraden, welche

*) Man findet auch, dass die vier Paare u_1u_2, u_3u_4, u_5u_7, u_6u_8 harmonisch getrennt werden von ab und die vier Paare u_1u_3, u_2u_4, u_5u_6, u_7u_8 von cd.

die Punkte $l_5 l_6$ und $l_7 l_8$ verbindet. Aber es erhellt aus der Erzeugungsweise der Geraden l, dass der Punkt $l_1 l_3$ als der Schnittpunkt der Geraden cd' und $c'd$ mittelst des Symboles $(cd', c'd)$, der Punkt $l_2 l_4$ auf die nämliche Weise als (cc', dd') charakterisirt werden kann; deshalb erscheint die Gerade $(l_1 l_3, l_2 l_4)$ als die dritte Diagonale des Vierecks $cc'dd'$ und ebenso die Gerade $(l_5 l_6, l_7 l_8)$ als die dritte Diagonale des Vierecks $a'cb'd$. Und der Schnittpunkt α dieser Geraden ist offenbar der auf A liegende mittelst t von c und d harmonisch getrennte Punkt, der nur dann mit irgend einem der vier Punkte $abcd$ coincidiren kann, wenn einer dieser Punkte in t liegt. Im Allgemeinen fällt der neue Punktwurf $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ auf A also nicht mit dem gegebenen (ab, cd) zusammen, und man steht nun weiter vor der Frage, ob eine mehrfache Wiederholung des Verfahrens, welches von (ab, cd) zu $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ führte, entweder immer neue Punktquadrupel herbeischafft, oder aber nur einen abgeschlossenen Cyklus von einigen Punktquadrupeln. Zur Beantwortung dieser Frage fasse ich die Beziehung zwischen den beiden Punktwürfen (ab, cd) und $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ etwas näher ins Auge.

Die Paare einer elliptischen Involution ab, cd erscheinen bekanntlich aus zwei in Bezug auf den Träger A symmetrisch liegenden Punkten m_1 und m_2 unter rechten Winkeln. Wenn nun zwei Paare wie ab und cd einander harmonisch trennen, so werden die rechten Winkel amb und cmd, wo m (Fig. 2) einen der beiden Punkte m_1, m_2 bedeutet, einander halbiren, d. h. es bilden die Geraden $m(abcd)$ „einen regelmässigen Vierstern“ um m. Nimmt man nun auf A irgend einen Punkt t an und sucht man auf dieser Geraden den Punkt α, welcher t harmonisch trennt von ab, und den Punkt β, welcher t harmonisch trennt von cd, so bilden α und β wieder ein Paar der Involution ab, cd. Denn, da mt antiparallel ist zu $m\alpha$ in Bezug auf ma, und zu $m\beta$ in Bezug auf mc, so ist der Winkel $am\beta$

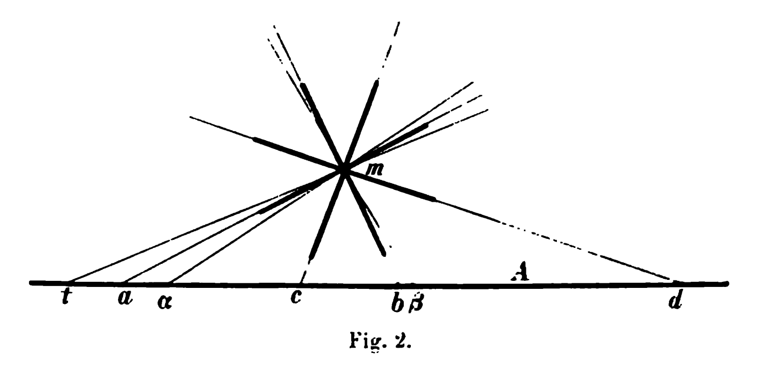


Fig. 2.

doppelt so gross wie der Winkel *amc* und mithin ein rechter. Indem es vorher noch dahingestellt blieb, ob die Punkte α und β des neuen harmonischen Quadrupels auf A, welche den Schnittpunkt t der beiden Träger A und A' harmonisch trennen von den Paaren *ab* und *cd*, entweder verschiedenen Paaren der auf A vorliegenden Involution angehören, oder aber zusammen ein Paar dieser Involution bilden werden, so ist jetzt diese Frage im letzteren Sinne beantwortet, und das andere Paar $\gamma\delta$ kann nun mittelst des durch $\alpha\beta$ bestimmten regelmässigen Viersterns unmittelbar construirt werden. Jetzt hat man in Bezug auf die Reihe der Punktwürfe auf A' nur zu entscheiden, ob die Reihe der entsprechenden regelmässigen Viersterne sich schliesst. Offenbar tritt bei dieser Sterninvolution *) nach einer n-maligen Wiederholung des Verfahrens nur dann Schliessung ein, wenn der mit φ bezeichnete Winkel *tma* der Bedingung Genüge leistet, dass entweder $(2^n-1)\varphi$ oder $2^n.\varphi$ ein ganzes Vielfaches von einem halben rechten Winkel ist. Denn im ersten dieser besonderen Fälle bildet die Reihe der Punktwürfe auf A einen Cyklus von n Elementen. Und im zweiten erhält man bei der n^{ten} Wiederholung sprungweise einen Zustand, aus welchem weitere Wiederholung nicht mehr hinauszuführen vermag, da einer der vier Punkte des n^{ten} Wurfes im Schnittpunkte t der Träger angelangt ist. Wenn die Reihe der Würfe auf A geschlossen ist, so kann weiter die in dieser Hinsicht von ihr ganz unabhängige Reihe der Würfe auf A' und mit ihr also noch die ganze Figur ungeschlossen bleiben. Nur wenn bei beiden Trägern A, A' einer der beiden besonderen Fälle eintritt, wird sich die ganze Figur schliessen und zwar entweder cyklusartig oder sprungweise, jenachdem unter den beiden Schliessungsfällen der Träger nicht oder auch eine Schliessung mittelst eines Endzustandes vorkommt **).

*) Man vergleiche meinen Aufsatz „Sur les courbes sectrices" (Journal de mathématiques spéciales, 1885).

**) Wenn man eine Zahl k durch eine andere Zahl l dividirt, dann k durch das arithmetische Mittel aus Divisor l und Quotient $\frac{k}{l}$ dividirt und das letzte Verfahren in der Weise immer weiter fortsetzt, dass das arithmetische Mittel aus den unmittelbar vorhergehenden Divisoren und Quotienten den neuen Divisor bildet, so nähert man sich bekanntlich einem Grenzzustande, wobei Divisor und Quotient der Quadratwurzel aus k gleich sind. Wenn man dieses Verfahren bei beliebigem ersten Divisor auf eine negative Zahl k anwendet, so findet man nach dem Obigen, dass im Allgemeinen keine Grenze erzielt wird, in besonderen Fällen aber entweder ein Cyklus von Divisoren und also auch von Quotienten, oder sprungweise die Null und die Unendlichkeit als Divisor und Quotient erhalten wird.

Ich schliesse diesen Aufsatz mit einigen Bemerkungen.

Die acht von *Steiner* erwähnten Kegelschnitte ordnen sich in zwei harmonische Schaarwürfe $(K_1K_4,\ K_6K_7)$ und $(K_2K_3,\ K_5K_8)$, von welchen die vier ersteren ausser A, A' die Geraden eg' und fh', die vier letzteren ausser A, A' die Geraden eh' und fg' berühren. Ebenso geben die zwei Strahlenwürfe l um k und k' zur Erzeugung von zwei harmonischen Büschelwürfen von Kegelschnitten Anlass, von welchen die vier ersteren durch k, k', e, f, die vier letzteren durch k, k', g', h' gehen. Auch hier tritt bei Wiederholung im Allgemeinen keine Schliessung ein, u. s. w.

In der vierten Aufgabe des angeführten *Steiner*schen Werkes wird der Fall von zwei gegen einander windschiefen Geraden A, A' betrachtet. Aus dem Vorhergehenden folgt nun leicht, dass die acht Paare von projectivischen Punktreihen in der bekannten Weise acht Regelschaaren erzeugen, welche sich in zwei harmonische Regelschaarenwürfe $(H_1H_4,\ H_6H_7)$ und $(H_2H_3,\ H_5H_8)$ ordnen. Es sind diese Würfe sowohl Schaarenwürfe als Büschelwürfe, da allen Flächen des ersten Wurfes die vier Geraden A, A', eg', fh', allen Flächen des zweiten Wurfes die vier Geraden A, A', eh', fg' gemeinsam sind.

Wenn in einem Kegelschnitte K zwei projectivische Punktreihen $a, b, c, d, \ldots x, \ldots y, \ldots$ und $a', b', c', d', \ldots x', \ldots y', \ldots$ gegeben sind, so ist der Ort des Schnittpunktes der Wechselstrahlen xy' und $x'y$ bekanntlich die Gerade l, welche die Doppelpunkte der beiden Punktreihen verbindet. Deshalb führen zwei harmonische Punktwürfe $(ab,\ cd)$ und $(a'b',\ c'd')$ in einem Kegelschnitte K mittelst dieses umgeänderten Hülfssatzes auf nämliche Weise zu zwei harmonischen Strahlenwürfen $(l_1l_4,\ l_6l_7)$ und $(l_2l_3,\ l_5l_8)$. Hierin liegt der Kern der Auflösung der fünften Aufgabe des nämlichen Werkes; allein da sie nicht auf die reciproke Figur von zweimal vier harmonischen Tangenten eines eigentlichen Kegelschnittes sondern unmittelbar auf die reciproke Figur des Hauptproblemes führt, kann ich ihre Auflösung hier als beendigt betrachten.

Groningen, 10. Oktober 1885.

Ueber Strahlencongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrade.

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Münster i. W.)

1. Es sei ein linearer Strahlencomplex $\mathit{\Lambda}$ gegeben, (A, β) ein beliebiger Strahlenbüschel desselben (mit dem Scheitel A, der Ebene β), B ein Punkt in β, α die ihm zugehörige Ebene in $\mathit{\Lambda}$ (die Nullebene von B in dem mit $\mathit{\Lambda}$ verbundenen Nullsysteme N); sie geht durch A. Alle Strahlen von $\mathit{\Lambda}$, welche einen Strahl von (A, α) treffen, treffen einen und denselben Strahl von (B, β), den jenem in N entsprechenden oder in Bezug auf $\mathit{\Lambda}$ conjugirten. Die beiden Büschel (A, α) und (B, β) werden so projectiv bezogen und zwar derartig, dass der Strahl $AB \equiv \alpha\beta$ sich selbst entspricht.

Dies führt zu einer überaus einfachen Erzeugung des linearen Strahlencomplexes durch zwei projective Strahlenbüschel (A, α), (B, β), die einen sich selbst entsprechenden Strahl haben. Alle Strahlen, welche zwei entsprechende (getrennte) Strahlen der beiden Büschel zugleich schneiden, gehören zum Complexe. Diese Erzeugung scheint dem Charakter der Strahlengeometrie am meisten entsprechend und ist in sich dual; ich bin durch die Herren *W. Stahl* und *Jolles* freundlichst auf eine Stelle (S. 27) in der Gedächtnissschrift von *Clebsch* auf *Plücker* *) aufmerksam gemacht worden, in der erwähnt wird, dass Herr *Sylvester* diese Erzeugung ausgesprochen hat **).

Die Haupteigenschaften des linearen Complexes ergeben sich leicht aus ihr. Eine beliebige Ebene ξ schneidet beide Strahlenbüschel in zwei

*) Abh. der Ges. der Wissensch. zu Göttingen Bd. 15 (1872).

**) Herr *Sylvester* hat mir gütigst die von *Clebsch* nicht genannte Stelle mitgetheilt: Comptes rendus, Bd. 52 (1861) S. 741; sie befindet sich in dem Aufsatze, in dem er die Beziehung von Geraden aufsucht, die mit fünf gegebenen Geraden Wirkungslinien von Kräften im Gleichgewicht sind, oder, wie er sich ausdrückt, mit den fünf Geraden in Involution sind, also nach der heutigen liniengeometrischen Terminologie dem durch die fünf Geraden bestimmten linearen Complexe angehören.

projectiven Punktreihen in perspectiver Lage; deren Erzeugniss ist der Strahlenbüschel des Complexes in ξ. Sind a_1, b_1; a_2, b_2 zwei Paare entsprechender Strahlen von (A, α), (B, β), so geben die Verbindungslinien der Spuren von a_1 und b_1, a_2 und b_2 in ξ den Scheitel X des Büschels; dreht sich ξ um eine Gerade g, so bewegt sich X auf der Geraden g', welche den Hyperboloiden (ga_1b_1), (ga_2b_2) ausser g, $(A, g\beta)$, $(B, g\alpha)$ gemein ist.

Zwei Lagen des Scheitels X geben die conjugirte Gerade g'; wir nehmen die beiden Ebenen ξ durch g, welche A, bezw. B enthalten; sie bestimmen zwei Strahlen in (A, α) und (B, β); es seien b', a' die ihnen homologen Strahlen; die beiden g' bestimmenden Punkte sind die Schnitte (b', gA), (a', gB). Die beiden perspectiven Punktreihen in den Ebenen gA, gB befinden sich in ausgearteter Projectivität, so dass jede einen singulären Punkt besitzt, dem alle Punkte der andern Reihe entsprechen.

Fassen wir g als Ort von Punkten X auf, so sind b', a' auch die Strahlen, welche den von g getroffenen homolog sind; die Axe, um welche sich ξ dreht, ist die Schnittlinie der Ebenen $(b', g\alpha)$, $(a', g\beta)$; man erkennt leicht, dass sie mit der obigen g' identisch ist.

Wie jede zwei homologe Strahlen a, b von (A, α), (B, β) zu einer in $\mathcal{A}$ enthaltenen linearen Congruenz $[a, b]$ führen, so müssen es auch die beiden in $s \equiv AB \equiv \alpha\beta$ vereinigten entsprechenden Strahlen thun; diese Congruenz $[s, s]$ gewinnen wir folgendermassen. Der Ebenenbüschel um b und die Punktreihe auf a sind projectiv mit incidenten Elementen ζ und Z als entsprechenden, zu denen unter andern β und A gehören. Die lineare Congruenz $[a, b]$ ist der Inbegriff der Büschel (Z, ζ). Die Projection des Büschels (B, β) auf α aus einem beliebigen Punkte U ist ein zu (A, α) perspectiver Büschel; dem Punkte, in dem a den perspectiven Durchschnitt beider trifft, entspricht in der obigen Projectivität (Z, ζ) die Ebene bU; dem Schnitte $\mathfrak{U}$ des perspectiven Durchschnitts mit s entspricht also in der analogen Projectivität auf und um s die Ebene sU; ein zweiter Punkt V liefere $\mathfrak{V}$. Sind nun Z, ζ irgend zwei entsprechende Elemente in der Projectivität zwischen der Punktreihe auf s und dem Ebenenbüschel um s, in der den Punkten A, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ die Ebenen β, sU, sV entsprechen, so wird die lineare Congruenz $[s, s]$ unseres Complexes $\mathcal{A}$ durch alle Strahlenbüschel (Z, ζ) erzeugt.

2. *Wenn hingegen die beiden projectiven Strahlenbüschel* (A, α), (B, β)

keinen sich selbst entsprechenden Strahl haben, so ist das Erzeugniss der Strahlen, welche zwei homologe Strahlen treffen, ein tetraedraler Complex *). Es seien C, D die beiden sich selbst entsprechenden Punkte der beiden conjectiven **) Punktreihen, die auf $\alpha\beta$ entstehen; sind a_1, b_1; a_2, b_2 die von den Complexstrahlen x, y getroffenen Strahlen der beiden Büschel und A_1, B_1; A_2, B_2 ihre Schnitte mit $\alpha\beta$, so ist:

$$x(ABCD) \barwedge (A_1B_1CD), \quad y(ABCD) \barwedge (A_2B_2CD);$$

aber bekanntlich ist:

$$(A_1B_1CD) \barwedge (A_2B_2CD).$$

Dass umgekehrt bei einem tetraedralen Complexe die Büschel um zwei Ecken des Haupttetraeders in den Ebenen nach der Verbindungslinie der beiden andern so projectiv sind, dass alle Strahlen des Complexes, die einem Strahle des einen Büschels begegnen, auch denselben Strahl, den entsprechenden, im andern treffen, hat Herr *Reye* dargethan ***).

3. Wir wollen nun nicht, die Strahlenbüschel durch Regelschaaren, Strahleninvolutionen etc. ersetzend, zur Erzeugung höherer Complexe übergehen, sondern, die erzeugenden Gebilde vermehrend, Strahlencongruenzen herzustellen suchen. *Drei projective einstufige Strahlengebilde erzeugen durch alle Strahlen, welche je drei homologe Strahlen treffen, eine Congruenz und zwar wegen der in sich dualen Construction von gleichem Bündel- und Feldgrad* †) *(Ordnung und Klasse).*

Die Congruenz, deren beide Grade 2 *sind,* entsteht durch drei projective Strahlenbüschel (A, α), (B, β), (C, γ), von denen zwei einen sich selbst entsprechenden Strahl haben. Obgleich diese Congruenz schon eine

---

*) Ich erfahre nachträglich von meinem Freunde *Hirst*, dass er diese Erzeugung des tetraedralen Complexes durch zwei projective Strahlenbüschel vor einigen Jahren bei seiner Untersuchung von Complexen gefunden habe, welche durch correlative Felder erzeugt werden, indem er die Correlation in eine solche mit zwei singulären Punkten ausarten liess. Man sehe Art. 45 des Aufsatzes: On the complexes generated by two correlative planes, der in den zu Ehren *Chelinis* erschienenen Collectanea mathematica veröffentlicht ist, sowie Nr. 23 des Auszugs aus diesem Aufsatze in Band X der Proceedings of the London Mathematical Society.
September 1886.

**) *Conjectiv* nennt *H. Pfaff* (Neuere Geometrie, Erlangen 1867) zwei projective Gebilde gleicher Art, die denselben (oder dieselben) Träger haben.

***) Geometrie der Lage, Abth. II, S. 139 der zweiten Auflage.

†) Diese prägnanteren Ausdrücke sind von Herrn *Schubert* vorgeschlagen: Math. Ann. Bd. 10, S. 18; Kalkül der abzählenden Geometrie S. 18.

ziemlich umfangreiche Bearbeitung erfahren hat*), so dürfte es vielleicht doch nicht überflüssig sein, ihre Haupteigenschaften nochmals aus dieser, wie es scheint, einfachsten und die Selbstdualität unmittelbar zeigenden Erzeugung abzuleiten. Zu derselben bin ich übrigens bei Gelegenheit der Lectüre des unten erwähnten Aufsatzes des Herrn *Stahl* gelangt; denn sie ist indirect in dessen Erzeugung enthalten. Die von Herrn *Stahl* benutzte Reciprocität von besonderer Art ist eine von den ausgearteten Correlationen, mit denen Herr *Hirst* und ich in unsern Projectivitäts- und Correlations-Untersuchungen vielfach zu thun gehabt haben; sie läuft auf eine Strahlenbüschel-Projectivität hinaus, und ich habe sie einfach dadurch ersetzt. Die 16 singulären Strahlenbüschel der Congruenz (2, 2) ergeben sich sehr einfach, 12 fast unmittelbar; und für den Beweis des Arrangements der singulären Punkte auf Kegelschnitten ist nur der *Pascal*sche Satz nothwendig. Zum Grade der Brennfläche führt der Satz, dass an eine Curve dritter Ordnung von einem ihrer Punkte vier Tangenten gehen.

Im zweiten Abschnitte beschäftige ich mich eingehend mit dem schon von Herrn *Kummer* im genannten Aufsatze erwähnten *Specialfalle der Congruenz (2, 2), bei dem die Brennfläche eine Regelfläche vierten Grades mit zwei doppelten Leitgeraden ist;* einerseits gebe ich eine einfache ebenfalls in sich duale Erzeugung dieser speciellen Congruenz an und leite sie andererseits auch aus einer beliebigen Regelfläche der genannten Art ab, wobei sich einige wohl noch nicht bekannte Eigenschaften dieser Regelfläche ergeben.

Im dritten Abschnitte wird für *die eine der beiden Strahlencongruenzen, deren beide Grade 3 sind, den Schnitt zweier quadratischen Complexe neben einer linearen Congruenz* — das Analogon der kubischen Raumcurve — eine sie, wie es scheint, in voller Allgemeinheit herstellende, noch ziemlich einfache Erzeugung angegeben; es ist dies diejenige Congruenz, welche Herr *Kummer* **) ebenfalls zuerst betrachtet hat.

Die drei Abschnitte sind ziemlich unabhängig von einander.

---

*) *Kummer,* Abhandlungen der Berliner Akademie für 1866; *Reye,* dieses Journal, Bd. 86, S. 84, 209; *Schur,* Math. Ann., Bd. 15, S. 432; *Caporali,* Memorie dell' Accademia dei Lincei (1878) ser. 3, vol. 2; *W. Stahl,* dieses Journal, Bd. 92, S. 172; *Hirst,* Proceedings of the London Math. Society, Bd. 14, S. 251. — Kurz vor der Absendung dieses Aufsatzes erfahre ich, dass *Ettore Caporali* am 2. Juli, erst 30 Jahre alt, gestorben ist.

**) Berliner Monatsberichte für 1878, S. 25.

I.

Die allgemeine Congruenz (2, 2).

4. *Drei projective Strahlenbüschel* (A, α), (B, β), (C, γ) *sind gegeben, von denen* (A, α), (B, β) *einen sich selbst entsprechenden Strahl* $AB \equiv \alpha\beta$ *haben. Die Strahlen, welche je drei entsprechende Strahlen derselben treffen, erzeugen eine Congruenz* (2, 2). Sie ist der Schnitt des linearen Complexes $\mathcal{A}$ (mit dem Nullsysteme N), der durch (A, α), (B, β) entsteht, und des tetraedralen Complexes T, welcher durch (A, α) oder (B, β) und (C, γ) erzeugt wird.

Durch (A, α), (B, β) wird jeder Strahlenbüschel von $\mathcal{A}$ zu ihnen und also auch zu (C, γ) in projective Beziehung gebracht, indem jeder Strahl desselben ja den beiden Strahlen von (A, α), (B, β), die er trifft, zugeordnet wird. *Es seien* δ, D *die den* C, γ *im Nullsysteme* N *entsprechenden Elemente; so treffen alle Strahlen der Congruenz, welche einem bestimmten Strahle von* (C, γ) *begegnen, einen und denselben Strahl von* (D, δ), *den jenem in* N *entsprechenden.* Dadurch wird auch (D, δ) zu (A, α), (B, β), (C, γ) und allen Strahlenbüscheln von $\mathcal{A}$ projectiv, und (C, γ) kann durch (D, δ) ersetzt werden; und auch (C, γ), (D, δ) und (A, α) oder (B, β) können als erzeugende Büschel genommen werden.

5. Dass *die vier Büschel* (A, β), (B, α), (C, δ), (D, γ) *zur Congruenz gehören*, erkennt man unmittelbar.

Ferner treffen ersichtlich vier Strahlen c_1, c_2, c_3, c_4 *von* (C, γ) *ihre entsprechenden Strahlen* a_1, a_2, b_3, b_4 *von* (A, α), *bezw.* (B, β). *Es seien* b_1, b_2, a_3, a_4 *die diesen homologen in* (B, β), (A, α). *Wir bezeichnen die Punkte und Ebenen:*

$$a_1c_1 \equiv A_1,\ a_2c_2 \equiv A_2,\ b_3c_3 \equiv B_3,\ b_4c_4 \equiv B_4;$$
$$a_1c_1 \equiv \alpha_1,\ a_2c_2 \equiv \alpha_2,\ b_3c_3 \equiv \beta_3,\ b_4c_4 \equiv \beta_4;$$

sodann:

$$A_1b_1 \equiv \beta'_1,\ A_2b_2 \equiv \beta'_2,\ B_3a_3 \equiv \alpha'_3,\ B_4a_4 \equiv \alpha'_4;$$
$$\alpha_1b_1 \equiv B'_1,\ \alpha_2b_2 \equiv B'_2,\ \beta_3a_3 \equiv A'_3,\ \beta_4a_4 \equiv A'_4;$$

so haben wir die acht weiteren zur Congruenz gehörigen Strahlenbüschel:

$$(A_1, \beta'_1),\quad (A_2, \beta'_2),\quad (B_3, \alpha'_3),\quad (B_4, \alpha'_4);$$
$$(B'_1, \alpha_1),\quad (B'_2, \alpha_2),\quad (A'_3, \beta_3),\quad (A'_4, \beta_4).$$

Es sei d_1 der den a_1, b_1, c_1 entsprechende Strahl in (D, δ) (dem c_1 in Bezug auf $\mathcal{A}$ conjugirt); er ist windschief gegen c_1. Alle Strahlen,

welche a_1, b_1, c_1 treffen und deshalb zur Congruenz gehören, müssen auch d_1 schneiden. Diese Strahlen bilden die Büschel (A_1, β'_1), (B'_1, α_1), welche $A_1 B'_1 \equiv \beta'_1 \alpha_1$ gemein haben; also muss d_1 entweder mit A_1 und α_1 oder mit B'_1 und β'_1 incident sein, und da c_1 jenes thut, so muss die zu ihr windschiefe d_1 dieses thun. Demnach trifft d_1 den Strahl b_1 und $B'_1 \equiv d_1 b_1$, $\beta'_1 \equiv d_1 b_1$. Ersetzt man also (C, γ) durch (D, δ), so vertauschen sich A_1, A_2, B_3, B_4, α_1, α_2, β_3, β_4 mit A'_3, A'_4, B'_1, B'_2, α'_3, α'_4, β'_1, β'_2.

6. Betrachten wir *die Ebene* $\tau \equiv A_1 B_3 A'_4$; da $A'_4 \equiv a_4 \beta_4$, so liegen die Spuren von a_4, b_4, c_4 in τ auf der Spur von β_4, und diese ist ein Congruenzstrahl in τ. Desgleichen sind es die Strahlen von $A_1 \equiv a_1 c_1$ nach der Spur von b_1, von $B_3 \equiv b_3 c_3$ nach der von a_3. Von dem Büschel des Complexes $\mathcal{A}$ in τ treffen also drei Strahlen ihre entsprechenden Strahlen in (C, γ); folglich thun es alle, und der ganze Büschel gehört zur Congruenz. Die Spuren von je drei homologen Strahlen von (A, α), (B, β), (C, γ) in τ sind also allineirt; folglich muss die Spur von b_2 auf der Spur von $\alpha_2 \equiv a_2 c_2$ liegen, d. h. $B'_2 \equiv \alpha_2 b_2$ *liegt auch in* τ, und der Scheitel des Büschels in τ ist der Schnittpunkt der Spuren von α_2, β_4. Der zweite und dritte der drei obigen Strahlen sind die Spuren von $\beta'_1 \equiv A_1 b_1$ und $\alpha'_3 \equiv B_3 a_3$. Der Scheitel ist also der Concurrenzpunkt der vier Ebenen β'_1, α_2, α'_3, β_4.

Die vier übrigen singulären Büschel befinden sich demnach in den Ebenen:

$$A_1 B_3 B'_2 A'_4, \quad A_1 B_4 B'_2 A'_3, \quad A_2 B_3 B'_1 A'_4, \quad A_2 B_4 B'_1 A'_3$$

und haben die Scheitel:

$$\alpha_2 \beta_4 \beta'_1 \alpha'_3, \quad \alpha_2 \beta_3 \beta'_1 \alpha'_4, \quad \alpha_1 \beta_4 \beta'_2 \alpha'_3, \quad \alpha_1 \beta_3 \beta'_2 \alpha'_4.$$

Wir nennen diese vier Ebenen und Punkte

$$\tau_{13} \equiv \tau'_{24}, \quad \tau_{14} \equiv \tau'_{23}, \quad \tau_{23} \equiv \tau'_{14}, \quad \tau_{24} \equiv \tau'_{13},$$

bez.

$$T_{24} \equiv T'_{13}, \quad T_{23} \equiv T'_{14}, \quad T_{14} \equiv T'_{23}, \quad T_{13} \equiv T'_{24};$$

der zweite Name entspricht der Vertauschung von (C, γ) mit (D, δ).

7. *Wir haben, indem wir den Büschelscheitel voranstellen,*

in $\alpha : B;\ A,\ A_1,\ A_2,\ A'_3,\ A'_4;$

in $\gamma : D;\ C,\ A_1,\ A_2,\ B_3,\ B_4;$

in $\alpha_1 \equiv a_1 c_1 : B'_1;\ C,\ A,\ A_1,\ T_{13},\ T_{14};$

in $\beta'_1 \equiv b_1 d_1 : A_1;\ D,\ B,\ B'_1,\ T_{23} (\equiv T'_{14}),\ T_{24} (\equiv T'_{13});$

in $\tau_{13} : T_{24};\ A_1,\ B_3,\ B'_2,\ A'_4;$

also ist in der letzten Ebene noch der sechste Punkt nachzuweisen. Es sei in ihr X der Schnittpunkt der Spuren von α_1, β_3; so liegt dieser Punkt mit den fünf bekannten Punkten in einem Kegelschnitte; denn nehmen wir z. B. das Sechseck $XA_1A'_4T_{24}B'_2B_3$, so sind die Gegenseiten XA_1 und $T_{24}B'_2$ die Spuren von α_1, α_2, welche Ebenen sich in AC schneiden, $A_1A'_4$, B'_2B_3 die Spuren von α, β, die sich in AB schneiden, und A'_4T_{24}, B_3X die Spuren von β_4, β_3, welche sich in BC schneiden; da aber AC, AB, BC in einer Ebene liegen, so ist das Sechseck ein *Pascal*sches. Ebenso beweist man, dass der Schnittpunkt Y der Spuren von α_1 und β'_2 in τ_{13} mit den fünf bekannten Punkten auf einem Kegelschnitt liegt. Beide Kegelschnitte sind identisch; folglich sind es auch X, Y als zweite Schnitte der Spur von α_1 mit diesem Kegelschnitte. In diesen Punkt laufen zusammen die drei Spurlinien von α_1, β_3, β'_2; *folglich ist der sechste Punkt in* τ_{13} *der Punkt* T_{13}.

8. *Zugleich ist dargethan, dass die sechs Punkte in einer Ebene wie* τ_{13} *in einem Kegelschnitte sich befinden.*

In derselben Weise kann man es von den sechs Punkten in den anderen Ebenen beweisen; die Gegenseiten des Sechsecks $BAA_1A_2A'_3A'_4$ in α z. B. schneiden sich auf der Spur von $CB_4B'_1$, die des Sechsecks $CAA_1B'_1T_{14}T_{13}$ in α_1 auf der Spur von A_2BT_{23}.

Die 15 Verbindungslinien der sechs singulären Punkte in einer singulären Ebene σ sind die Spuren der 15 übrigen singulären Ebenen; die vier weiteren Punkte in jeder derselben bilden vier Dreiecke; zieht man diese 4.15 Dreiecke von den 120 ab, welche von den 10 ausserhalb σ befindlichen singulären Punkten gebildet werden, so erhält man durch die übrigen 60 die Ebenen, welche die 60 *Pascal*schen Linien der sechs singulären Punkte von σ einschneiden. Jedes solches Dreieck liegt ausserhalb von vier singulären Ebenen. —

In α kann man auch leicht erkennen, dass der Wurf $B(A_1, A_2, A'_3, A'_4)$ mit $c_1c_2c_3c_4$ und also mit $a_1a_2a_3a_4$ oder $A(A_1, A_2, A'_3, A'_4)$ projectiv ist; denn A'_3 ist Schnittpunkt von a_3 mit $\beta_3 \equiv c_3B$; folglich trifft BA'_3 die c_3 und zwar, da B und a_3 und also auch BA'_3 in α, c_3 in γ liegt, auf $\alpha\gamma \equiv A_1A_2$; d. h. BA'_3 geht durch (A_1A_2, c_3), ebenso BA'_4 durch (A_1A_2, c_4).

In γ treffen die Strahlen DB_3, DB_4, weil sie b_3, b_4 treffen, auch a_3, a_4, also ist $D(A_1, A_2, B_3, B_4) \barwedge a_1a_2a_3a_4 \barwedge c_1c_2c_3c_4$ oder $C(A_1, A_2, B_3, B_4)$. —

Sechs solche unabhängige singuläre Punkte, durch welche die übrigen

bestimmt sind *), sind z. B.

$$A, \quad B, \quad C, \quad A_1, \quad B_3, \quad T_{24};$$

ich überlasse es dem Leser, zu finden, wie α, β, γ und die Projectivitäten dadurch festgelegt werden.

9. Mit keiner der beiden Ebenen α, β sind, ausser C, D, nur die Punkte T, mit keinem der beiden Punkte A, B, ausser γ, δ, nur die Ebenen τ incident. In den Büscheln (T_{13}, τ_{13}), (T_{24}, τ_{24}) haben wir zwei ebensolche Büschel wie (C, γ), (D, δ), bestehend aus Strahlen, die in Bezug auf $\varDelta$ conjugirt sind. ***Es seien wieder a, b, c drei homologe Strahlen von** (A, α), (B, β), (C, γ); **die Strahlen, welche a, b, c treffen, treffen auch alle einen und denselben Strahl von*** (T_{13}, τ_{13}). Zu dieser Regelschaar $[abc]$ **) gehört die Gerade durch T_{13}, welche a, b trifft; weil sie dies thut, befindet sie sich in $\varDelta$ und liegt in der T_{13} zugeordneten Ebene τ_{24}; also gehört sie, im singulären Büschel (T_{13}, τ_{24}) befindlich, zur Congruenz und trifft c. Dasselbe gilt für die in τ_{13} gelegene Gerade, welche a, b trifft; sie gehört zu (T_{24}, τ_{13}). Folglich incidirt vom Büschel (T_{13}, τ_{13}) der Scheitel mit einer und die Ebene mit einer anderen Geraden von $[abc]$; mithin muss ein Strahl zur Leitschaar gehören. Jeder der vier Büschel (T_{13}, τ_{13}), (T_{14}, τ_{14}), (T_{23}, τ_{23}), (T_{24}, τ_{24}) kann also mit (A, α), (B, β) zur Erzeugung verwandt werden.

Sind (X, η), (Y, ξ) zwei singuläre Büschel der Congruenz, bei denen Y mit η und also wegen $\varDelta$ oder N auch ξ mit X incidirt, so kann man (A, α), (B, β) ersetzen durch (X, ξ), (Y, η); durch $\varDelta$ werden sie projectiv bezogen; sind dann (Z, ω), (W, ζ) zwei weitere singuläre Büschel der Congruenz, die in derselben Beziehung wie (X, η), (Y, ξ) stehen und bei denen Z, W mit keiner der beiden Ebenen ξ, η und also ζ, ω mit keinem der beiden Punkte X, Y incidiren, so kann man (Z, ζ), (W, ω) als die zu (C, γ) und (D, δ) analogen Büschel nehmen. Ersetzen wir also z. B. (A, α), (B, β) durch (A_1, γ), (D, β_1'), so sind (C, γ), (D, δ) durch (A, α_2), (B_2', β); (A_3', τ_{24}), (T_{13}, β_3) oder (A_4', τ_{23}), (T_{14}, β_4) zu ersetzen. ***Demnach lässt sich dieselbe Congruenz*** $(2, 2)$ ***auf*** $\frac{1}{2}.16.5.6 = 240$ ***Weisen durch drei Büschel wie*** (A, α), (B, β), (C, γ) ***erzeugen,*** also auf eine endliche Zahl von Weisen, und ihre Constantenzahl ist deshalb gleich der Zahl der Constanten, die in der Erzeugung stecken. Solcher Büschelpaare wie (A, α), (B, β) mit einem ge-

---

*) *Weber,* dieses Journal Bd. 84, S. 349; *Reye,* ebenda Bd. 86, S. 209.

**) $[abc]$ ist die Regelschaar, welche a, b, c zu Leitgeraden hat, (abc) diejenige, zu welcher a, b, c gehören.

meinsamen Strahle giebt es ∞^8; dazu ∞^5 Büschel (C, γ); die Projectivität zwischen (A, α), (B, β) ist auf ∞^2, die zwischen (A, α), (C, γ) auf ∞^3 Weisen möglich; ***mithin ist die Constantenzahl der Congruenz*** $8+5+2+3=18$, in Uebereinstimmung mit den Angaben der Herren ***Kummer, Klein****), ***Reye*** über die Constantenzahl der Brennfläche.

10. ***Die Ordnung 4 der Brennfläche*** ergiebt sich aus unserer Erzeugung sehr einfach. Es seien g und g' conjugirt in Bezug auf $\mathcal{A}$, (X, ξ) irgend ein Büschel von $\mathcal{A}$, dessen Scheitel mit g und dessen Ebene also mit g' incidirt; er ist mit (A, α) und (C, γ) projectiv, und zwei entsprechende Strahlen von (A, α) und (X, ξ) schneiden sich und liegen je in einer Ebene des Ebenenbüschels, der aus X den (A, α) projicirt; der Schnitt desselben mit γ ist also ein zu (C, γ) projectiver Büschel. Ist R der durch sie in γ erzeugte Kegelschnitt, so sind seine Schnitte mit $\gamma\xi$ die Spuren der beiden von X ausgehenden Congruenzstrahlen. R geht durch C, die beiden Punkte A_1, A_2 (Nr. 5) und den Schnittpunkt G derjenigen Strahlen der beiden erzeugenden Büschel, die dem von g getroffenen Strahle von (A, α) entsprechen. So bilden die den verschiedenen Punkten X von g zugehörigen R einen Büschel, der zu dem Büschel der Spuren $\xi\gamma$ um $g'\gamma$ projectiv ist; die vier Tangenten, die von dem Punkte $g'\gamma$ an die erzeugte Curve dritter Ordnung kommen, gehören zu den Punkten, in denen g die Brennfläche durchschneidet.

Legt man g in eine der singulären Ebenen, so zerfällt die Curve dritter Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt, welcher $g'\gamma$ enthält, oder $g'\gamma$ wird Doppelpunkt der Curve; in beiden Fällen vereinigen sich von den vier Tangenten zweimal zwei. Geht aber g durch einen der singulären Punkte, so findet auch entweder ein Zerfallen in Gerade und Kegelschnitt statt, hier jedoch so, dass $g'\gamma$ auf die Gerade fällt, oder die Curve dritter Ordnung erhält einen von $g'\gamma$ verschiedenen Doppelpunkt: in beiden Fällen vereinigen sich nur einmal zwei von den vier Tangenten. Bemerkenswerth ist in einigen Fällen das Entstehen der Kegelschnitte R oder der Curve dritter Ordnung durch ausgeartete Projectivitäten.

11. ***Man hat,*** wie es scheint, ***die 16 singulären Strahlenbüschel der Congruenz*** (2, 2) ***noch nicht aus der Eigenschaft der Congruenz, Schnitt eines linearen Complexes*** $\mathcal{A}$ ***und eines tetraedralen*** T ***zu sein, abgeleitet.*** Es macht

---

*) Math. Annalen Bd. 2 S. 218.

sich dies sehr einfach. Das Haupttetraeder von T sei $(ABCD, \alpha\beta\gamma\delta)$; T' enthält nur solche Strahlenbüschel, die dem Bündel um eine Ecke oder dem Felde in einer Ebene des Tetraeders angehören oder ihren Scheitel in einer Ebene desselben haben und ihre Ebene durch deren Gegenecke senden. Sind also A', B', C', D' die Nullpunkte von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die Nullebenen von A, B, C, D im Nullsysteme von $\mathcal{A}$, so haben wir unmittelbar folgende acht Strahlenbüschel der Schnittcongruenz: (A, α'), (B, β'), (C, γ'), (D, δ'); (A', α), (B', β), (C', γ), (D', δ). Alle Büschel von $\mathcal{A}$, welche ihren Scheitel auf α haben, schicken ihre Ebene durch A', und alle, deren Ebenen durch A gehen, haben ihre Scheitel auf α'. Wir fassen also die Büschel von $\mathcal{A}$ ins Auge, deren Scheitel auf $\alpha\alpha'$ liegen und deren Ebenen in Folge dessen durch AA' gehen, und suchen unter ihnen die zu T' gehörigen auf. Die Ebenen der Büschel von T', deren Scheitel auf $\alpha\alpha'$ liegen, gehen alle durch A und umhüllen einen Kegel zweiten Grades, dessen Spur in irgend einer Ebene durch $\alpha\alpha'$ deren Complexkegelschnitt von T ist; an ihn kommen von AA' zwei Berührungsebenen. So ergeben sich die $2.4 = 8$ übrigen Büschel, welche wir (A_1, α_1), (A_2, α_2); (B_1, β_1), (B_2, β_2); ... nennen wollen. Man findet leicht, dass in

$$\begin{array}{llllll}
\alpha : A'; & B, & C, & D, & A_1, & A_2; \\
\alpha' : A; & B', & C', & D', & A_1, & A_2; \\
\alpha_1 : A_1; & A, & A', & B_1, & C_1, & D_1; \\
\alpha_2 : A_2; & A, & A', & B_2, & C_2, & D_2; \\
\beta_1 : B_1; & B, & B', & A_1, & C_2, & D_2; \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

liegen.

Jede Congruenz (2, 2) liegt nur in einem linearen, hingegen in 40 tetraedralen Complexen *); die Constantenzahl des linearen ist 5, die des tetraedralen 13; denn zu jedem der ∞^{12} Tetraeder gehören ∞^1; oder jede der ∞^{15} Collineationen liefert einen T', jeder T' ergiebt sich aber bei ∞^2 Collineationen **). Demnach ist die Constantenzahl von (2, 2) gleich $5+13$.

12. Die Zahl 16 der Strahlenbüschel einer Congruenz (2, 2) ergiebt sich auch sehr einfach aus Herrn *Schuberts* Formel über die Anzahl x der gemeinsamen Strahlenbüschel eines drei- und eines zweistufigen Systems

---

*) *Caporali*, a. a. O.; *Schur* a. a. O.

**) *Reye*, Geom. der Lage, Abth. II, S. 141 der 2. Aufl.

von Strahlenbüscheln *):

$$x = e^3.p'' + \widehat{pe}.p'e' + p^3.e''.$$

Jenes ist das der Strahlenbüschel eines linearen Complexes mit den Charakteristiken:

$$p^3 = e^3 = 1, \quad \widehat{pe} = 0;$$

dieses dasjenige eines allgemeinen quadratischen Complexes, welches die Charakteristiken hat:

$$p'' = e'' = p'e' = 8 \text{ *}).$$

Da ein kubischer Complex nur ein einstufiges Strahlenbüschel-System hat, so ***hat die Congruenz (3, 3), in der sich ein linearer und ein kubischer Complex durchschneiden, keinen Strahlenbüschel.***

II.

Ein Specialfall der Congruenz (2, 2).

13. Am Schlusse des § 7 seiner grossen Abhandlung aus 1866 erwähnt Herr *Kummer* zwei Specialfälle der Congruenz (2, 2); wir wollen uns ***mit dem zweiten, dessen Brennfläche eine Regelfläche vierten Grades mit zwei doppelten Leitgeraden ist*** und der deshalb die Constantenzahl 16, wie diese Fläche, hat, beschäftigen **). Wir erhalten ihn durch zwei Bedingungen, die wir den erzeugenden Büscheln auferlegen. Wir nehmen an, dass ***B in die Ebene γ und zugleich C in die Ebene β falle.*** B ist also der Concurrenzpunkt von α, β, γ; C liegt auf $\beta\gamma$. Auf $\alpha\gamma$ befinden sich, wie im allgemeinen Falle, A_1, A_2; in $BC \equiv \beta\gamma$ sind b_3, c_4 vereinigt; so dass $B_3 \equiv C$, $B_4 \equiv B$. Die Verbindungslinien der Spuren homologer Strahlen von (A, α), (B, β) in γ fallen im Allgemeinen in $\alpha\gamma$ zusammen; da b_3 aber in γ liegt, so ist jeder Strahl in γ um $a_3\gamma$ Verbindungslinie der Spuren von a_3, b_3; also ist $D \equiv a_3\gamma$; ebenso ist $\delta \equiv a_3C(\equiv ACD)$; ferner $\alpha_1 \equiv CAA_1$, $\alpha_2 \equiv CAA_2$, $\beta_3 \equiv \gamma$, $\beta_4 \equiv \beta$;

$$\begin{array}{llll} B'_1 \equiv (b_1,\ AC), & B'_2 \equiv (b_2,\ AC), & A'_3 \equiv D, & A'_4 \equiv A; \\ \beta'_1 \equiv (\alpha\gamma,\ B'_1), & \beta'_2 \equiv (\alpha\gamma,\ B'_2), & \alpha'_3 \equiv \delta, & \alpha'_4 \equiv \alpha; \\ \tau_{13} \equiv \alpha_1, & \tau_{14} \equiv \beta'_2, & \tau_{23} \equiv \alpha_2, & \tau_{24} \equiv \beta'_1; \\ T_{24} \equiv B'_1, & T_{23} \equiv A_2, & T_{14} \equiv B'_2, & T_{13} \equiv A_1. \end{array}$$

*) Kalkül der abzählenden Geometrie S. 300, F. 41 und S. 272, Nr. 2, 3.

**) Er findet auch in Herrn *Schurs* Abhandlung, § 7, No. 3 kurze Erwähnung.

Mithin haben wir auf $\alpha\gamma$ die vier binären singulären Punkte:

$$B \equiv B_4,\quad D \equiv A'_3,\quad A_1 \equiv T_{13},\quad A_2 \equiv T_{23};$$

desgleichen auf AC:

$$A \equiv A'_4,\quad C \equiv B_3,\quad B'_1 \equiv T_{24},\quad B'_2 \equiv T_{14}.$$

Die zugehörigen Ebenen sind:

$$\alpha \equiv \alpha'_4 \equiv (\alpha\gamma, A),\ \gamma \equiv \beta_3 \equiv (\alpha\gamma, C),\ \beta'_1 \equiv \tau_{24} \equiv (\alpha\gamma, B'_1),\ \beta'_2 \equiv \tau_{14} \equiv (\alpha\gamma, B'_2);$$
$$\alpha \equiv \beta_4 \equiv ACB,\quad \delta \equiv \alpha'_3 \equiv ACD,\quad \alpha_1 \equiv \tau_{13} \equiv ACA_1,\quad \alpha_2 \equiv \tau_{23} \equiv ACA_2.$$

Jeder dieser acht Büschel repräsentirt, entsprechend der Bemerkung des Herrn *Kummer,* zwei Büschel des allgemeinen Falles.

Die den vier auf einer Geraden gelegenen singulären Punkten zugehörigen Ebenen gehen alle durch diese Gerade und bezüglich durch die vier singulären Punkte auf der andern Geraden. Von den sechs Punkten eines Kegelschnitts des allgemeinen Falls fallen vier in eine Gerade, die beiden andern haben sich vereinigt *).

14. Aber eine andere interessante in sich duale Erzeugung dieser speciellen Congruenz (2, 2) ist folgende:

Es seien zwei Gerade a, b gegeben und eine Regelschaar R_0 (auf einer Fläche zweiten Grades F_0); ist g eine Gerade von R_0, so entsteht unsere Congruenz Γ durch den Inbegriff aller Regelschaaren (abg) (vergl. Anm. **) auf S. 169). Sie befindet sich in dem durch a, b, R_0 bestimmten linearen Complexe Λ. Ihr Bündelgrad ist 2, da die von einem beliebigen Punkte ausgehende, a, b treffende Gerade zwei Geraden von R_0 begegnet **).

Die Gerade a treffe die beiden Geraden g_1, g_2 von R_0; die Punkte ag_1, ag_2 seien A_1, A_2, die gleichnamigen Ebenen α_5, α_6; ebenso treffe b die beiden Geraden g_7, g_8 von R_0, wodurch sich die Punkte $bg_7 \equiv B_7$, $bg_8 \equiv B_8$ und die Ebenen $bg_7 \equiv \beta_3$, $bg_8 \equiv \beta_4$ ergeben. Sodann seien:

$$A_3 \equiv a\beta_3,\quad A_4 \equiv a\beta_4,\quad B_5 \equiv b\alpha_5,\quad B_6 \equiv b\alpha_6;$$
$$\alpha_7 \equiv aB_7,\quad \alpha_8 \equiv aB_8,\quad \beta_1 \equiv bA_1,\quad \beta_2 \equiv bA_2.$$

Die drei Geraden a, b, g_1 bestimmen ein Ebenen-Punkte-Paar, bestehend

---

*) Herr *W. Stahl,* mit dem ich über diese Congruenz correspondirte, leitet sie als Schnittcongruenz eines Λ und eines T ab, indem er zwei Gegenkanten des Tetraeders von T zu Λ gehören lässt; dies führte mich zu Obigem.

**) Lässt man b zu R_0 gehören, oder ersetzt man R_0 durch einen Strahlenbüschel, so ergiebt sich eine lineare Congruenz; vergl. für den ersten dieser beiden Fälle Annali di Matematica, ser. II, t. VII, S. 226.

aus den Ebenen α_5, β_1 und den Punkten A_1, B_5, und die Regelschaar (abg_1) zerfällt in die Büschel (A_1, α_5), (B_5, β_1). *So erhalten wir die acht Büschel der Congruenz:*

$$(A_1, \alpha_5), \quad (A_2, \alpha_6), \quad (B_7, \beta_3), \quad (B_8, \beta_4);$$
$$(B_5, \beta_1), \quad (B_6, \beta_2), \quad (A_3, \alpha_7), \quad (A_4, \alpha_8).$$

Bei zwei unter einander stehenden ist jeder der beiden Scheitel mit der Ebene des andern Büschels incident.

Jede der acht Ebenen trägt mit dem Punkte der andern Geraden, durch den sie geht, gleichen Index. Die Ebenen α_5, α_6, α_7, α_8 sind den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 in Bezug auf Λ zugeordnet oder die Nullebenen dieser Punkte im zugehörigen Nullsysteme N; also ist:

$$A_1A_2A_3A_4 \;\overline{\wedge}\; \alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8 \;\overline{\wedge}\; B_5B_6B_7B_8 \;\overline{\wedge}\; \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4.$$

Wir erhalten so nebenbei folgenden Satz:

Wenn von zwei Geraden a, b eine Fläche zweiten Grades in A_1, A_2; B_7, B_8 geschnitten wird und die von diesen Geraden kommenden Tangentialebenen α_5, α_6; β_3, β_4 je der andern Geraden in B_5, B_6; A_3, A_4 begegnen, so bilden die vier Punkte auf a und die auf b zwei projective Würfe.

15. Damit von einem Punkte zwei vereinigte Strahlen zu Γ kommen, muss die von ihm nach a, b gehende Gerade F_0 berühren. *Die Brennfläche der Congruenz Γ ist also die Regelfläche vierten Grades F^4 der Tangenten von F_0, welche a, b treffen;* denn die Trägerfläche der Regelschaar $[abm]$, wo m eine beliebige Gerade ist, durchschneidet F_0 in einer Raumcurve vierter Ordnung, welche vier Gerade von $[abm]$ tangirt. Die beiden Geraden a, b sind doppelte Leitgeraden der F^4; die beiden Erzeugenden aus einem Punkte von a sind die Tangenten aus ihm an den Kegelschnitt, den die Ebene nach b aus F_0 schneidet. Ist der Punkt einer der beiden Punkte A_1, A_2, so vereinigen sich die beiden Tangenten in die Tangente c_1, bez. c_2 in ihm an den Kegelschnitt durch $A_1B_7B_8$, $A_2B_7B_8$ auf F_0. Ist er aber einer der beiden Punkte A_3, A_4, so schneidet die Ebene nach b, d. i. β_3, bez. β_4 ein Geradenpaar aus, bestehend aus g_7, l_8; g_8, l_7, wo l_7, l_8 die durch B_7, B_8 gehenden Geraden der andern Schaar von F_0 sind; die beiden Tangenten vereinigen sich in die Gerade c_3, c_4 nach dem Doppelpunkte g_7l_8, bez. g_8l_7; c_3, c_4 sind mithin die Kanten, längs deren der Tangentialkegel aus A_3, bez. A_4 von β_3 bez. β_4 berührt wird.

Es sind also A_1, A_2, A_3, A_4 die vier Cuspidalpunkte der F^4 auf a

und c_1, c_2, c_3, c_4 die Cuspidalgeneratricen. Nennen wir $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$ die Punkte, in denen sie b treffen. Während eine beliebige Ebene, die durch eine Cuspidalerzeugende geht, stets im Cuspidalpunkte berührt, berührt diejenige, welche die Erzeugende mit der andern Doppelgeraden verbindet, die Fläche längs der Cuspidalgeneratrix und hat also den Charakter der Berührungsebene eines Torsus *): eine solche Torsalebene steht dual dem Cuspidalpunkte gegenüber; die den c_1, c_2, c_3, c_4 zugehörigen Torsalebenen sind β_1, β_2, β_3, β_4, und insofern die Cuspidalgeneratricen ihnen zugehören, können sie auch Torsallinien **) genannt werden. Die beiden ersten c_1, c_2 tangiren F_0 in A_1, A_2, die beiden andern aber in einem vom Cuspidalpunkte verschiedenen Punkte, nämlich $g_7 l_8$, $g_8 l_7$, und die gemeinsame Berührungsebene von F_0 und F^4 ist die Torsalebene β_3, β_4.

In ähnlicher Weise erhalten wir die vier Cuspidalpunkte auf b: B_5, B_6, B_7, B_8 mit den Cuspidalgeneratricen d_5, d_6, d_7, d_8, welche a in $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{A}_7$, $\mathfrak{A}_8$ treffen; die Torsalebenen sind α_5, α_6, α_7, α_8. Die Generatricen d_7, d_8 tangiren F_0 in B_7, B_8, die beiden andern im Punkte $g_1 l_2$, bez. $g_2 l_1$, und die gemeinsame Berührungsebene von F_0 und F^4 in den letzteren ist die Torsalebene α_5, bez. α_6.

Die beiden Punktwürfe der Cuspidalpunkte auf a, b sind demnach projectiv: $A_1 A_2 A_3 A_4 \overline{\wedge} B_5 B_6 B_7 B_8$, und dasselbe gilt für die beiden Würfe der Torsalebenen. Wir werden dies Resultat, das bei jeder Regelfläche vierten Grades mit zwei doppelten Leitgeraden richtig ist, bald mit einem bekannten Satze für die ebene Curve dritter Ordnung in Zusammenhang bringen.

16. Betrachten wir den Tangentialkegel an F_0 aus B_5; seine vier Tangentialebenen $B_5(g_1, g_2, g_7, g_8)$ schneiden in zwei beliebige Tangenten des Kegels zwei projective Würfe; als diese Tangenten nehmen wir eine beliebige Gerade l der F_0 aus der andern Schaar und die Gerade a, welche in der ersten jener Tangentialebenen $B_5 g_1 \equiv \alpha_5$ liegt; da dieselbe den Kegel längs $d_5 \equiv B_5 \mathfrak{A}_5$ tangirt und $B_5 g_7 \equiv b g_7 \equiv \beta_3$, $B_5 g_8 \equiv b g_8 \equiv \beta_4$ in A_3, A_4 die Gerade a schneiden, so ist:

$$l(g_1, g_2, g_7, g_8) \overline{\wedge} \mathfrak{A}_5 A_2 A_3 A_4,$$

und vermittelst der Tangentialkegel aus B_6, A_3, A_4 ergiebt sich:

$$\mathfrak{A}_5 A_2 A_3 A_4 \overline{\wedge} A_1 \mathfrak{A}_6 A_3 A_4 \overline{\wedge} B_5 B_6 \mathfrak{B}_3 B \overline{\wedge} B_5 B_6 B_7 \mathfrak{B}_4;$$

denn alle sind $\overline{\wedge}\, l(g_1, g_2, g_7, g_8)$.

---

*) Vergl. Math. Ann. Bd. 4, S. 259, Nr. 13.

**) Math. Ann. Bd. 6, S. 255.

Aus $\mathfrak{A}_5 A_2 A_3 A_4 \overline{\wedge} A_1 \mathfrak{A}_6 A_3 A_4$ folgt, dass $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $\mathfrak{A}_5 \mathfrak{A}_6$ in Involution sind, und ebenso sind es $B_5 B_6$, $B_7 B_8$, $\mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4$.

Ferner aus:

$$(\mathfrak{A}_5 A_2 A_3 A_4) = (B_5 B_6 \mathfrak{B}_3 B_8),$$
$$(A_1 \mathfrak{A}_6 A_3 A_4) = (B_5 B_6 B_7 \mathfrak{B}_4)$$

erhält man durch Multiplication:

$$(A_1 A_2 A_3 A_4).(\mathfrak{A}_5 \mathfrak{A}_6 A_3 A_4) = (B_5 B_6 B_7 B_8).(B_5 B_6 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4);$$

folglich, da $(A_1 A_2 A_3 A_4) = (B_5 B_6 B_7 B_8)$:

$$(\mathfrak{A}_5 \mathfrak{A}_6 A_3 A_4) = (B_5 B_6 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4);$$

d. h. *die vier Cuspidalgeneratricen c_3, c_4, d_5, d_6 gehören derselben Regelschaar an.* —

Ersetzt man die Regelschaar R_0 durch die andere Schaar auf F_0, so erhält man eine zweite Congruenz (2, 2) — *welche Γ^* heisse — offenbar mit derselben Brenn-Regelfläche.*

Wir nannten schon l_1, l_2, l_7, l_8 die durch A_1, A_2, B_7, B_8 gehenden Geraden dieser Schaar; $\alpha_5 \equiv a g_1$ enthält l_2, $\alpha_6 \equiv a g_2$ aber l_1, also vertauschen sich α_5 und α_6, β_3 und β_4 und in Folge dessen auch B_5 und B_6, A_3 und A_4, und die acht Strahlenbüschel dieser Congruenz sind:

$$(A_1, \alpha_6), \quad (A_2, \alpha_5), \quad (B_7, \beta_4), \quad (B_8, \beta_3);$$
$$(B_6, \beta_1), \quad (B_5, \beta_2), \quad (A_4, \alpha_7), \quad (A_3, \alpha_8).$$

17. Die jetzige specielle Congruenz (2, 2) involvirt, wie schon Herr *Kummer* bemerkt, 16 Constanten; denn die Brennfläche ist durch so viele Constanten bestimmt, nämlich ausser durch die beiden Leitgeraden, welche 2.4 Constanten involviren, noch durch acht Punkte oder, was dasselbe, durch acht Erzeugende bestimmt; da durch acht Paare entsprechender Punkte die Correspondenz [2, 2], welche durch die Erzeugenden auf a, b entsteht, festgelegt wird. Die Geraden a, b aber und die Trägerfläche F_0 von R_0 involviren 2.4+9 Constanten. Daraus ist zu schliessen, dass F_0 durch einfach unendlich viele andere Flächen zweiten Grades ersetzt werden kann.

Die Flächen zweiten Grades, welche die Cuspidalgeneratricen c_1, c_2, d_7, d_8 in den zugehörigen Cuspidalpunkten tangiren, bilden nicht bloss einen Büschel, sondern ein Netz. Zunächst thun es alle Flächen des Büschels durch das Vierseit $A_1 B_7 A_2 B_8$; aber auch F_0 thut es, die nicht zu diesem Büschel ge-

hört; folglich thun es alle Flächen des Netzes, das durch F_0 und jenen Büschel constituirt wird.

Es sei t irgend eine Erzeugende der Regelfläche F^4; so giebt es im Netze ∞^1 Flächen F, welche sie berühren.

Die irgend einer derselben zugehörige zu F^4 analoge Fläche hat ebenfalls a, b zu doppelten Leitgeraden und c_1; c_2, d_7, d_8 zu Torsallinien, längs deren sie von β_1, β_2, α_7, α_8 tangirt wird; ausserdem hat sie mit F^4 noch t gemein und demnach einen Schnitt 17. Ordnung; sie ist daher mit F^4 identisch.

Sämmtliche Flächen F des einstufigen Systems Σ führen zu der nämlichen F^4 und berühren deshalb alle Erzeugenden derselben und zwar, was die Cuspidalerzeugenden anlangt, die c_1, c_2, d_7, d_8 in den zugehörigen Cuspidalpunkten, die c_3, c_4, d_5, d_6 aber in veränderlichen Berührungspunkten, so jedoch, dass β_3, β_4, α_5, α_6 ständige Tangentialebenen der F sind. *Das System Σ der F berührt also auch dieselben vier Ebenen auf denselben vier in ihnen bez. befindlichen Geraden und ist daher,* wie zu erwarten war, *in sich dual.* Da es aus einem Netze durch die Bedingung der Taction mit t ausgesondert ist, so *gehen durch jeden Punkt und berühren jede Ebene zwei Flächen von Σ;* $\mu = \varrho = 2$.

Die den g_1, g_2, g_7, g_8 analogen Geraden der verschiedenen Flächen F durchlaufen die Büschel (A_1, α_5), (A_2, α_6), (B_7, β_3), (B_8, β_4), deren Scheitel die gemeinsamen Punkte, deren Ebenen die gemeinsamen Berührungsebenen des Systems sind. Durch diese vier Büschel sind aber die vier andern Büschel bestimmt; also hat die zu einer beliebigen Fläche F von Σ gehörige Congruenz (2, 2) mit der zu F_0 gehörigen Γ die acht Strahlenbüschel gemein.

18. *Wir haben noch eine weitere Congruenz Γ'', erzeugt durch die zu R_0 analogen Regelschaaren der verschiedenen Flächen F:* diejenige ist je die analoge, welche eine Gerade in die vier obigen Büschel sendet; hieraus ergiebt sich schon, dass diese vier Büschel (A_1, α_5), (A_2, α_6), (B_7, β_3), (B_8, β_4) zu Γ'' gehören.

Aus $\mu = \varrho = 2$ folgt, dass ihre beiden Grade gleich 2 sind. Ist die Identität von Γ'' und Γ nachgewiesen, so sind auch alle zu den übrigen Flächen von Σ gehörigen Congruenzen, die sich ja zu Γ'' gleichartig verhalten, mit ihnen identisch.

In dem Systeme Σ befinden sich zwei Ebenen-Punkte-Paare: $(\beta_1, \beta_2;$

B_5, B_6), (α_7, α_8; A_3, A_4); denn — um es für das erstere zu beweisen — A_1, A_2, c_1, c_2 liegen in β_1, β_2, so dass diese Tangenten in jenen sind; die Punkte B_7, B_8 liegen auf der Doppellinie $\beta_1\beta_2 \equiv B_5B_6$, und für einen Punkt der Doppellinie ist jede durch ihn gehende Gerade als Tangente der degenerirten Fläche anzusehen, also berühren d_7, d_8 in B_7, B_8. Die Ebenen α_5, α_6 gehen durch die Punkte B_5, B_6 und sind also Berührungsebenen der degenerirten Fläche, d_5, d_6 gehen in ihnen durch diese Berührungspunkte; β_3, β_4 hingegen gehen durch die Doppellinie, und für eine Ebene durch die Doppellinie ist jede in ihr befindliche Gerade als Tangente anzusehen mit dem Berührungspunkte auf der Doppellinie; c_3, c_4 liegen in β_3, β_4. Endlich trifft t (und so jede Erzeugende von F^4) die Doppellinie b und wird dadurch Tangente der ausgearteten Fläche *). Somit erfüllt (β_1, β_2; B_5, B_6) alle einer Fläche von Σ auferlegten Bedingungen, und ebenso (α_7, α_8; A_3, A_4). Bei jeder dieser beiden ausgearteten Flächen zerfällt die Γ' erzeugende Regelschaar in zwei Büschel. Beide Regelschaaren werden bei der ersteren gebildet durch die vier Büschel (B_5, β_1), (B_6, β_2); (B_5, β_2), (B_6, β_1), von denen die beiden ersten in die vier Büschel (A_1, α_5), (A_2, α_6), (B_7, β_3), (B_8, β_4) einen Strahl liefern: B_5A_1, B_6A_2, b, b; also gehören sie und ebenso die Büschel (A_3, α_7), (A_4, α_8) der andern Fläche zu Γ', und diese hat daher mit Γ die sämmtlichen singulären Büschel gemein.

Als singuläre Büschel von Γ befinden sie sich in dem linearen Complexe Λ, in dem Γ enthalten ist (Nr. 14); folglich hat Γ'' mit Λ eine Linienfläche achten Grades gemein, liegt also ebenfalls in Λ, da sonst nur eine Linienfläche vom vierten Grade gemeinsam sein könnte. Die Strahlen von Γ'', welche eine Gerade m treffen, erzeugen eine Regelfläche vierten Grades $\mathfrak{F}^4$, für welche m und die ihr nach Λ conjugirte m' doppelte Leitgeraden sind. Fällt m nach a, so zerspaltet sich diese Fläche in die vier Büschel, zu denen a gehört: (A_1, α_5), (A_2, α_6), (A_3, α_7), (A_4, α_8). Mit einem andern Punkte von a oder einer andern Ebene durch a ist kein zweiter Strahl von Γ'' incident. ***Die beiden Geraden a, b sind deshalb Doppelstrahlen von Γ''.*** Wenn ferner m diese beiden Geraden trifft, so hat die $\mathfrak{F}^4$ die doppelten Leitgeraden m, m' und die beiden doppelten Erzeugenden a, b, zerfällt also in zwei Regelschaaren, welche m, m' zu Leitgeraden und a, b gemeinsam haben. Sind mithin g', g'' die beiden von m (und m') getroffenen

*) Hinsichtlich der Eigenschaften des Ebenen-Punkte-Paars vergl. man *Schubert*, dieses Journal Bd. 71, S. 366 und Kalkül der abzählenden Geometrie § 16, 22.

Geraden von R_0, so gehören sie zu Γ', da F_0 unter den F sich befindet. Die beiden Regelschaaren sind demnach (abg'), (abg''). Folglich gehören die Regelschaaren, durch welche Γ erzeugt wird, auch zu Γ''; d. h. Γ und Γ' sind identisch.

Damit ist erkannt, *dass erstens die Congruenz Γ sich nicht ändert, wenn F_0 durch irgend eine andere Fläche F des Systems Σ ersetzt wird, und zweitens, dass Γ auch durch die zu R_0 analogen Regelschaaren der verschiedenen Flächen dieses Systems hervorgebracht wird.*

Demnach haben wir zwei Systeme von Regelschaaren, welche Γ durchziehen; jede des einen hat mit jeder des andern eine Gerade gemein. Die Doppelstrahlen a, b von Γ sind gemeinsame Strahlen aller Regelschaaren des einen Systems, hingegen Doppelstrahlen der beiden in Büschelpaare ausgearteten Regelschaaren des andern.

Die zweiten Regelschaaren der Flächen F von Σ führen zu der oben (Nr. 16) besprochenen zweiten Congruenz Γ^*.

19. *Es giebt aber noch ein zweites Flächensystem, durch welches dieselben beiden Congruenzen Γ, Γ^* hervorgerufen werden. Die Berührung nämlich mit den vier andern Cuspidalgeneratricen c_3, c_4, d_5, d_6 in deren Cuspidalpunkten bewirkt ebenfalls nicht bloss einen Büschel von Flächen zweiten Grades, sondern ein Netz;* denn wiederum wird dieselbe von allen Flächen durch das Vierseit $A_3B_5A_4B_6$ erfüllt, aber auch durch die Fläche, auf der nach Nr. 16 die vier Generatricen liegen und welche nicht zu jenem Büschel gehört.

Sei F_1 irgend eine Fläche des Systems Σ_1, das aus diesem Netze durch die Bedingung der Berührung mit einer beliebigen Erzeugenden t von F^4 ausgeschieden wird. Die Fläche der Tangenten derselben, welche a, b treffen, hat c_3, c_4, d_5, d_6 zu Cuspidalgeneratricen mit β_3, β_4, α_5, α_6 als zugehörigen Torsalebenen und t als einfache Erzeugende, folglich ist sie mit unserer Fläche F^4 identisch. F_1 berührt demnach alle Erzeugenden von F^4, also auch die F^4 selbst. Auf den vier andern Cuspidalerzeugenden c_1, c_2, d_7, d_8 erfolgt die Berührung in einem vom Cuspidalpunkte verschiedenen Punkte, und gemeinsame Berührungsebene von F_1 und F^4 ist dann je die Torsalebene β_1, β_2, α_7, α_8; so dass diese Ebenen die von b, a an F_1 gelegten Tangentialebenen sind; die einen von A_3, A_4 ausgehenden Geraden von F_1 werden also in α_7 liegen und auf d_7 sich treffen, die andern in α_8 liegen und auf d_8 sich treffen; ähnliches gilt für die durch B_5, B_6 gehenden Geraden. Die eine Regelschaar von F_1 erzeugt demnach mit a, b eine Congruenz

(2, 2), welche die singulären Strahlenbüschel

$$(A_3, \alpha_7), \quad (A_4, \alpha_8), \quad (B_5, \beta_1), \quad (B_6, \beta_2);$$
$$(B_7, \beta_3), \quad (B_8, \beta_4), \quad (A_1, \alpha_5), \quad (A_2, \alpha_6)$$

enthält, dieselben wie Γ; die andere eine Congruenz, welche die singulären Büschel mit Γ^* gemein hat. Brennfläche für beide ist F^4.

20. Um aber die Identität dieser Congruenzen mit Γ, Γ^* einzusehen, wollen wir die Betrachtung etwas verallgemeinern. Wir nehmen *eine beliebige Regelfläche vierten Grades F^4 mit zwei doppelten Leitgeraden a, b* gegeben an. *Die Congruenz ihrer Doppeltangenten ist* (8, 8); wir wollen zunächst nachweisen, dass *sie in vier Congruenzen* (2, 2) *nothwendig zerfallen muss.* Es genügt darzuthun, dass die Regelfläche 16. Grades der Doppeltangenten, welche eine beliebige Gerade m treffen, sich in vier Flächen vierten Grades zerspaltet. Eine beliebige ebene Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten ist stets Projection einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art: man darf ja nur irgend einen projicirenden Kegel mit einer durch die beiden Doppelkanten gehenden Fläche zweiten Grades durchschneiden. Die Tangentialebenen aus dem Projectionscentrum O an die vier durch die Raumcurve gehenden Kegel zweiten Grades geben die acht Doppeltangenten; also vier Paare. Zerfällt die Curve vierter Ordnung in eine der dritten Ordnung und eine Gerade, so geht die Raumcurve durch O; von den acht Tangentialebenen vereinigen sich die beiden denselben Kegel berührenden, also von den acht Doppeltangenten vereinigen sich je zwei eines Paars, nicht solche aus verschiedenen Paaren. Betrachten wir demnach die Curven, in denen F^4 von den Ebenen des Büschels m geschnitten wird; so haben wir in jeder Ebene vier Paare Doppeltangenten, und zwischen den Paaren besteht kein Zusammenhang: in den vier Tangentialebenen des Büschels vereinigen sich die beiden zu einem Paare zusammengehörigen Doppeltangenten. Fügen wir noch die duale Betrachtung hinzu, so ist das Zerfallen der Regelfläche in vier getrennte Regelflächen vierten Grades und der Congruenz (8, 8) in vier getrennte Congruenzen (2, 2) nachgewiesen: die vier Doppeltangenten, die ihren einen Berührungspunkt in einem bestimmten Punkte von F^4 haben, vertheilen sich auf die vier Congruenzen.

21. *Die 4.8 Strahlenbüschel* derselben ergeben sich leicht. Jede der beiden Leitgeraden hat bekanntlich vier Cuspidalpunkte *); und wie jede

*) *Cremona,* Sulle superficie gobbe di quarto grado Nr. 12 (Memorie dell' Istituto di Bologna, ser. II, t. VIII).

durch die Cuspidalgeneratrix gehende Ebene Tangentialebene im Cuspidalpunkte ist, so ist auch jede durch einen Cuspidalpunkt gehende Gerade Tangente in ihm. Jede Gerade nun, die von einem Cuspidalpunkt der einen Doppelgeraden nach der Cuspidalgeneratrix eines solchen der andern geht, berührt deshalb doppelt, denn sie fällt in die längs dieser Generatrix berührende Torsalebene. *Wir haben also jeden der acht Cuspidalpunkte mit den vier Torsalebenen zu combiniren, welche mit der nämlichen Doppelgeraden incidiren.*

22. Auf den beiden Leitgeraden a, b entsteht durch die Erzeugenden von F^4, wie schon bemerkt, eine Correspondenz [2, 2]; denken wir uns die beiden Geraden a, b, mit Beibehaltung dieser Beziehung, so in eine Ebene gelegt, dass im Schnittpunkt entsprechende Punkte zusammenfallen; dann umhüllen die Verbindungslinien der übrigen entsprechenden Punkte eine Curve dritter Klasse, welche auch die beiden Träger berührt, und deren 2.4 weitere Schnitte mit dieser Curve sind die verlegten Cuspidalpunkte *). Die Correspondenz [2, 2] ist durch acht Paare entsprechender Punkte bestimmt; die Punkte des einen Paars vereinigen wir; die Verbindungslinien der sieben andern Paare bestimmen mit a, b zusammen die Curve dritter Klasse, und deren Tangenten geben dann die weiteren Paare entsprechender Punkte. Sind bloss sieben Paare entsprechender Punkte gegeben, so erhalten wir eine Curvenschaar, und es ist also durch diese sieben Paare ein achtes associirtes Paar inducirt.

Eine Regelfläche vierten Grades mit zwei doppelten Leitgeraden ist durch diese und acht beliebige Erzeugende (oder acht Punkte oder acht Berührungsebenen) *eindeutig bestimmt.*

Alle Regelflächen vierten Grades mit denselben beiden doppelten Leitgeraden und sieben gemeinsamen Erzeugenden haben auch eine und dieselbe achte (associirte) Erzeugende gemein **).

---

*) Vergl. *Cremona* am eben a. O. Anm.

**) In diesem Büschel von Regelflächen vierten Grades giebt es zwölf mit einer doppelten Erzeugenden; denn in einem Curvenbüschel dritter Ordnung giebt es zwölf mit einem Doppelpunkte, und durch eine quadratische Transformation überträgt sich dies Resultat auf einen Curvenbüschel vierter Ordnung mit zwei gemeinsamen Doppelpunkten und sieben und in Folge dessen acht gemeinsamen einfachen Punkten. Die zwölf doppelten Erzeugenden führen zu dem Satze: *Alle Ebenen, welche sieben Gerade einer linearen Congruenz in Punkten eines Kegelschnitts treffen, der dann auch von der achten associirten Geraden getroffen wird, bilden zwölf Ebenenbüschel, deren Axen ebenfalls der Congruenz angehören,* und zu dem dualen Satze.

Sieben beliebigen Geraden einer linearen Congruenz ist stets eine achte Gerade derselben associirt.

23. Ist eine Cuspidalgeneratrix gegeben, so ist dies mit zwei Bedingungen äquivalent; wir wollen nun beispielsweise die achte associirte Generatrix zu drei Cuspidalgeneratricen, von denen zwei ihren Cuspidalpunkt auf a haben und die dritte auf b, etwa, indem wir die frühere Bezeichnung benützen, zu $A_1\mathfrak{B}_1$, $A_2\mathfrak{B}_2$, $B_5\mathfrak{A}_5$, und zu einer beliebigen Geraden t, welche die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ auf a, b verbindet, ermitteln. Verlegen wir so, dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sich vereinigen, so berühren alle Curven der Schaar die Geraden $A_1\mathfrak{B}_1$, $A_2\mathfrak{B}_2$, $B_5\mathfrak{A}_5$ in A_1, A_2, B_5 und die Träger a, b (wobei wir die verlegten Punkte ebenso bezeichnen wie die ursprünglichen); folglich gehört zur Schaar auch die aus den drei Büscheln A_1, A_2, B_5 bestehende Curve; $a \equiv A_1A_2$ ist Doppeltangente für dieselbe und zählt mithin unter den neun gemeinsamen Tangenten zweifach; d. h. sie wird von allen Curven der Schaar in demselben Punkte $\mathfrak{A}'$ tangirt, und da dieser Berührungspunkt der zweite entsprechende zu $\mathfrak{B}$ ist, der mit seinem einen entsprechenden $\mathfrak{A}$ vereinigt liegt, so folgt daraus, wenn wir wieder zurück verlegen, dass die zweite von $\mathfrak{B}$ ausgehende Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ die gesuchte associirte ist. Ist also insbesondere $t \equiv \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ selbst Cuspidalgeneratrix mit $\mathfrak{B}$ als Cuspidalpunkt, so vereinigt sich $\mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ mit ihr.

24. Aus dem oben erwähnten Umstande, dass durch die *Cremona*sche Verlegung die Cuspidalpunkte in die weiteren Schnitte der Curve dritter Klasse mit den beiden Geraden a, b fallen, ergiebt sich vermöge des bekannten Satzes über die Curve dritter Ordnung oder Klasse das interessante Resultat *), auf das wir oben (Nr. 15) schon hinwiesen:

Die acht Cuspidalpunkte jeder Regelfläche vierten Grades mit zwei doppelten Leitgeraden bilden jederzeit zwei projective Würfe.

Wir haben also:

$$\begin{aligned}(A_1A_2A_3A_4) &= (B_5B_6B_7B_8)\\ &= (B_6B_5B_8B_7)\\ &= (B_7B_8B_5B_6)\\ &= (B_8B_7B_6B_5).\end{aligned}$$

Dieses vierfache Arrangement hängt, wie wir sehen werden, mit den vier Congruenzen zusammen.

---

*) Man sehe die Schluss-Bemerkung.

25. Gruppiren wir nun irgend zwei Cuspidalpunkte der einen Leitgeraden mit einem der andern, also etwa, wie eben, A_1, A_2, B_5; so sei nun F eine Fläche zweiten Grades, welche die Cuspidalgeneratricen c_1, c_2, d_5 in diesen ihren Cuspidalpunkten tangirt; ferner, wenn $t (\equiv \mathfrak{A}\mathfrak{B})$ und t' zwei beliebige Erzeugende von F^4 sind und t' zweifellos verschieden ist von der achten associirten $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$, t und t' berührt. Es sind solcher Flächen einfach unendlich viele, und die Berührungspunkte mit t und t' durchlaufen diese Geraden. Die Regelfläche der Tangenten von F, welche a, b schneiden, ist mit der gegebenen F^4 identisch, weil sie mit ihr die Cuspidalgeneratricen c_1, c_2, d_5 und die beiden Erzeugenden t, t' gemein hat, welche nicht associirt sind. Der zweite Punkt, in dem F die Gerade b schneidet, muss ebenfalls ein Cuspidalpunkt sein und seine Generatrix die Fläche tangiren. In der Projectivität der Cuspidalpunkte müssen B_5 und dieser Cuspidalpunkt homolog sein zu den beiden andern Cuspidalpunkten A_3, A_4 auf a; $(A_1 A_2 A_3 A_4) = (B_7 B_8 B_5 B_6)$ zeigt uns also, dass B_6 dieser Cuspidalpunkt sein muss, und *so wird durch die obige Projectivität jedem derartigen Tripel wie A_1, A_2, B_5 ein vierter Cuspidalpunkt zugeordnet, und wir erhalten 12 solche Quadrupel:*

1) A_1, A_2; B_5, B_6;	2) A_3, A_4; B_7, B_8;
3) A_1, A_2; B_7, B_8;	4) A_3, A_4; B_5, B_6;
5) A_1, A_3; B_5, B_7;	6) A_2, A_4; B_6, B_8;
7) A_1, A_3; B_6, B_8;	8) A_2, A_4; B_5, B_7;
9) A_1, A_4; B_5, B_8;	10) A_2, A_3; B_6, B_7;
11) A_1, A_4; B_6, B_7;	12) A_2, A_3; B_5, B_8.

26. *Jedes dieser Quadrupel führt zu einem einstufigen Systeme von Flächen zweiten Grades, welche in den vier Cuspidalpunkten die zugehörigen Generatricen und auf den vier andern Cuspidalgeneratricen die sie enthaltenden Torsalebenen von F^4, sowie alle Erzeugenden dieser Fläche berühren. Jedes derselben führt zu zwei von den vier Congruenzen, deren Brennfläche F^4 ist, und zwar liefern je die beiden neben einander stehenden dieselben Congruenzen; die erste und zweite Zeile zusammen alle vier, ebenso die dritte und vierte, die fünfte und sechste.* Bezeichnen wir nun die singulären Strahlenbüschel mit (A_i, B_k), bez. (B_l, A_m), wobei der Scheitel nach A_i fällt und die Ebene a mit B_k verbindet, bez. der Scheitel in B_l liegt, die Ebene von b nach A_m geht; so zeigt die Untersuchung der einzelnen 12 Systeme, dass *die 32 Büschel sich in folgender Weise auf die vier Congruenzen vertheilen*:

$$\text{(I.)} \begin{cases} (A_1, B_5), & (A_2, B_6), & (A_3, B_7), & (A_4, B_8); \\ (B_5, A_1), & (B_6, A_2), & (B_7, A_3), & (B_8, A_4). \end{cases}$$

$$\text{(II.)} \begin{cases} (A_1, B_6), & (A_2, B_5), & (A_3, B_8), & (A_4, B_7); \\ (B_6, A_1), & (B_5, A_2), & (B_8, A_3), & (B_7, A_4). \end{cases}$$

$$\text{(III.)} \begin{cases} (A_1, B_7), & (A_2, B_8), & (A_3, B_5), & (A_4, B_6); \\ (B_7, A_1), & (B_8, A_2), & (B_5, A_3), & (B_6, A_4). \end{cases}$$

$$\text{(IV.)} \begin{cases} (A_1, B_8), & (A_2, B_7), & (A_3, B_6), & (A_4, B_5); \\ (B_8, A_1), & (B_7, A_2), & (B_6, A_3), & (B_5, A_4); \end{cases}$$

entsprechend den vier Projectivitäten von Nr. 24.

Die sechs Zeilen von Nr. 25 führen bez. zu den Congruenzen (III.), (IV.); (I.), (II.); (II.), (IV.); (I.), (III.); (II.), (III.); (I.), (IV.).

Denn z. B. bei dem Flächensysteme, das bei 5) sich ergiebt, berühren alle Flächen die Cuspidalgeneratricen c_1, c_3, d_5, d_7 in deren Cuspidalpunkten A_1, A_3, B_5, B_7 und auf den vier andern Cuspidalgeneratricen c_2, c_4, d_6, d_8 die Torsalebenen β_2, β_4, α_6, α_8, so dass letztere die von b, a kommenden Tangentialebenen sind. Seien also bei einer Fläche des Systems g_1, g_3, g_5, g_7 die durch A_1, A_3, B_5, B_7 gehenden Geraden der einen Schaar, l_1, l_3, l_5, l_7 die der andern; so liegen g_1, l_2 in der einen durch a gehenden Tangentialebene, es sei in α_6, und treffen sich auf d_6; g_2, l_1 liegen dann in α_8 und treffen sich auf d_8; und die Projectivität: $(A_1 A_3 A_2 A_4) = (B_6 B_8 B_5 B_7)$ fordert weiter, dass sich g_5, l_7 auf c_2 und g_7, l_5 auf c_4 treffen. Daraus ergiebt sich, dass die g-Schaar zur Congruenz (II.), die l-Schaar zur Congruenz (IV.) führt. —

Da zu jeder der vier Congruenzen (2, 2) sechs der Flächensysteme führen, so sehen wir, das Resultat von Nr. 18 ergänzend, dass *jede Congruenz* (2, 2) *der vorliegenden speciellen Art von sechs Paaren Regelschaar-Systemen durchzogen ist.*

27. Die Bestimmung der Flächensysteme in der Weise von Nr. 25 ist nothwendig; man darf sie nicht etwa durch die Taction mit vier Cuspidalgeneratricen wie c_1, c_3, d_5, d_7 in deren Cuspidalpunkten bestimmen; denn so lange man noch nicht weiss, dass diese vier Doppelbedingungen ein Netz bewirken, wird man nur auf die Flächen des Büschels durch das Vierseit $A_1 B_5 A_3 B_7$ als die sie erfüllenden schliessen können; erst durch eine Combination irgend einer Fläche des in der obigen Weise erhaltenen Systems mit diesem Büschel ergiebt sich, dass den vier Berührungen durch ein Netz genügt wird.

Irgend vier Cuspidalgeneratricen, von denen zwei ihren Cuspidalpunkt auf der einen, zwei auf der andern Leitgeraden haben, repräsentiren acht associirte Generatricen der F^4 (Nr. 22), so dass aus der Gemeinsamkeit dieser Generatricen für zwei Regelflächen vierten Grades mit denselben Leitgeraden nicht auf deren Identität geschlossen werden kann.

Für vier Cuspidalerzeugende aber, die einer der zwölf Gruppirungen von Nr. 25 entsprechen, gilt, dass die Berührung mit ihnen in den zugehörigen Cuspidalpunkten ein Netz von Flächen zweiten Grades bewirkt. Also haben wir für *die Regelfläche vierten Grades mit zwei doppelten Leitgeraden* folgenden Satz:

Ist die Projectivität zwischen den acht Cuspidalpunkten einer solchen Fläche durch $(A_1 A_2 A_3 A_4) = (B_5 B_6 B_7 B_8)$ *gegeben, so sind je vier Cuspidalpunkte in den Zusammenstellungen 1) bis 12) von Nr. 25 mit ihren unendlich nahen Punkten auf den zugehörigen Generatricen die Grundpunkte eines Flächennetzes zweiter Ordnung,* — und den dualen Satz für die Torsalebenen.

28. Das Flächensystem, das der Gruppirung 3) entspricht, hat uns in Nr. 16 gezeigt, dass die vier Cuspidalgeneratricen c_3, c_4, d_5, d_6 einer Regelschaar angehören, ferner, dass $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $\mathfrak{A}_5 \mathfrak{A}_6$ in Involution sind; die Gruppirung 4) ergiebt ebenso, dass c_1, c_2, d_7, d_8 einer Regelschaar angehören, und dass $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $\mathfrak{A}_7 \mathfrak{A}_8$ in Involution sind und demnach alle vier Paare $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $\mathfrak{A}_5 \mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{A}_7 \mathfrak{A}_8$.

Also haben wir hinsichtlich *der acht Cuspidalpunkte einer Regelfläche vierten Grades mit zwei doppelten Leitgeraden, der zugehörigen Generatricen und der Punkte, in denen sie die andere Leitgerade treffen,* folgendes Resultat:

Jede vier Cuspidalgeneratricen der Fläche, zugehörig zu vier solchen Cuspidalpunkten, wie sie in 1) bis 12) von Nr. 25 zusammengestellt sind, gehören zu der nämlichen Regelschaar.

Die vier Cuspidalpunkte einer Leitgeraden, z. B. A_1, A_2, A_3, A_4 *auf* a *und die vier Punkte* $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{A}_7$, $\mathfrak{A}_8$, *in denen* a *von den vier andern Cuspidalgeneratricen getroffen wird, bilden auf drei Weisen vier Paare in Involution:*

$$A_1,\ A_2;\quad A_3,\ A_4;\quad \mathfrak{A}_5,\ \mathfrak{A}_6;\quad \mathfrak{A}_7,\ \mathfrak{A}_8;$$
$$A_1,\ A_3;\quad A_2,\ A_4;\quad \mathfrak{A}_5,\ \mathfrak{A}_7;\quad \mathfrak{A}_6,\ \mathfrak{A}_8;$$
$$A_1,\ A_4;\quad A_2,\ A_3;\quad \mathfrak{A}_5,\ \mathfrak{A}_8;\quad \mathfrak{A}_6,\ \mathfrak{A}_7\ ^{*}).$$

*) Folglich gehört $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{A}_7$, $\mathfrak{A}_8$ zu dem linearen Systeme von Quadrupeln, das durch A_1, A_2, A_3, A_4 und seine *Hesse*sche Covariante constituirt wird; vergl. dieses Journal, Bd. 86, S. 140.

Man kann diese Sätze auch als Sätze für die Verzweigungs- und Doppelelemente einer Correspondenz [2, 2] aussprechen, oder als Sätze für die ebene Curve dritter Ordnung (oder Klasse), im letzteren Falle nämlich:

Es seien $a_1, a_2, a_3, a_4; b_5, b_6, b_7, b_8$ die Tangentenwürfe aus zwei Punkten der Curve dritter Ordnung, und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_4; \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6, \mathfrak{a}_7, \mathfrak{a}_8$ die Strahlen aus B, bez. A je nach den Berührungspunkten des andern Tangentenwurfs. Die nach *Salmons* Satz bestehende Projectivität zwischen den beiden Würfen sei: $(a_1 a_2 a_3 a_4) = (b_5 b_6 b_7 b_8)$. Dann hat man auch: $(a_1 a_2 \mathfrak{a}_5 \mathfrak{a}_6) = (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 b_5 b_6)$ und elf andere Projectivitäten, entsprechend den obigen Gruppirungen in Nr. 25; sowie in jedem der beiden achtstrahligen Büschel um A und B drei Involutionen: $a_1, a_2; a_3, a_4; \mathfrak{a}_5, \mathfrak{a}_6; \mathfrak{a}_7, \mathfrak{a}_8$ etc.

Aus dem ersten Satze ergiebt sich, dass A, B je mit den Berührungspunkten von a_1, a_2, b_5, b_6 auf einem Kegelschnitte liegen, etc.

29. *Jedes Paar Congruenzen wird durch zwei Flächensysteme geliefert;* z. B. (I.), (II.) durch 3) und 4). Jede zwei Flächen, die zu demselben dieser Systeme gehören, schneiden sich in einer allgemeinen Raumcurve vierter Ordnung; hingegen *jede zwei Flächen aus zwei verschiedenen dieser beiden Systeme durchdringen sich in einem windschiefen Vierseite.* Denn die Fläche des Systems 3) berührt die Regelfläche F^4 längs einer Raumcurve vierter Ordnung (ihrer Schnittcurve mit der consecutiven im Systeme), welche c_1, c_2, d_7, d_8 in A_1, A_2, B_7, B_8 tangirt, und ebenso thut es die Fläche von 4) längs einer Curve, die c_3, c_4, d_5, d_6 in A_3, A_4, B_5, B_6 tangirt. Beide Berührungscurven begegnen sich in vier Punkten; denn da die beiden Flächen a, b in verschiedenen Punkten schneiden, so ist jeder der Begegnungspunkte der einen Berührungscurve mit der andern Fläche Berührungspunkt zwischen Curve und Fläche, aber auch zwischen beiden Flächen und der Regelfläche. In Folge dieser vier Berührungen degenerirt die Schnittcurve in ein Vierseit*).

Zwei Flächen aus zwei andern Systemen, z. B. aus 1) und 6) begegnen sich in zwei Kegelschnitten; denn die beiden Berührungscurven tangiren c_2, d_6 in A_2, B_6 und begegnen sich noch zweimal; in A_2, B_6 hat F^4 je unendlich viele Tangentialebenen und kann also auf Berührung der beiden Flächen nicht geschlossen werden.

---

*) Auf diesen Satz machte mich Herr *W. Stahl* aufmerksam, der ihn aus seinen Untersuchungen über die allgemeine Congruenz (2, 2) abgeleitet hat (vergl. dieses Journal Bd. 92); auch auf die zwölf Flächensysteme wies er mich hin, doch hatte ich sie kurz, ehe ich seinen Brief erhielt, selbstständig gefunden.

30. Seien nun $t_1, t_2, \ldots t_8$ acht unabhängige Erzeugende der Fläche F^4, so führt jede Fläche zweiten Grades, welche sie berührt, durch ihre a, b treffenden Tangenten ebenfalls zu der Fläche F^4, da diese durch a, b und acht unabhängige Erzeugende bestimmt ist. Folglich muss die Fläche zu einem unserer zwölf Systeme gehören. Die acht Erzeugenden können wir als acht beliebige Geraden der linearen Congruenz $[a, b]$ auffassen. Mithin ergiebt sich die merkwürdige Ausartung:

Während die Flächen zweiten Grades, welche acht beliebig im Raume gegebene Geraden tangiren, ein System bilden, in welchem es 92 Flächen giebt, die durch einen Punkt gehen oder eine Gerade oder eine Ebene berühren, und das 92 Kegel, 92 Kegelschnitte, aber kein Ebenen-Punkte-Paar enthält *), *spaltet in dem Falle, wo die acht Geraden derselben linearen Congruenz angehören, dieses System sich in zwölf getrennte Systeme: in jedem gehen zwei Flächen durch einen Punkt oder berühren eine Ebene* (Nr. 17); *es enthält zwei Ebenen-Punkte-Paare* (Nr. 18), *aber keine Kegel oder Kegelschnitte.* Letzteres ergiebt sich schon daraus, dass die vier gemeinsamen Punkte jedes der zwölf Flächensysteme nicht in einer Ebene liegen und die vier gemeinsamen Tangentialebenen nicht durch einen Punkt gehen. — Man kann es aber auch, unabhängig von einer genaueren Kenntniss der zwölf Flächensysteme, folgendermassen einsehen. Die Fläche der Ebenen, welche sechs Gerade in Punkten eines Kegelschnitts treffen, findet Herr *Lüroth* von der Klasse 8 **); sie behält, wenn die Geraden alle a, b treffen, diese Klasse, wird aber Regelfläche mit a, b als Axen von Büscheln vierfacher Tangentialebenen. In der That, es sei K ein Kegelschnitt, der die sechs Geraden $t_1, \ldots, t_6$ trifft, so sind diese Erzeugende der Regelfläche $\mathfrak{R}^4$ vierten Grades mit a, b, K als Leitlinien; auf dieser ist die Verbindungslinie der beiden Spuren von a, b in der Ebene von K eine Doppelerzeugende, und jede Ebene durch sie schneidet aus $\mathfrak{R}^4$ einen die $t_1, \ldots, t_6$ treffenden Kegelschnitt aus. Die Ebenen durch $t_1, \ldots, t_6$ sind Doppeltangentialebenen der Fläche achter Klasse. Ist t_7 eine siebente Gerade der Congruenz $[a, b]$, so haben die zu $t_1, \ldots, t_6$; $t_1, \ldots, t_5, t_7$ gehörigen Flächen achter Klasse, ausser den Büscheln um a, b, $t_1, t_2, \ldots, t_5$, noch zwölf Büschel um gemein-

*) Vergl. *Schubert,* Kalkül der abzählenden Geometrie S. 105 und Lit. Nachw. Nr. 33, S. 339.

**) Dieses Journal Bd. 68, S. 185; vergl. auch Herrn *Schuberts* Kalkül S. 105: $\varphi\nu^4\mu^2 = 4.8$.

same Erzeugende gemein. Die Ebenen der Kegelschnitte, welche sieben Gerade einer linearen Congruenz und in Folge dessen auch deren associirte achte treffen, bilden zwölf Büschel um Gerade der Congruenz (vergl. die Anm. zu Nr. 22). Keine dieser zwölf Geraden ist, wenn nun t_8 eine beliebige achte Gerade der linearen Congruenz ist, Erzeugende der zu t_1, t_2, ... t_5, t_8 gehörigen Fläche achter Klasse.

III.

Die Congruenzen (3, 3), insbesondere die windschiefe.

31. ***Drei projective Strahlenbüschel in beliebiger Lage seien gegeben:*** (A, α), (B, β), (C, γ); ***die Congruenz der Strahlen, welche je drei homologe Strahlen derselben treffen, sendet durch jeden Punkt und in jede Ebene drei Strahlen.*** Denn bei drei projectiven geraden Punktreihen der nämlichen Ebene kommt es dreimal vor, dass entsprechende Punkte allineirt sind. Die Congruenz ist der Schnitt zweier tetraedralen Complexe, ausser einem Bündel und einem Felde. ***Sie ist aber nicht die allgemeine windschiefe Congruenz*** (3, 3); denn die Erzeugung involvirt $3.5+2.3=21$ Constanten, die allgemeine windschiefe Congruenz hingegen, wie wir sehen werden, 24. Der Kegel aus A, der Kegelschnitt in α an den durch (B, β), (C, γ) erzeugten tetraedralen Complex gehört der Congruenz ganz an: ***wir haben so drei singuläre Punkte mit Kegeln zweiten Grades, drei singuläre Ebenen mit Kegelschnitten.*** Zwei Strahlen von (A, α) treffen ihre entsprechenden in (B, β): dies führt zu vier Strahlenbüscheln der Congruenz, und ***man erhält so im Ganzen 12 Strahlenbüschel.*** Ich erfahre durch Herrn ***Hirst,*** dass diese Congruenz schon von Herrn *Roccella* betrachtet worden ist; weshalb ich mich mit ihr nicht weiter beschäftigen will.

32. ***Zwei Strahlenbüschel*** (A, α), (B, β) ***und eine Regelschaar R auf F, welche mit*** (A, α) ***einen Strahl gemeinsam hat, seien so projectiv bezogen, dass dieser Strahl sich selbst entspricht.*** (A, α) und R sowohl, wie (A, α) und (B, β) erzeugen einen quadratischen Complex; der Schnitt beider, ausser dem Bündel A und dem Felde α, ist ***eine Congruenz (3, 3), das Erzeugniss aller Strahlen, welche drei homologe Strahlen von*** (A, α), (B, β), R ***treffen.*** Der Kegel zweiten Grades aus B, der Kegelschnitt in β an den durch (A, α), R erzeugten Complex gehören ganz zur Congruenz. Der Büschel (A, ξ), welcher die Punkte des Kegelschnitts $F\xi$ projicirt, ist projectiv zu (B, β), und zwei seiner Strahlen treffen die entsprechenden Strahlen von

(B, β); dies führt zu einem der Congruenz angehörigen Kegel zweiten Grades aus A, und ebenso enthält α einen Kegelschnitt. Zwei Strahlen von (A, α) schneiden ihre entsprechenden in (B, β) und liefern vier Strahlenbüschel der Congruenz. Ist eine Punktreihe zweiter Ordnung mit einem Strahlenbüschel ihrer Ebene projectiv, so sind dreimal zwei entsprechende Elemente incident*); drei Strahlen von (B, β) treffen also ihre entsprechenden Strahlen von R und führen zu sechs Strahlenbüscheln der Congruenz. Endlich trifft auch noch ein Strahl von (A, α) seine (von ihm verschiedene) entsprechende Gerade von R; wodurch sich noch zwei Strahlenbüschel ergeben. *Die Congruenz hat demnach 14 singuläre Punkte, von denen zwei Kegel zweiten Grades, zwölf Strahlenbüschel aussenden, 14 singuläre Ebenen, zwei mit Kegelschnitten, zwölf mit Strahlenbüscheln.* Sie ist identisch mit derjenigen, welche Herr *Hirst* **) vermittelst einer *Cremona*schen Transformation erzeugt hat.

Die Erzeugung involvirt 22 *Constanten,* nämlich R neun, der Büschel (A, α) wegen des gemeinsamen Strahls nur drei (der Scheitel kann ∞^2, die Ebene dann ∞^1 Lagen einnehmen), der Büschel (B, β) hingegen fünf, die Projectivität zwischen (A, α), (B, β) drei, die zwischen (A, α), R aber nur zwei Constanten, also hat die Congruenz höchstens 22 Constanten; höchstens, weil noch nicht festgestellt ist, ob dieselbe Congruenz auf die beschriebene Art in einer endlichen oder unendlichen Zahl von Weisen hergestellt werden kann.

33. *Es seien nun drei projective Regelschaaren R_1, R_2, R_3 auf den Flächen zweiten Grades F_1, F_2, F_3 gegeben; beide Grade der Congruenz der Strahlen, welche drei homologe Geraden derselben treffen, sind 6.* Denn bei drei projectiven Punktreihen auf Kegelschnitten derselben Ebene sind sechsmal drei homologe Punkte allineirt; durch die projective Beziehung der Kegelschnitte nämlich erhält man drei collineare Felder; in jedem bilden die Punkte, die mit ihren beiden entsprechenden allineirt sind, eine Curve dritter Ordnung, die dem Kegelschnitte des Feldes sechsmal begegnet.

Jeder sich selbst entsprechende Strahl in einer der drei Projectivitäten erniedrigt beide Grade um 1, da sich eine lineare Congruenz absondert. *Es entsteht also eine Congruenz (3, 3), wenn drei sich selbst entsprechende Strahlen vorkommen. Nehmen wir an, dass jede der drei Projectivitäten einen*

*) *v. Staudt,* Beitr. zur Geom. der Lage, Nr. 9.

**) Proceed. Lond. Math. Soc. Bd. 16, S. 232.

enthält. Dieselben seien a_{23}, b_{31}, c_{12}, und a_1, b_2, c_3 die entsprechenden Strahlen in der jeweiligen dritten Regelschaar.

Sind zwei Regelschaaren projectiv ohne sich selbst entsprechenden Strahl, so hat man vier Paare sich schneidender entsprechender Strahlen: denn in jeder von ihnen entsteht eine Correspondenz [2, 2], in der einer Geraden diejenigen beiden Geraden entsprechen, welche von der jener entsprechenden Geraden in der andern Schaar geschnitten werden. Ist aber ein sich selbst entsprechender Strahl vorhanden, z. B. c_{12} bei der Projectivität zwischen R_1, R_2, so entstehen auf der kubischen Raumcurve, welche F_1, F_2 gemeinsam ist, zwei projective Involutionen; bei solchen vereinigen sich bekanntlich viermal Punkte, die zu entsprechenden Paaren gehören; darunter sind die beiden Begegnungspunkte von c_{12} mit der Raumcurve. Die beiden andern rühren von zwei Paaren sich schneidender entsprechender Geraden her *). Jedes solche Paar z. B. d_1, d_2 führt zu zwei der Congruenz angehörigen Strahlenbüscheln, von denen der eine in $d_1 d_2$ seinen Scheitel hat und seine Ebene durch d_3 sendet, der andere in der Ebene $d_1 d_2$ liegt mit dem Scheitel auf d_3. *Es ergeben sich demnach* $3.2.2 = 12$ *Strahlenbüschel in der Congruenz,* so viele als Herr *Kummer* für die allgemeine windschiefe Congruenz (3, 3) in den Berliner Monatsberichten von 1878 ermittelt hat.

34. *Die Erzeugung involvirt 24 Constanten.* Dass eine Fläche zweiten Grades mit einer gegebenen andern eine nicht gegebene Gerade gemein hat, ist für sie eine doppelte Bedingung; danach sind F_1, F_2, F_3 successive 0, 2, 4 Bedingungen unterworfen, involviren also 9, 7, 5 willkürliche Constanten. Die Projectivität zwischen R_1, R_2 involvirt, wegen des sich selbst entsprechenden nun schon gegebenen Strahls c_{12}, zwei Constanten; in ihr entspreche der Geraden a_{23}, welche R_2, R_3 gemein ist, insofern sie zu R_2 gehört, a_1 in R_1; folglich enthält die Projectivität zwischen R_1, R_3, weil sie durch das Entsprechen von b_{13}, b_{13}; a_1, a_{13} beschränkt ist, nur eine Constante; a_1, a_{23} müssen sich nämlich in ihr entsprechen, damit in der aus beiden Projectivitäten folgenden dritten zwischen R_2, R_3 die Gerade a_{23} sich selbst entspricht. So haben wir $9+7+5+2+1 = 24$ Constanten.

35. *Auf ebenso viele lassen sich die ursprünglichen 36 Constanten der Kummerschen Gleichungen reduciren.*

---

*) Man kann auch, entsprechende Geraden paarend, Herrn *Schuberts* Strahlenpaar-Formel (4.), S. 58 im Kalkül anwenden: $\sigma + \varepsilon = \beta$. Im allgemeinen Falle ist $\beta = 4$, $\varepsilon = 0$, also $\sigma = 4$; im speciellen $\varepsilon = 1$, $\beta = 3$, mithin $\sigma = 2$.

Es seien $x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau$ die Coordinaten zweier Punkte einer Geraden (bei Herrn *Kummer* ist der zweite der unendlich ferne, also $\tau = 0$); dann sind

$$u = y\zeta - z\eta, \quad v = z\xi - x\zeta, \quad w = x\eta - y\xi,$$
$$u' = \xi t - x\tau, \quad v' = \eta t - y\tau, \quad w' = \zeta t - z\tau$$

die Coordinaten der Geraden. Wir setzen mit Herrn *Kummer*:

$$\begin{aligned}
K &\equiv a\,u + a_1 v + a_2 w + \alpha\,u' + \alpha_1 v' + \alpha_2 w',\\
L &\equiv b\,u + b_1 v + b_2 w + \beta\,u' + \beta_1 v' + \beta_2 w',\\
M &\equiv c\,u + c_1 v + c_2 w + \gamma\,u' + \gamma_1 v' + \gamma_2 w',\\
K' &\equiv a' u + a'_1 v + a'_2 w + \alpha' u' + \alpha'_1 v' + \alpha'_2 w',\\
L' &\equiv b' u + b'_1 v + b'_2 w + \beta' u' + \beta'_1 v' + \beta'_2 w',\\
M' &\equiv c' u + c'_1 v + c'_2 w + \gamma' u' + \gamma'_1 v' + \gamma'_2 w';
\end{aligned}$$

wir haben dann die beiden quadratischen Complexe:

$$LM' - L'M = 0, \quad MK' - M'K = 0,$$

welche, ausser in der linearen Congruenz $M = 0$, $M' = 0$, sich in einer allgemeinen windschiefen Congruenz (3, 3) durchschneiden; um letztere zu isoliren, fügen wir noch den Complex hinzu

$$LK' - KL' = 0,$$

welcher die lineare Congruenz nicht enthält.

Zur Constantenreduction dividiren wir durch die Coefficienten von w', setzen $K \equiv \alpha_2 K_1$, $L \equiv \beta_2 L_1$, etc. und haben, indem zugleich:

$$\sigma = \frac{\gamma'_2 \alpha_2}{\gamma_2 \alpha'_2}, \quad \tau = \frac{\beta_2 \gamma'_2}{\beta'_2 \gamma_2}$$

eingeführt wird, die drei Gleichungen:

$$\tau L_1 M'_1 - L'_1 M_1 = 0, \quad M_1 K'_1 - \sigma M'_1 K_1 = 0, \quad \sigma L_1 K'_1 - \tau K_1 L'_1 = 0$$

oder in bequemerer Form:

$$\sigma \frac{K_1}{K'_1} = \tau \frac{L_1}{L'_1} = \frac{M_1}{M'_1}$$

mit 32 Constanten, je fünf in $K_1, \ldots, \sigma, \tau$.

Wir können diese Gleichungen ersetzen durch:

$$\frac{\sigma K_1 - \pi K'_1}{\sigma K_1 - \varrho K'_1} = \frac{\tau L_1 - \pi L'_1}{\tau L_1 - \varrho L'_1} = \frac{M_1 - \pi M'_1}{M_1 - \varrho M'_1}$$

mit beliebigen Werthen für π, ϱ. Bestimmen wir dieselben aber so, dass

in $M_1-\pi M_1'$, $M_1-\varrho M_1'$ noch ein Coefficient verschwindet, und nennen dann die sechs so bestimmten Grössen $\sigma K_1-\pi K_1'$, $\sigma K_1-\varrho K_1'$, $\tau L_1-\pi L_1'$, etc. wieder K, K', L, ..., so haben wir:

$$\frac{K}{K'}=\frac{L}{L'}=\frac{M}{M'}$$

mit 30 Constanten. θ sei der gemeinsame Werth der drei Brüche; dann haben wir die drei linearen Complexe:

$$(1.)\qquad K-\theta K'=0,\quad L-\theta L'=0,\quad M-\theta M'=0,$$

welche eine Regelschaar gemein haben; diese erzeugt die Congruenz (3, 3), wenn θ alle Werthe durchläuft. Sind nun λ, μ, λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 wieder sechs willkürliche Parameter, so kann man die drei Gleichungen (1.) durch folgende drei mit ihnen äquivalente ersetzen:

$$(2.)\qquad \begin{cases} K-\theta K'+\lambda\,(L-\theta L')+\mu\,(M-\theta M') = 0, \\ K-\theta K'+\lambda_1(L-\theta L')+\mu_1(M-\theta M') = 0, \\ K-\theta K'+\lambda_2(L-\theta L')+\mu_2(M-\theta M') = 0; \end{cases}$$

denn sei g eine Gerade, welche diesen drei Gleichungen (2.) genügt, so folgt aus ihnen, wenn wir $K-\theta K'$, $L-\theta L'$, $M-\theta M'$ als Unbekannte auffassen, dass diese den Werth 0 haben müssen, da die Determinante der Coefficienten bei der Beliebigkeit von λ, μ, ... nicht verschwindet; d. h. g genügt auch den Gleichungen (1.); oder (1.) und (2.) stellen dieselbe Regelschaar dar. Wegen der Veränderlichkeit von λ, μ, ... ergiebt sich, dass *die Congruenz auf sechsfach unendlich viele Weisen durch drei projective Büschel von Complexen:*

$$\begin{aligned} K+\lambda\,L+\mu\,M-\theta(K'+\lambda\,L'+\mu\,M') &= 0, \\ K+\lambda_1L+\mu_1M-\theta(K'+\lambda_1L'+\mu_1M') &= 0, \\ K+\lambda_2L+\mu_2M-\theta(K'+\lambda_2L'+\mu_2M') &= 0 \end{aligned}$$

erzeugt werden kann, wobei immer das nämliche System von Regelschaaren sich ergiebt.

Wir können die $\lambda, \ldots \mu_2$ so bestimmen, dass in jedem der linearen Ausdrücke $K+\lambda L+\mu M$, ... ein Coefficient verschwindet, und haben damit die Constantenzahl der allgemeinen windschiefen Congruenz (3, 3) auf $30-6=24$ reducirt.

Oder: eine lineare Congruenz, als die Basis eines Büschels von linearen Complexen, umfasst 2.4 Constanten, und demnach die Erzeugung

durch drei projective Büschel von Complexen $3.8+2.3=30$ Constanten, die Congruenz (3, 3) also nur 24 wegen der sechsfach unendlichen Erzeugung.

Freilich ist im Vorhergehenden noch nicht festgestellt, dass die durch drei projective Regelschaaren mit drei sich selbst entsprechenden Strahlen erzeugte Congruenz (3, 3) nur auf eine endliche Zahl von Weisen so erzeugt werden kann; erst dann ist dargethan, dass sie die Constantenzahl 24 hat und also die allgemeine Congruenz ist.

Ich begnüge mich hier, auf eine Erzeugung aufmerksam gemacht zu haben, welche mir einfacher scheint, als die aus den analytischen Gleichungen sich ergebende durch drei projective Complexbüschel, und durch welche wahrscheinlich die allgemeine windschiefe Congruenz (3, 3) entsteht, da ja keine andern singulären Curven und Kegel bei ihr sich ergeben, als die 12 Strahlenbüschel, welche Herr *Kummer* bei der allgemeinen Congruenz gefunden hat.

Was die Incidenzen zwischen den 12 Punkten und 12 Ebenen anlangt, so finde ich nur, dass durch jeden Punkt, ausser der Ebene seines Büschels, bloss noch eine Ebene geht; bilden z. B. d_1, d_2 das eine der beiden Paare sich schneidender entsprechender Strahlen von R_1, R_2, und ist d_3 der entsprechende Strahl in R_3, so seien Punkt $d_1 d_2 \equiv D_{12}$, Ebene $d_1 d_2 \equiv \delta_{12}$, Punkt $\delta_{12} d_3 \equiv D_3$, Ebene $D_{12} d_3 \equiv \delta_3$. Es sind dann (D_{12}, δ_3), (D_3, δ_{12}) zwei von den 12 Büscheln, und mit D_{12} ist noch δ_{12}, mit D_3 noch δ_3 incident. —

36. *Die andere Congruenz (3, 3), welche der Schnitt eines linearen und eines kubischen Complexes ist* und von der schon in Nr. 12 gefunden wurde, dass sie keinen Strahlenbüschel besitzt, *hat die Constantenzahl 34.* Denn wenn $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_3 = 0$ die in ihr sich schneidenden Complexe sind, wobei $\varkappa_3$ schon auf die wesentlichen 49 Constanten reducirt ist*); so kann man $\varkappa_3 = 0$ ersetzen durch $\varkappa_3 + \lambda \varkappa_1 \varkappa_2 = 0$, wo $\varkappa_2 = 0$ ein beliebiger quadratischer Complex ist, dessen Gleichung ebenfalls auf die wesentlichen 19 Constanten zurückgeführt ist. Vermittelst dieser und des Parameters λ kann man $\varkappa_3 + \lambda \varkappa_1 \varkappa_2$ auf 29 Constanten herabbringen; demnach ist die Constantenzahl der Congruenz $5+29$.

Zwei projective Strahlenbüschel mit einem sich selbst entsprechenden Strahle und eine zu ihnen projective Regelschaar erzeugen eine Congruenz

*) *Lüroth*, dieses Journal, Bd. 67, S. 132; *Voss*, Math. Ann., Bd. 9, S. 59.

(3, 3) dieser Art; aber die Erzeugung involvirt nur $8+9+2+3 = 22$ Constanten. —

37. In Bezug auf *die Strahlencongruenzen zweiter Ordnung und* $(n+1)^{ter}$ *Klasse* hat Herr *Kummer* in der Abhandlung von 1866 folgende zwei Sätze (XXIX, XXX) bewiesen:

Wenn m_g die Anzahl der singulären Punkte ist, von denen Strahlenkegel g^{ter} Ordnung an die Congruenz gehen, so ist:

$$n(n+3)^2 = m_1+2^3m_2+3^3m_3+\cdots+n^3m_n,$$
$$(n-1)(n+2)(n+3) = 4m_2+18m_3+\cdots+n^2(n-1)m_n.$$

Aus ihnen folgt unmittelbar:

$$2(n+1)(n+3) = m_1+2^2m_2+3^2m_3+\cdots+n^2m_n.$$

Herr *Kummer* spricht noch von andern derartigen Sätzen; möglicherweise ist ihm der folgende bekannt, der nicht aus XXIX und XXX abzuleiten, aber einfacher als beide ist und deshalb wohl bemerkenswerth zu sein scheint:

$$4(n+3) = m_1+2m_2+\cdots+nm_n;$$

d. h. *die Summe der Ordnungen der singulären Strahlenkegel ist* $4(n+3)$. Wir haben:

$n = 6$		$m_6 = 1$,	$m_3 = 10$;		
$n = 5$	erster Art	$m_4 = 4$,	$m_2 = 8$;		
$n = 5$	zweiter Art	$m_5 = 1$,	$m_3 = 6$,	$m_2 = 4$,	$m_1 = 1$;
$n = 4$		$m_4 = 1$,	$m_3 = 3$,	$m_2 = 6$,	$m_1 = 3$;
$n = 3$		$m_3 = 2$,	$m_2 = 6$,	$m_1 = 6$;	
$n = 2$		$m_2 = 5$,	$m_1 = 10$;		
$n = 1$		$m_1 = 16$.			

Münster, Juli 1886.

Schluss-Bemerkung: In seiner Schrift: Sugli enti geometrici dello spazio di rette etc. (Piazza Armerina, 1882), die ich unterdessen kennen gelernt habe, untersucht Herr *Dom. Roccella* den Complex zweiten Grades mit zwei Doppelgeraden, der durch zwei projective Büschel von linearen Complexen entsteht. Seine singuläre Fläche ist eine Regelfläche vierten Grades mit zwei doppelten Leitgeraden, deren Gerade die Directricen der erzeugenden Congruenzen sind. Für sie leitet Herr *Roccella* die Projectivität

der beiden Würfe der Cuspidalpunkte genau in derselben Weise ab, wie ich in Nr. 24. Aus Bemerkungen der Herren *F. Klein* (Math. Ann. Bd. 27, S. 107) und *Rohn* (ebenda Bd. 28, S. 286) entnehme ich, dass sie schon länger bekannt sein muss. Im zweiten Theile seiner Arbeit behandelt dann Herr *Roccella* die *Kummer*sche Erzeugungsweise der allgemeinen windschiefen Congruenz (3, 3) durch drei projective Büschel von linearen Complexen; so wie den particularen Fall, wo jeder der drei Complexbüschel durch specielle Complexe (Strahlengewinde) gebildet wird, deren Axen die Strahlen eines Strahlenbüschels sind, d. h. die in Nr. 31 erwähnte Congruenz. — Desgleichen erfahre ich während des Drucks durch Herrn *Lampe*, dass die neue Formel von Nr. 37 schon von Herrn *U. Masoni* in dem Aufsatze: „Sui connessi conici ed in particolare sui sistemi di rette del 2° ordine." Nap. Rend. XXII, p. 145—164 gefunden ist. Schliesslich habe ich noch die nach Absendung dieser Arbeit erschienenen Artikel von *Hirst* über Congruenzen zu erwähnen, Rend. del Circolo mat. di Palermo Bd. 1, S. 64 und Proc. London Math. Soc. Bd. 17, S. 287, welche in Beziehung zum dritten Theile meines Aufsatzes stehen.

Münster, den 2. April 1887.

Zur Theorie der positiven quadratischen Formen *).

(Von Herrn *Hermann Minkowski* in Bonn.)

Eine wesentlich positive quadratische Form von n Variabeln, mit reellen Coefficienten und nichtverschwindender Determinante, kann — wie eine Darstellung der Form als Summe der Quadrate von n unabhängigen reellen linearen Formen leicht erkennen lässt — nur bei einer endlichen Anzahl ganzzahliger linearer Transformationen ungeändert bleiben. Jede einzelne von diesen Transformationen muss daher eine endliche Ordnung besitzen, d. h. nach einer endlichen Reihe von Wiederholungen zur identischen Transformation führen, und kann deshalb, nach § 1 meines Aufsatzes *Ueber den arithmetischen Begriff der Aequivalenz*, niemals der identischen Transformation modulo 4 congruent sein, wenn sie nicht mit derselben übereinstimmt.

Das Gleiche gilt nun in Bezug auf eine jede ungerade Primzahl als Modul; und aus diesem Umstande ergeben sich einige Aufschlüsse über die gesammte Anzahl der in Rede stehenden Transformationen, eine Anzahl, von welcher zuerst Herr *Camille Jordan* bewiesen hat, dass sie eine nur von der Zahl n abhängende Grenze nicht überschreiten kann **).

§ 1.

Eine lineare Transformation

$$(A.)\qquad x_h = a_{h1}y_1 + a_{h2}y_2 + \cdots + a_{hn}y_n \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

von endlicher Ordnung ist dadurch charakterisirt, dass die mit einem Parameter r gebildete Determinante

---

*) Der nachfolgende Aufsatz wurde in Verbindung mit dem Aufsatze *Ueber den arithmetischen Begriff der Aequivalenz* (dieses Journal, Bd. 100, S. 449) vom Verfasser im März 1887 der philosophischen Facultät zu Bonn als Habilitationsschrift vorgelegt.

**) Journal de l'École polytechnique, cah. 48, p. 133.

$$(\varDelta)\qquad |r\delta_{hk}-a_{hk}| \qquad \left(\begin{smallmatrix} h,\,k=1,\,2,\,\dots\,n \\ \delta_{hh}=1,\ \delta_{hk}=0,\ h\gtrless k\end{smallmatrix}\right)$$

nur für Einheitswurzeln verschwindet, und zwar für einen mehrfachen, etwa m-fachen Nullwerth zusammen mit allen ihren $(m-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten *).

Bei ganzzahligen Coefficienten a_{hk} liefert daher eine Zerlegung in irreductible Factoren für $\varDelta$ einen Ausdruck:

$$(1.)\qquad (r-1)^m f_{\nu'}(r) f_{\nu''}(r)\dots \qquad (m\geqq 0,\ \nu>1),$$

wenn mit $f_\nu(r)$ für eine ganze Zahl $\nu>1$ diejenige ganze Function $\varphi(\nu)^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet wird, welche für die primitiven ν^{ten} Einheitswurzeln verschwindet und als Coefficient des höchsten Gliedes die Zahl 1 hat. Der Grad von (1.) ist:

$$n = m+\varphi(\nu')+\varphi(\nu'')+\cdots.$$

Soll die Transformation (A.) in Bezug auf irgend eine ungerade Primzahl p der identischen Transformation congruent sein, so muss sie mit derselben zusammenfallen.

Denn ist

$$a_{hk}\equiv\delta_{hk}\quad(\text{mod.}\,p)\qquad (h,\,k=1,\,2,\,\dots\,n),$$

und setzt man für r eine ganze Zahl

$$c\equiv 1+p\quad(\text{mod.}\,p^2),$$

so geht $\varDelta$ durch p^n auf. Damit aber der Ausdruck (1.) durch p^n theilbar werde, ist nothwendig, dass in $\varDelta$ kein $f_\nu(r)\,(\nu>1)$ auftrete, dass also $\varDelta=(r-1)^n$ sei. Denn $(c-1)^m$ enthält zwar genau p^m, irgend ein $f_\nu(c)$ aber, wenn $\nu>1$ ist, niemals die Potenz $p^{\varphi(\nu)}$.

Letzteres sieht man in folgender Weise ein. Ist eine Zahl ν ein Vielfaches von $p^\varkappa$, aber nicht mehr von $p^{\varkappa+1}$, so findet man:

$$c^\nu\equiv 1+\nu p\quad(\text{mod.}\,p^{\varkappa+2});$$

also enthält $c^\nu-1$ dieselbe Potenz von p wie $p\nu$. Ein $f_\nu(r)$ hat den Ausdruck:

$$\frac{(r^\nu-1)(r^{\frac{\nu}{\alpha\beta}}-1)(r^{\frac{\nu}{\alpha\gamma}}-1)\dots}{(r^{\frac{\nu}{\alpha}}-1)(r^{\frac{\nu}{\beta}}-1)(r^{\frac{\nu}{\gamma}}-1)\dots},$$

wenn $\alpha,\beta,\gamma,\dots$ die verschiedenen Primzahlen aus ν sind; also geht in $f_\nu(c)$ dieselbe Potenz von p auf wie in

$$\frac{p\nu\cdot p\frac{\nu}{\alpha\beta}\cdot p\frac{\nu}{\alpha\gamma}\cdots}{p\frac{\nu}{\alpha}\cdot p\frac{\nu}{\beta}\cdot p\frac{\nu}{\gamma}\cdots}.$$

---

*) *Hermite*, dieses Journal, Bd. 47, S. 312; *C. Jordan*, dieses Journal, Bd. 84. S. 112.

Diese Zahl ist 1, wenn ν sich aus mehreren ungleichen Primzahlen zusammensetzt, dagegen, wenn ν Potenz einer einzigen Primzahl ist, gleich dieser Primzahl. Die höchste in $f_\nu(c)$ enthaltene Potenz von p ist demnach p^1 oder p^0, je nachdem ν eine Potenz von p ist oder nicht. Im ersteren Falle ist aber, $\nu > 1$ vorausgesetzt, $\varphi(\nu)$ mindestens gleich $p-1 \geqq 2$, im letzteren mindestens gleich 1.

Hat man nun $\Delta = (r-1)^n$, so müssen, damit $(A.)$ eine endliche Ordnung besitze, auch alle $(n-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten, also die Coefficienten von Δ für $r = 1$ verschwinden, d. h. $(A.)$ ist die identische Transformation.

§ 2.

Es bezeichne f irgend eine positive quadratische Form mit n Variabeln, reellen Coefficienten und nichtverschwindender Determinante, und es sei $t(f)$ die Anzahl der verschiedenen ganzzahligen Transformationen, durch welche diese Form in sich selbst übergeht.

Sollten in f die Coefficienten nicht sämmtlich in rationalen Verhältnissen zu einander stehen, so kann man immer leicht eine beliebig wenig von f verschiedene positive Form herstellen, in welcher solches der Fall ist, und welche dabei genau dieselben ganzzahligen Transformationen in sich zulässt wie f. Letzteres thun ferner alle Formen, welche in den Verhältnissen ihrer Coefficienten mit f ganz übereinstimmen. Im Folgenden können wir deshalb voraussetzen, die Coefficienten von f seien ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler.

Die $t(f)$ Transformationen bilden eine Gruppe, und an anderer Stelle werde ich nachweisen, dass man, ausgehend von positiven quadratischen Formen, wenn auch nicht zu allen möglichen endlichen Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen, so doch im Besondern zu allen denjenigen gelangen kann, welche nicht in umfassenderen Gruppen als Untergruppen enthalten sind.

Die in Rede stehende Gruppe ist *einstufig isomorph* zur Gruppe der Reste ihrer Transformationen in Bezug auf irgend eine ungerade Primzahl p. Denn lieferten zwei ihrer Transformationen, etwa A und B, gleiche Reste modulo p, so würde die Transformation $A^{-1}.B$, welche, als Angehörige der Gruppe, ebenfalls von endlicher Ordnung wäre, der identischen Transformation modulo p congruent, aber von ihr verschieden sein, was nach § 1 nicht angeht.

Die Gruppe der $t(f)$ Transformationenreste ist offenbar eine Untergruppe der Gruppe sämmtlicher incongruenter Transformationenreste modulo p von einer Determinante $\equiv \pm 1 (\text{mod.}\, p)$, und ihre Ordnung, die Zahl $t(f)$, daher ein Divisor der Ordnung der letzteren Gruppe, d. i. der Zahl

$$(1.)\qquad 2(p^n-1)p^{n-1}(p^{n-1}-1)p^{n-2}\dots(p^2-1)p\ ^*).$$

Jene Gruppe ist aber ebenso schon eine Untergruppe der Gruppe aller derjenigen Transformationenreste modulo p, welche die Form f modulo p ungeändert lassen. Die Ordnung dieser Gruppe hat für alle ungeraden Primzahlen p, welche nicht in der Determinante D der Form f aufgehen, also jedenfalls für *sämmtliche* Primzahlen über einer gewissen Grenze l, den folgenden Ausdruck **), wenn n gerade ist:

$$(2.)\qquad p^{\frac{1}{4}n(n-2)}.2(p^2-1)(p^4-1)\dots(p^{n-2}-1)(p^{\frac{n}{2}}-\varepsilon),$$

wo $\varepsilon = \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}D}{p}\right)$ eine Einheit bedeutet; wenn n ungerade ist:

$$(3.)\qquad p^{\frac{1}{4}(n-1)^2}.2(p^2-1)(p^4-1)\dots(p^{n-1}-1).$$

Als Divisor *sämmtlicher* Zahlen (2.) oder (3.) für ungerade Primzahlen $p > l$, ist die Zahl $t(f)$ auch ein Divisor des *grössten gemeinschaftlichen Divisors* aller dieser Zahlen.

Um ein Resultat zu erhalten, das von der speciellen Form f unabhängig ist, denken wir uns in (2.) den Factor $p^{\frac{n}{2}}-\varepsilon$ durch sein Vielfaches $\frac{1}{2}(p^n-1)$ ersetzt; ferner möge l mindestens gleich $n+1$ sein. Dann ist jener grösste gemeinsame Divisor dargestellt durch:

$$\overline{n|} = \prod_q q^{\left[\frac{n}{q-1}\right]+\left[\frac{n}{q(q-1)}\right]+\left[\frac{n}{q^2(q-1)}\right]+\cdots} \qquad (q=2,3,5,7,11,\dots),$$

wenn unter der Bezeichnung $[a]$ die grösste in a enthaltene ganze Zahl verstanden wird, und wenn q die Reihe der Primzahlen soweit durchläuft, bis das Product von selbst abbricht, d. i. bis zur grössten Primzahl, welche noch $\leqq n+1$ ist.

Man hat, um dieses einzusehen, für eine jede Primzahl q eine Zahl (2.) bez. (3.) aufzusuchen, welche eine möglichst niedrige Potenz von q enthält. Man gelangt zu einer solchen, indem man die Primzahl p in folgender

---

*) *Galois,* Journal de *Liouville,* t. XI, 1846, p. 410.

**) Vgl. *Untersuchungen über quadratische Formen,* Acta Mathematica, Bd. 7, S. 218.

Weise wählt: wenn $q > n+1$ ist, als primitive Wurzel in Bezug auf q; wenn $q \leqq n+1$ und ungerade ist, als primitive Wurzel für den Modul q^2; wenn $q = 2$ ist, als Zahl der Form $\equiv \mp 1+4$ (mod. 8). Die Existenz von Primzahlen p dieser Formen über der Grenze l ist eine Folge des bekannten Theorems über die arithmetischen Progressionen.

Im ersten der drei unterschiedenen Fälle ist dann die in Betracht kommende Zahl (2.) oder (3.) durch q überhaupt nicht theilbar; im zweiten geht q in $p^\nu-1$ nur auf, wenn ν ein Vielfaches von $q-1$ ist, und zwar dann in derselben Potenz wie in $q.\frac{\nu}{q-1}$, mithin in der Zahl (2.) bez. (3.) in derselben Potenz wie in $q^{\left[\frac{n}{q-1}\right]}.1.2\ldots\left[\frac{n}{q-1}\right]$; im dritten enthält $p^{2\nu}-1$ dieselbe Potenz von 2 wie 8ν, also die Zahl (2.) bez. (3.) dieselbe wie $2^{n+\left[\frac{n}{2}\right]}.1.2\ldots\left[\frac{n}{2}\right]$.

Die Identität der hier auftretenden Primzahlpotenzen mit denjenigen aus $\overline{n|}$ ergiebt sich durch Anwendung der bekannten Relation:

$$1.2\ldots n = n! = \prod_q q^{\left[\frac{n}{q}\right]+\left[\frac{n}{q^2}\right]+\left[\frac{n}{q^3}\right]+\cdots} \qquad (q=2,3,5,7,\ldots),$$

und man erhält damit in der That den Satz:

Die Anzahl der ganzzahligen Transformationen einer positiven quadratischen Form mit n Variabeln (und von nichtverschwindender Determinante) in sich selbst ist ein Divisor der Zahl $\overline{n|}$.

Als grösster gemeinsamer Divisor aller Zahlen (1.) würde sich $2^{\left[\frac{n}{2}\right]}.\overline{n|}$ ergeben haben.

Die Zahl $\overline{n|}$ selbst ist ein Divisor von $(2n)!$; denn in ihrem Ausdrucke verkleinert man keinen der Exponenten, wenn man in denselben anstatt $q-1$ überall $\frac{1}{2}q$ schreibt.

Als specielle Fälle seien die folgenden erwähnt: die Form

$$\mathfrak{Q}_n = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

geht durch $2^n.n!$, die Form

$$\mathfrak{D}_n = (\Sigma x_h)^2+\Sigma x_h^2\ ^{*)} \qquad (h=1,2,\ldots n)$$

von der Determinante $n+1$ durch $2.(n+1)!$ ganzzahlige Transformationen in sich selbst über.

---

*) Die Form $\mathfrak{D}_n$ ist von den Herren *Korkine* und *Zolotareff* eingehender untersucht worden, vgl. Mathematische Annalen, Bd. 6 und Bd. 11.

Die Zahl $\overline{n}|$ ist ferner das *kleinste* gemeinsame Vielfache aller möglichen Anzahlen $t(f)$.

Denn zunächst enthält die der Form $\mathfrak{Q}_n$ angehörige Zahl $t(\mathfrak{Q}_n)$ dieselbe Potenz von 2 wie $\overline{n}|$. Ist ferner q eine der ungeraden Primzahlen $\leqq n+1$, und bildet man eine Form f als Summe von $\left[\frac{n}{q-1}\right]$ Formen $\mathfrak{D}_{q-1}$ und der Form $\mathfrak{Q}_{\left(n-(q-1)\left[\frac{n}{q-1}\right]\right)} = \mathfrak{Q}$ mit fortlaufend nummerirten Variabeln, so ist für diese Form f die Zahl

$$t(f) = (2.q!)^{\left[\frac{n}{q-1}\right]}.\left[\frac{n}{q-1}\right]!\,t(\mathfrak{Q})$$

durch dieselbe Potenz von q theilbar wie $\overline{n}|$.

Man hat im Einzelnen $\overline{2}| = 24$, $\overline{3}| = 48$, $\overline{4}| = 5760$, etc. und allgemein:

$$\overline{2n+1}| = 2.\overline{2n}|,\quad \overline{2n}| = 2b_n.\overline{2n-1}|,\quad \overline{n}| = 2^n.b_1 b_2 \ldots b_{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

wenn unter b_n eine Zahl verstanden wird, welche alle und nur solche Primzahlen q enthält, für welche $2n$ durch $q-1$ aufgeht, und jede derselben in einer Potenz $q^{\varkappa+1}$, falls sie in n in der Potenz $q^{\varkappa}(\varkappa \geqq 0)$ auftritt.

Bedeutet B_n die n^{te} *Bernoulli*sche Zahl, so stellt b_n den Nenner von $\frac{1}{n}B_n$ vor *).

Die Bestimmung der ganzzahligen Transformationen einer positiven Form $f = \sum_1^n a_{hk}x_h x_k$ in sich selbst geschieht durch Vermittelung der äquivalenten reducirten Formen.

Nach der Definition von Herrn *Hermite* **) gelten in einer positiven Klasse f diejenigen Formen als *reducirt,* welche das kleinste System

$$a_{11},\quad a_{22},\quad \ldots\quad a_{nn}$$

(d. i. kurz ausgedrückt den kleinsten Werth von

$$a_{11}g^{n-1} + a_{22}g^{n-2} + \cdots + a_{nn}$$

bei hinreichend grossem positivem g) ergeben.

Den Sätzen, welche ich dieses Journal, Bd. 99 mitgetheilt habe, schliessen sich die folgenden für den Fall von sechs Variabeln an.

*) Vgl. *Lipschitz,* dieses Journal, Bd. 96, S. 4.

**) Dieses Journal, Bd. 40, S. 302.

Eine Form f mit sechs Variabeln ist immer und nur dann positiv und reducirt, wenn sie allen Ungleichungen

$$f(m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_6) \geqq a_{hh} \qquad (h = 1, 2, \ldots 6)$$

genügt, für welche die Zahlen m in folgender Tabelle enthalten sind:

m_h	$\pm m_{h'}$	$\pm m_{h''}$	$\pm m_{h'''}$	$\pm m_{h^{IV}}$	$\pm m_{h^{V}}$
1	1				
1	1	1			
1	1	1	1		
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	2	
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	2	2
1	1	1	1	2	3

(die nicht aufgeführten Grössen m sind gleich Null zu setzen), und ferner den Ungleichungen:

$$a_{11} \leqq a_{22} \leqq \cdots \leqq a_{66}.$$

Nur für die reducirten und die aus denselben durch Permutation der Variabeln hervorgehenden Formen nehmen die Verbindungen

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{66},\quad \ldots,\quad a_{11}a_{22}\ldots a_{66}$$

ihre kleinsten Werthe an.

Die *Hermite*schen reducirten Formen mit sieben Variabeln lassen sich nicht mehr durch eine Reihe einzelner linearer Ungleichungen vollständig charakterisiren.

Berlin, den 15. Februar 1887.

Berichtigung.

Dieses Journal Bd. C, S. 451, Z. 1 v. u. ist zu lesen:

$$\varepsilon s_k = \Sigma_h a_{hk} s_h \qquad (h, k = \nu, \ldots n),$$

und in den darauf folgenden Zeilen ist S durch diejenige Substitution zu ersetzen, welche aus S^{-1} durch Vertauschung der Horizontal- mit den Verticalreihen hervorgeht.

Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Im achten Bande der Acta Mathematica hat Herr *Poincaré* eine Abhandlung „Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires" im Anschlusse an eine früher von ihm im siebenten Bande des American Journal of Mathematics mitgetheilte Untersuchung veröffentlicht. Herr *Poincaré* verwendet in dieser Abhandlung namentlich die divergenten Entwickelungen, welche die Differentialgleichungen formal befriedigen, zur Aufstellung asymptotischer Ausdrücke der Integrale, sodann giebt er eine Bedingung für die Convergenz von formalen Entwickelungen an. Die genannte Abhandlung giebt mir zu folgenden Bemerkungen Veranlassung.

1.

Was den Gebrauch der formalen divergenten Entwickelungen angeht, so ist hervorzuheben, dass, wie sich an Beispielen nachweisen lässt, die Exponenten in divergenten, von Herrn *Poincaré* behandelten Entwickelungen zu den Exponenten in den wirklich vorhandenen Entwickelungen in keiner Beziehung stehen. Die Natur der letzteren Exponenten, der Umstand, ob dieselben ganzzahlig, rational, irrational, complex sind, kommt aber bei Beurtheilung der Verzweigung der Integrale wesentlich in Betracht. Divergente Entwickelungen geben daher keinen Aufschluss, wenn es sich um die Beantwortung der ersten Frage in Betreff der Integrale bei einem singulären Punkte handelt, nämlich der Frage nach den Exponenten der Integrale.

Ein allgemeineres Beispiel dafür, dass die Exponenten in den formalen divergenten Entwickelungen ganz andere sein können als in den wirklich bestehenden Entwickelungen, ist am Schlusse meiner Abhandlung

„Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen" im 96. Bande dieses Journals angegeben. Dasselbe ist hier weiter verallgemeinert und so umgestaltet, dass es mit den Formeln des Herrn *Poincaré* direct vergleichbar wird.

Herr *Poincaré* geht (l. c. § 3) von der Differentialgleichung aus

$$(1.)\qquad P_n\frac{d^ny}{dx^n}+P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_1\frac{dy}{dx}+P_0y = 0,$$

wo die P ganze rationale Functionen von x sind, P_n vom m^{ten} Grade, die übrigen Polynome von nicht höherem als dem m^{ten} Grade. Es sei

$$(2.)\qquad P_k = \sum_{i=0}^{i=m} C_{ik}x^i$$

gesetzt, und es werde die Gleichung

$$(3.)\qquad C_{m,n}a^n+C_{m,n-1}a^{n-1}+\cdots+C_{m,0} = 0$$

aufgestellt. Die Wurzeln derselben $a_1, a_2, \dots a_n$ sollen von einander verschieden sein. Der Differentialgleichung (1.) wird alsdann formal Genüge geleistet durch n Entwickelungen der Form

$$(4.)\qquad e^{a_1x}x^{-\varrho_1}\varphi_1(x^{-1}),\quad e^{a_2x}x^{-\varrho_2}\varphi_2(x^{-1}),\quad \dots\quad e^{a_nx}x^{-\varrho_n}\varphi_n(x^{-1}),$$

wo $\varphi_p(x^{-1})$ von der Form $\sum_0^\infty c_\alpha^{(p)}x^{-\alpha}$, Mod. $c^{(p)}\gtrless 0$ ist, und die Grössen ϱ durch die Gleichung bestimmt werden

$$(5.)\qquad \varrho_p\sum_{k=0}^{k=n} C_{m,k}\,k a_p^{k-1}-\sum_{k=0}^{k=n} C_{m-1,k}a_p^k = 0,\qquad (p=1,\dots n).$$

Eine Differentialgleichung von der Form (1.) ist

$$(6.)\qquad x^4\frac{d^2y}{dx^2}+\{2x^3-x^2(A_0x^2+A_1x)\}\frac{dy}{dx}+\{B_0x^4+B_1x^3+B_2x^2\}y = 0,$$

welche durch Substitution von $x=t^{-1}$ aus

$$(7.)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{A_0+A_1t}{t^2}\frac{dy}{dt}+\frac{B_0+B_1t+B_2t^2}{t^4}y = 0$$

entsteht. Die Differentialgleichung (6.) hat bei dem singulären Punkte $x=0$ nur reguläre Integrale, die Exponentengleichung derselben ist

$$(8.)\qquad r(r-1)+(2-A_1)r+B_2 = 0.$$

Die Wurzeln r_1 und r_2 derselben sollen sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Dann genügen der Differentialgleichung zwei linearunabhängige Integrale

$$(9.)\qquad x^{r_1}\sum_0^\infty g_\alpha^{(1)}x^\alpha,\quad x^{r_2}\sum_0^\infty g_\alpha^{(2)}x^\alpha,\quad \left.\begin{matrix}\text{Mod. } g_0^{(1)}\\ \text{Mod. } g_0^{(2)}\end{matrix}\right\}\gtrless 0,$$

welche allenthalben convergiren, da im Endlichen kein anderer singulärer

Punkt als $x = 0$ vorkommt, und welche daher auch die Integrale bei $x = \infty$ darstellen. Die Gleichung (3.) ist hier

$$(10.)\qquad a^2 - A_0 a + B_0 = 0;$$

es soll Mod. $(A_0^2 - 4B_0) \gtrless 0$ sein, so dass die Wurzeln von (10.) a_1, a_2 von einander verschieden sind. Die Gleichung (5.) wird

$$(11.)\qquad \varrho_p(2a_p - A_0) - (2 - A_1)a_p - B_1 = 0 \qquad (p = 1, 2).$$

Es ergeben sich die formalen Entwickelungen

$$(12.)\qquad e^{a_1 x} x^{-\varrho_1} \sum_0^\infty k_\lambda^{(1)} x^{-\lambda}, \quad e^{a_2 x} x^{-\varrho_2} \sum_0^\infty k_\lambda^{(2)} x^{-\lambda}, \quad \begin{matrix} \text{Mod. } k_0^{(1)} \\ \text{Mod. } k_0^{(2)} \end{matrix} \Big\} \gtrless 0.$$

Aus (11.) folgt für $\varrho_1 + \varrho_2$ vermittelst (10.) der Ausdruck

$$(13.)\qquad \frac{(2 - A_1)a_1 + B_1}{2a_1 - A_0} + \frac{(2 - A_1)a_2 + B_1}{2a_2 - A_0} = 2 - A_1,$$

und daher ergiebt sich gemäss (8.)

$$(14.)\qquad r_1 + r_2 + \varrho_1 + \varrho_2 = 1.$$

Die Grössen r_1, r_2 und eine der Grössen ϱ können bei fixirten Werthen von a_1, a_2 vermöge (8.) und (11.) beliebige Werthe erhalten, die andere Grösse ϱ ist dann durch (14.) bestimmt. Wenn demnach über die Werthe r_1 und r_2 bereits in der Weise verfügt ist, dass sie sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden, so sei eine der Grössen ϱ so angenommen, dass für dieselbe $r_1 + \varrho$ und $r_2 + \varrho$ nicht ganzzahlig ist, dann findet gemäss (14.) dasselbe für die andere Grösse ϱ statt. Jetzt kann keine der beiden Entwickelungen (12.) convergiren, weil bereits die Integrale (9.) bei $x = \infty$ bestehen. Die einzelnen Exponenten $-\varrho_1$, $-\varrho_2$ in den formalen Entwickelungen (12.) stehen alsdann zu keinem der beiden Exponenten r_1, r_2 in den bei $x = \infty$ wirklich bestehenden Entwickelungen (9.) in Beziehung. Man hat also hier ein allgemeineres Beispiel, in welchem die Exponenten in formalen divergenten Entwickelungen nicht zur Bestimmung der Exponenten in den wirklich bestehenden Entwickelungen zu gebrauchen sind.

Für die angenäherte Darstellung der Integrale in der Nähe eines singulären Punktes kann man durch den singulären Punkt einen Kreis legen, der im Innern keinen singulären Punkt enthält, für das Gebiet innerhalb dieses Kreises die wirklichen Entwickelungen bei dem nichtsingulären Mittelpunkte aufstellen und dieselben mit vorgeschriebener Annäherung in einem beliebigen concentrischen Kreise in diesem Gebiete durch ganze rationale Functionen ersetzen.

2.

Die Differentialgleichung Nr. 1 (1.)

$$(1.)\qquad \Sigma C_{ik} x^i \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \qquad \begin{Bmatrix} i=0,\dots m \\ k=0,\dots n \end{Bmatrix}$$

wird von Herrn *Poincaré* mit folgender

$$(2.)\qquad \Sigma C_{ik}(-1)^i \frac{d^i(vz^k)}{dz^i} = 0$$

— als transformirten Differentialgleichung von *Laplace* — in Beziehung gebracht. Dieselbe entsteht auf diese Weise. Es werde y gleich dem bestimmten Integrale

$$(3.)\qquad y = \int_{z_0}^{z_1} v e^{zx} dz$$

gesetzt, wo v eine Function von z ist. Hieraus folgt

$$(4.)\qquad xy = \int_{z_0}^{z_1} vxe^{zx} dz = [ve^{zx}]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \frac{dv}{dz} e^{zx} dz,$$

und wenn die mit dem Substitutionszeichen behaftete Grösse verschwindet, so erhält man weiter

$$(5.)\quad x^2 y = -\int_{z_0}^{z_1} \frac{dv}{dz} x e^{zx} dz = -\left[\frac{dv}{dz} e^{zx}\right]_{z_0}^{z_1} + \int_{z_0}^{z_1} \frac{d^2 v}{dz^2} e^{zx} dz,$$

und in derselben Weise, wenn jedesmal die von dem Integralzeichen freie Grösse verschwindet

$$(6.)\qquad x^i y = (-1)^i \int_{z_0}^{z_1} \frac{d^i v}{dz^i} e^{zx} dz.$$

Auf dieselbe Weise entsteht alsdann

$$(7.)\qquad x^i \frac{d^k y}{dx^k} = (-1)^i \int_{z_0}^{z_1} \frac{d^i(vz^k)}{dz^i} e^{zx} dx.$$

Werden die Ausdrücke (6.) und (7.) in (1.) eingesetzt, wird alsdann die Grösse unter dem Integralzeichen gleich Null gesetzt, so geht die Differentialgleichung (2.) hervor.

Der Coefficient der höchsten Ableitung in (2.) gleich Null gesetzt giebt die Gleichung Nr. 1 (3.). Die singulären Punkte der Differentialgleichung (2.) im Endlichen sind demnach die Grössen a_1 bis a_n in Nr. 1 (4.). Da die Gleichung Nr. 1 (3.) nur einfache Wurzeln haben soll, so sind bei jedem dieser singulären Punkte die Integrale von (2.) regulär. Die Exponentengleichung derselben bei dem Punkte a_p wird

$$(8.)\qquad r(r-1)(r-2)\dots(r-m+1) + \lambda_p r(r-1)\dots(r-m+2) = 0,$$

wo λ_p sich als

$$(9.)\quad \lambda_p = m-\varrho_p$$

ergiebt, ϱ_p aus Nr. 1 (5.), so dass die Wurzeln von (8.)

$$(10.)\quad 0,\ 1,\ \ldots\ m-2,\ \varrho_p-1$$

sind. Der Punkt $z=\infty$ in (2.) ist im Allgemeinen kein solcher singulärer Punkt, bei dem nur reguläre Integrale vorhanden sind. Die Grösse ϱ_p sei nicht ganzzahlig. Dann hat die Differentialgleichung (2.) bei a_p ein Integral von der Entwickelung

$$(11.)\quad (z-a_p)^{\varrho_p-1}\sum_0^\infty C_\alpha^{(p)}(z-a_p)^\alpha,\quad \text{Mod. } C_0^{(p)} \gtrless 0.$$

Der Differentialgleichung (1.) aber genügt formal die Entwickelung Nr. 1 (4.)

$$(12.)\quad e^{a_p x}x^{-\varrho_p}\varphi_p(x^{-1}),$$

wo nach Herrn *Poincaré* (l. c. § 3)

$$(13.)\quad \varphi_p(x^{-1}) = \sum_0^\infty C_\alpha^{(p)}\varrho_p(\varrho_p+1)\ldots(\varrho_p+\alpha-1)x^{-\alpha}$$

ist, die Constanten $C_\alpha^{(p)}$ dieselben, wie in (11.); es wird hier jedoch gemäss den Recursionsformeln, die sich für die Entwickelungen aus den Differentialgleichungen (1.) und (2.) ergeben, an Stelle von (13.)

$$(14.)\quad \varphi_p(x^{-1}) = \sum_0^\infty (-1)^\alpha C_\alpha^{(p)}\varrho_p(\varrho_p+1)\ldots(\varrho_p+\alpha-1)x^{-\alpha}$$

zu setzen sein.

Nun stellt Herr *Poincaré* (l. c. § 4) einen Beweis für das Theorem auf, dass zur Convergenz der Entwickelung $\varphi_p(x^{-1})$ nothwendig und hinreichend sei, dass die Entwickelung $\sum\limits_0^\infty C_\alpha^{(p)}(z-a_p)^\alpha$ in (11.) allenthalben convergirt. Wenn das Bestehen dieses Theorems vorausgesetzt wird, so ist jedoch in Bezug auf die Frage nach der Convergenz der Entwickelung $\varphi_p(x^{-1})$ zu bemerken, dass die Beantwortung dieser Frage durch jenes Theorem auf die Lösung einer im Allgemeinen keineswegs leichteren, sondern eher schwereren Aufgabe hinverwiesen wird.

Denn in Differentialgleichung (2.) sind ausser dem Punkte a_p noch $n-1$ andere singuläre Punkte im Endlichen vorhanden, und der Punkt $z=\infty$ in (2.) ist im Allgemeinen kein solcher singulärer Punkt, bei dem alle Integrale regulär wären. Im Falle aber, dass bei $z=\infty$ die Integrale von (2.) alle regulär sind (auf welchen Fall Herr *Poincaré* am Schlusse von § 4 zu sprechen kommt) würde aus jenem Theorem als zur Convergenz von $\varphi_k(x^{-1})$

nothwendig und hinreichend folgen, dass die Entwickelung $\sum_{0}^{\infty} C_{\alpha}^{(p)}(z-a_p)^{\alpha}$ sich auf ein Polynom reducirt, dass demnach auch die Entwickelung $\varphi_p(x^{-1})$ mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht. Ist diese Bedingung erfüllt, so genügt die Grösse $e^{a_p x} x^{-\varrho_p} \varphi_p(x^{-1})$ einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher (nach der von mir gebrauchten Terminologie, s. Bd. 96 dieses Journals) ein normaler Differentialausdruck gleich Null gesetzt ist, dessen determinirender Factor $e^{a_p x}$ in einem einzigen Punkte unendlich wird und dessen regulärer Differentialausdruck als wesentlich singuläre Punkte nur $x = 0$ und $x = \infty$ hat. Und das wäre ein sehr spezieller Fall aus der Gattung von Differentialgleichungen, bei denen der ursprünglichen Differentialgleichung die Integrale einer Differentialgleichung genügen, in der ein System normaler Differentialausdrücke gleich Null gesetzt ist.

Die übrigen Untersuchungen in der Abhandlung des Herrn *Poincaré* bestehen in Zurückführungen auf den Fall, der in Differentialgleichung (1.) enthalten ist.

Greifswald, den 27. März 1887.

Note on the Theory of Linear Differential Equations.

(By Professor *A. Cayley* at Cambridge.)

The theorem V given by *Fuchs* in the memoir „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten" Journal t. 68 (1868) pp. 354—385 (see p. 374) for the purpose of deciding whether the integrals belonging to a group of roots of the „determinirenden Fundamentalgleichung" (or as I call it, the Indicial equation) do or do not involve logarithms, may I think be exhibited in a clearer form.

Starting from the differential equation

$$P(y), \quad = p_0 \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y, \quad = 0,$$

of the order m, then if X be any function of x not satisfying the differential equation, we can at once form a differential equation of the order $m+1$, satisfied by all the solutions of the differential equation, and having also the solution $y = X$; the required equation is in fact

$$\partial_x P(y).P(X) - P(y).\partial_x P(X) = 0.$$

This I call the augmented equation.

I recall that the equation $P(y) = 0$, considered by *Fuchs*, is an equation having for each singular point $x = a$, m regular integrals, viz. the coefficients $p_0, p_1, \ldots p_m$ have the forms $q\,(x-a)^m$, $q_1(x-a)^{m-1}, \ldots q_m$, where $q_0, q_1, \ldots q_m$ are rational and integral functions of $x-a$, q not vanishing for $x = a$, and the other functions $q_1, q_2, \ldots q_m$ not in general vanishing for $x = a$. Writing $y = (x-a)^\theta$, we obtain

$$P(x-a)^\theta = I(\theta)(x-a)^\theta + \text{ higher powers of } (x-a),$$

where $I(\theta)$, the coefficient of the lowest power of $(x-a)$, is a function of

θ of the order m, which I call the indicial coefficient, and equating it to zero, we have $I(\theta) = 0$, the determinirende Fundamentalgleichung, or Indicial equation, being an equation of the order m. If the roots of this equation are such that no two of them are equal or differ only by an integer number, then we have m particular integrals each of them of the form

$$y = (x-a)^r + \text{ higher powers of } (x-a),$$

where r is any root of the indicial equation: but if we have in the indicial equation a group of λ roots $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$, such that the difference of each two of them is either zero or an integer, then the integrals which correspond to these roots involve or may involve logarithms; in particular if any two of the roots are equal, the integrals for the group will involve logarithms.

Consider now the differential equation $P(y) = 0$ in reference to the singular point $x = a$ as above, and writing $X = (x-a)^\epsilon f$ where ϵ is in the first instance arbitrary, and f is a rational and integral function of $x-a$ not vanishing for $x = a$, we form the augmented equation, which observing that we have in general $P(X) = (x-a)^\epsilon Q$, Q a rational and integral function of $x-a$ not vanishing for $x = a$, and dividing the whole equation by $(x-a)^{\epsilon-1}$, may be written

$$\partial_x P(y).(x-a)Q - P(y)\{\epsilon Q + (x-a)\partial_x Q\} = 0,$$

an equation of the same form as the original equation (but of the order $m+1$ instead of m), and having an indicial equation

$$(\theta-\epsilon)I(\theta) = 0.$$

(In fact writing as before $y = (x-a)^\theta$, we have in $\partial_x P(y).(x-a)Q$ the term of lowest order $\theta I(\theta) Q_0 (x-a)^\theta$ and in $P(y).\epsilon Q$ the term of lowest order $\epsilon I(\theta) Q_0 (x-a)^\theta$, whereas in $P(y)(x-a)\partial_x Q$ the term of lowest order is $(x-a)^{\theta+1}$; the indicial equation is thus as just found).

If however ϵ be equal to a root of the indicial equation $I(\theta) = 0$, then instead of $P(X) = (x-a)^\epsilon Q$, we have $P(X) = (x-a)^\mu Q$, where the index μ is $= \epsilon +$ a positive integer, and where the value of the difference $\mu - \epsilon$ may depend upon the determination of the function f in the expression $(x-a)^\epsilon f$. The indicial equation for the augmented equation is in this case $(\theta-\mu)I(\theta) = 0$.

If the indicial equation $I(\theta) = 0$ of the given differential equation

has a group of roots $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ (the difference of any two of these roots being zero or an integer) then taking ϵ = any one of these roots, the augmented equation will have a group of roots $(\mu, r_1, r_2, \ldots r_\lambda)$.

If any two of the roots $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ are equal, the group of integrals $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ will involve logarithms: the question only arises when these roots are unequal, and taking them to be so, the theorem V is in effect as follows: „If by taking ϵ = some one of the roots $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$, and by a proper determination of the function f we can make μ to be = one of the same roots $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$, then the group of integrals $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ will involve logarithms; but if μ cannot be made = one of the roots $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$, then the group of integrals will be free from logarithms."

As an example, I consider the equation

$$P(y) = (x^2-x^4)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x^3\frac{dy}{dx} - (n^2+n)y = 0.$$

(This is *Legendre*'s equation $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (n^2+n)y = 0$, with $\frac{1}{x}$ substituted for x, so that instead of a singular point $x=\infty$, there may be a singular point $x=0$). Attending to the singular point $x=0$, we have $P(x^\theta) = (\theta^2-\theta-n^2-n)x^\theta +$ higher powers, so that the indicial equation $I(\theta)=0$, is $\theta^2-\theta-n^2-n=0$, that is $(\theta+n)(\theta-n-1)=0$, or we have the roots $-n$, $n+1$, which differ by an integer, and thus form a group, if n be = an integer, or = an integer $-\frac{1}{2}$; to fix the ideas say that the roots are $-p$, $p+1$ or else $-p+\frac{1}{2}$, $p+\frac{1}{2}$ where p is a positive integer.

Writing for greater convenience $x^\epsilon f = x^\epsilon + F$, where F is a sum of powers of x higher than ϵ, we find without difficulty

$$P(x^\epsilon f) = x^\epsilon \{(\epsilon+n)(\epsilon-n-1) - (\epsilon^2+\epsilon)x^2 + (x^2-x^4)x^{-\epsilon}F'' - (n^2+n)x^{-\epsilon}F\}$$

which so long as ϵ remains arbitrary is of the form $x^\epsilon Q$, $Q = (\epsilon+n)(\epsilon-n-1) +$ powers of x; if however ϵ be a root of the indicial equation, for instance if $\epsilon=-n$, then the expression in brackets $\{\}$ contains at any rate the factor x, so that the form is $P(x^{-n}f) = x^\mu Q$ where μ is $=-n+1$ at least; we can however by a proper determination of the function f make μ acquire a larger value.

For instance suppose $-n$, $n+1 = -2, 3$; $\epsilon = -n = -2$, and assume

$$x^\epsilon f = x^{-2} + Bx^{-1} + Cx^0 + Dx^1 + Ex^2 + Fx^3 + Gx^4 + \cdots$$

To calculate $P(x^\epsilon f)$, we have

	x^{-2}	x^{-1}	x^{0}	x^{1}	x^{2}	x^{3}	x^{4}	x^{5}	$\dots$
	6	$2B$	$0C$	$0D$	$2E$	$6F$	$12G$	$20H$	$\dots$
			-6	$-2B$	$-0C$	$-0D$	$-2E$	$-6F$	
			$+4$	$+2B$	$-0C$	$-2D$	$-4E$	$-6F$	
	-6	$-6B$	$-6C$	$-6D$	$-6E$	$-6F$	$-6G$	$-6H.$	
$P(x^{\epsilon}f) =$	0	$-4B$	$-6C$	$-6D$	$-4E$	$0F$	$6G$	$14H$	$\dots$
			2			$-2D$	$-6E$	$-12F.$	

Hence if B not $=0$ we have $\mu=-1$; if $B=0$, $-6C-2$ not $=0$, we have $\mu=0$; if $B=0$, $-6C-2=0$, D not $=0$, we have $\mu=1$; if $B=0$, $-6C-2=0$, $D=0$, but E not $=0$, we have $\mu=2$; if $B=0$, $-6C-2=0$, $D=0$, $E=0$, then the coefficient of x^3, $=0F-2D$, is $=0$, and we have not $\mu=3$, but $\mu=4$ at least, viz. μ will be $=4$,* if $6G-6E=0$, that is if $G=0$; but leaving F arbitrary, we can by giving proper values to the subsequent coefficients $H, I,$ etc. make μ to be $=5$ or any larger integer value. The values of μ are thus $=-1, 0, 1, 2, 4, 5, \dots$, and we see that the group $(\mu, -n, n+1)$ that is $(\mu, -2, 3)$ does not in any case contain two equal indices. Starting from the value $\epsilon=3$, the value of μ is >3, and thus here also the group $(\mu, -2, 3)$ does not contain two equal indices.

The conclusion from the theorem thus is that the integrals u_1, u_2, belonging to the roots $-2, 3$ do not involve logarithms: and in precisely the same manner it appears that the integrals belonging to the two roots $-p, p+1$ (p any positive integer) do not involve logarithms: this is right, for the integrals are in fact the *Legendrian* functions of the first and second kinds P_p and Q_p with only $\frac{1}{x}$ written therein instead of x.

Similarly, if for instance $-n, n+1=-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, then if $\epsilon=-n=-\frac{1}{2}$, assuming

$$x^{\epsilon}f = x^{-\frac{1}{2}}+Bx^{\frac{1}{2}}+Cx^{\frac{3}{2}}+Dx^{\frac{5}{2}}+Ex^{\frac{7}{2}}+\cdots,$$

we have

	$x^{-\frac{1}{2}}$	$x^{\frac{1}{2}}$	$x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{5}{2}}$	$x^{\frac{7}{2}}$	$\dots$
	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}B$	$\frac{3}{4}C$	$\frac{15}{4}D$	$\frac{35}{4}E$	
			$-\frac{3}{4}$	$+\frac{1}{4}B$	$-\frac{3}{4}C$	
			$+1$	$-B$	$-3C$	
	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}B$	$-\frac{3}{4}C$	$-\frac{3}{4}D$	$-\frac{3}{4}E$	
$P(x^{\epsilon}f) =$	0	$-B$	$0C$	$3D$	$8E$	$\dots$
			$+\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}B$	$-\frac{15}{4}C.$	

We have here if B not $=0$, $\mu=\frac{1}{2}$; but if $B=0$, then we cannot in any way make the coefficient of $x^{\frac{3}{2}}$ to vanish, and consequently $\mu=\frac{3}{2}$. With this last value of μ, the group $(\mu,\ -n,\ n+1)$, that is $(\mu,\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2})$ becomes $(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2})$ which contains two equal roots, and the conclusion from the theorem thus is that the integrals u_1, u_2 corresponding to the roots $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ involve logarithmic values. And similarly in general the integrals u_1, u_2 corresponding to the roots $-p+\frac{1}{2}$, $p+\frac{1}{2}$ (p any positive integer) involve logarithmic values: this is also right.

The examples exhibit the true character of the theorem, and show I think that it is a less remarkable one than would at first sight appear: in fact in working them out we really ascertain by an actual substitution whether the differential equation can be satisfied by series of powers only, without logarithms. Thus $n=2$ as above, it appears that the equation is satisfied by the series

$$y \;=\; x^{-2}+Bx^{-1}+Cx^{0}+Dx^{1}+Ex^{2}+Fx^{3}+Gx^{4}+Hx^{5}+\cdots$$

where $B=0$, $C=-\frac{1}{3}$, $D=0$, $E=0$, $F=F$, $G=0$, $H=-\frac{6}{7}F$, ... that is by

$$y \;=\; x^{-2}+\tfrac{1}{3}+F(x^{3}-\tfrac{6}{7}x^{5}+\cdots),$$

in other words that we have the two particular integrals $y=x^{-2}+\frac{1}{3}$, and $y=x^{3}-\frac{6}{7}x+\cdots$ belonging to the two roots -2, 3 respectively.

Similarly $n=\frac{1}{2}$, we cannot satisfy the equation by a series

$$y \;=\; x^{-\frac{1}{2}}+Bx^{\frac{1}{2}}+Cx^{\frac{3}{2}}+Dx^{\frac{5}{2}}+\cdots;$$

for in order to satisfy the equation we must have $B=0$, $C=\infty$; there is thus no series of powers $y=x^{-\frac{1}{2}}+Cx^{\frac{3}{2}}+\cdots$ corresponding to the root $-\frac{1}{2}$ (but there is a series $y=x^{\frac{3}{2}}+kx^{\frac{7}{2}}+\cdots$ corresponding to the root $\frac{3}{2}$), and thus the integrals u_1, u_2 corresponding to these roots $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ involve logarithms.

Cambridge, 23 March 1887.

Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Auszug eines an Herrn *L. Kronecker* gerichteten Schreibens.

Kürzlich bin ich durch das Studium Ihrer in dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 22. December 1881 enthaltenen Abhandlung: Zur Theorie der elliptischen Functionen, auf eine Untersuchung gekommen, deren Ergebnisse ich mir erlaube Ihnen mitzutheilen. Das Hauptresultat Ihrer Arbeit, welches ich zuerst durch Herrn *Hermite* kennen lernte, und das meinem an Herrn *Hermite* gerichteten, in den Annales de l'École Normale Supérieure, 3e série, t. II, September 1885, veröffentlichten Briefe zu Grunde liegt, veranlasste mich zu der Bemerkung, dass sich die dort auftretenden, nach den Potenzen einer Grösse q fortschreitenden Doppelreihen dadurch auszeichnen, dass die in dem Exponenten erscheinende Function von zwei Elementen als die Differenz von zwei Quadraten aufgefasst werden kann. Während sonst bei den dem reellen Gebiete angehörenden Verallgemeinerungen der ϑ-Reihen im Exponenten wesentlich positive quadratische Formen von einer steigenden Anzahl von Elementen auftreten, zeigt jenes Beispiel an der entsprechenden Stelle eine indefinite quadratische Form. Dieser Umstand deutet auf Verallgemeinerungen der ϑ-Reihen hin, bei denen die in dem Exponenten vorkommende Form nicht mehr zu den wesentlich positiven gehört. Da nun mit jeder Verallgemeinerung einer ϑ-Reihe ein gewisses vielfaches Integral correspondirt, und da diese vielfachen Integrale einfacherer Natur sind als die bezüglichen Reihen, so werde ich mich gegenwärtig auf die Betrachtung einer Gattung hierher gehöriger Integrale beschränken.

Wenn man mit der Basis der natürlichen Logarithmen e und zwei reellen Variabeln x_0 und x_1 das doppelte Integral

$$(1.)\quad \iint e^{-(x_0^2+x_1^2)}dx_0 dx_1$$

bildet, welches für eine positive Constante c über das durch die Ungleichheit

$$(2.)\qquad 0 < x_0^2+x_1^2 < c^2$$

bestimmte Gebiet auszudehnen ist, so liefert bekanntlich die Einführung von zwei Variabeln r und φ durch die Gleichungen

$$(3.)\qquad x_0 = r\cos\varphi,\quad x_1 = r\sin\varphi$$

die Umformung

$$(4.)\qquad \int_0^c\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\varphi,$$

die sogleich zu der Werthbestimmung

$$(5.)\qquad \pi(1-e^{-c^2})$$

führt. Es möge jetzt das doppelte Integral

$$(6.)\qquad \iint e^{-(x_0^2-x_1^2)}\,dx_0\,dx_1$$

erörtert werden, bei dem die Begrenzung des Gebiets der reellen Variabeln x_0 und x_1 durch die beiden Ungleichheiten

$$(7.)\qquad 0 < x_0-x_1 < b_0,\quad 0 < x_0+x_1 < b_1$$

ausgedrückt ist, wo b_0 und b_1 beliebige positive Constanten bedeuten. Durch die Einführung von zwei neuen Variabeln y_0 und y_1,

$$(8.)\qquad x_0-x_1 = y_0,\quad x_0+x_1 = y_1$$

geht (6.) in die Gestalt

$$(9.)\qquad \tfrac{1}{2}\int_0^{b_0}\int_0^{b_1} e^{-y_0y_1}\,dy_0\,dy_1$$

über. Ersetzt man die Exponentialfunction durch ihre Entwickelung in eine Potenzreihe, und führt die Integration der einzelnen Glieder aus, so ergiebt sich unmittelbar die Darstellung

$$(10.)\qquad \tfrac{1}{2}\left(b_0b_1-\frac{(b_0b_1)^2}{2!2}+\frac{(b_0b_1)^3}{3!3}-\frac{(b_0b_1)^4}{4!4}\pm\cdots\right).$$

Der Werth des Integrals (6.) ist also gleich einer Function des Products b_0b_1, welche durch eine für jeden Werth des Arguments convergirende Potenzreihe ausgedrückt wird. Offenbar kann die vorliegende Function des Arguments b_0b_1 aus der Exponentialfunction durch eine Integration abgeleitet werden, indem man schreibt

$$(11.)\qquad \tfrac{1}{2}\int_0^{b_0b_1}(1-e^{-v})\frac{dv}{v}.$$

Die Integrale (1.) und (6.) lassen sich als Individuen einer Gattung von vielfachen Integralen auffassen, die folgendermassen entstehen. Es sei $f(z)$ eine rationale ganze Function der Variable z mit reellen Coefficienten, und es habe $f(z)$ mit dem Differentialquotienten $\frac{df(z)}{dz}$ keinen gemeinsamen Theiler. Die $(n+1)$ Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$,

$$(12.)\quad z_0,\ z_1,\ \dots\ z_n,$$

welche nach der getroffenen Voraussetzung von einander verschieden sind, mögen aus p reellen Wurzeln, die

$$(13.)\quad z_\lambda = z_0,\ z_1,\ \dots\ z_{p-1}$$

genannt werden, und aus q Paaren von complexen Wurzeln bestehen,

$$(14.)\quad \begin{cases} z_\mu = z_p, & z_{p+1}, \quad \dots \quad z_{p+q-1}, \\ z_{\mu+q} = z_{p+q}, & z_{p+q+1}, \quad \dots \quad z_{p+2q-1}, \end{cases}$$

wo z_μ und $z_{\mu+q}$ zu einander conjugirt sein sollen. Mit einem System von $(n+1)$ reellen Variabeln $x_0,\ x_1,\ \dots\ x_n$ werde nun das Product von $(n+1)$ linearen Functionen

$$(15.)\quad \begin{cases} F(x_0,\ x_1,\ \dots\ x_n) = \prod\limits_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} (x_0 + z_\lambda x_1 + \dots + z_\lambda^n x_n) \\ \times \prod\limits_{\mu=p}^{\mu=p+q-1} (x_0 + z_\mu x_1 + \dots + z_\mu^n x_n)(x_0 + z_{\mu+q} x_1 + \dots + z_{\mu+q}^n x_n) \end{cases}$$

hergestellt, und hierauf das vielfache Integral gebildet

$$(16.)\quad \int\int \dots e^{-F(x_0, x_1, \dots x_n)} dx_0\, dx_1 \dots dx_n.$$

Dasselbe soll über dasjenige Gebiet ausgedehnt werden, das für $p+q$ beliebige positive Grössen

$$(17.)\quad b_0,\ b_1,\ \dots\ b_{p-1},\ c_p,\ \dots\ c_{p+q-1}$$

dem System von Ungleichheiten genügt

$$(18.)\quad \begin{cases} 0 < x_0 + z_\lambda x_1 + \dots + z_\lambda^n x_n < b_\lambda; & (\lambda = 0, 1, \dots p-1), \\ 0 < (x_0 + z_\mu x_1 + \dots + z_\mu^n x_n)(x_0 + z_{\mu+q} x_1 + \dots + z_{\mu+q}^n x_n) < c_\mu^2; \\ (\mu = p, p+1, \dots p+q-1). \end{cases}$$

Führt man statt $x_0,\ x_1,\ \dots\ x_n$ ein neues System von reellen Variabeln $y_0,\ y_1,\ \dots\ y_n$ ein, welche mit den ersteren durch die Gleichungen

$$(19.)\quad \begin{cases} x_0 + z_\lambda x_1 + \dots + z_\lambda^n x_n = y_\lambda, \\ x_0 + z_\mu x_1 + \dots + z_\mu^n x_n = y_\mu + i y_{\mu+q}, \\ x_0 + z_{\mu+q} x_1 + \dots + z_{\mu+q}^n x_n = y_\mu - i y_{\mu+q} \end{cases}$$

verbunden sind, so ist in dem Integral (16.) das Element $dx_0 dx_1 \dots dx_n$ durch das Product aus dem Elemente $dy_0 dy_1 \dots dy_n$ in den Factor

$$(20.) \qquad \frac{(2i)^q}{\mathfrak{D}}$$

zu ersetzen, wo das Differenzenproduct

$$(21.) \qquad \mathfrak{D} = \Pi(z_\alpha - z_\beta),$$

in dem α und β alle Paare verschiedener Zeiger bedeuten, so eingerichtet werden muss, dass der Quotient (20.) positiv ausfällt. Sobald ferner statt der Variabeln y_μ und $y_{\mu+q}$ die Polarvariabeln r_μ und φ_μ benutzt werden, welche mit den ersteren durch die Gleichungen

$$(22.) \qquad y_\mu + iy_{\mu+q} = r_\mu(\cos\varphi_\mu + i\sin\varphi_\mu)$$

zusammenhängen, so verwandelt sich (16.) in das Integral

$$(23.) \qquad \begin{cases} \frac{(2i)^q}{\mathfrak{D}} \int\int \dots e^{-y_0 y_1 \dots y_{p-1} r_p^2 \dots r_{p+q-1}^2} dy_0 dy_1 \dots dy_{p-1} d(r_p^2) \frac{d\varphi_p}{2} \\ \qquad \dots d(r_{p+q-1}^2) \frac{d\varphi_{p+q-1}}{2}, \end{cases}$$

dessen Gebiet durch die Ungleichheiten

$$(24.) \qquad \begin{cases} 0 < y_0 < b_0, & \dots & 0 < y_{p-1} < b_{p-1}, \\ 0 < r_p^2 < c_p^2, & \dots & 0 < r_{p+q-1}^2 < c_{p+q-1}^2 \end{cases}$$

bestimmt ist. Die Integrationen nach den q Variabeln $\varphi_p, \dots \varphi_{p+q-1}$ liefern die Potenz π^q. Um die Integrationen nach den $p+q$ jetzt völlig gleichberechtigten Variabeln $y_0, y_1, \dots y_{p-1}, r_p^2, \dots r_{p+q-1}^2$ auszuführen, genügt es, wieder die Exponentialfunction durch ihre Potenzreihe auszudrücken und jedes Glied zu integriren. Dadurch entsteht eine Function des Products

$$(25.) \qquad N = b_0 b_1 \dots b_{p-1} c_p^2 \dots c_{p+q-1}^2,$$

welche durch die folgende für jeden Werth des Arguments convergirende Potenzreihe dargestellt wird,

$$(26.) \qquad \frac{(2\pi i)^q}{\mathfrak{D}} \left(N - \frac{N^2}{2!2^{p+q-1}} + \frac{N^3}{3!3^{p+q-1}} \mp \cdots\right).$$

Aus der Exponentialfunction kann dieselbe durch $p+q-1$ successive Integrationen abgeleitet werden; denn offenbar ist (26.) gleich dem Ausdruck

$$(27.)\qquad \frac{(2\pi i)^q}{\mathfrak{D}}\int_0^N \frac{dv_{p+q-1}}{v_{p+q-1}}\cdots\int_0^{v_3}\frac{dv_2}{v_2}\int_0^{v_2}(1-e^{-v_1})\frac{dv_1}{v_1}.$$

Die hier erscheinende Function hängt also, sobald dieselbe von dem Factor $\frac{(2\pi i)^q}{\mathfrak{D}}$ befreit wird, nur von dem Product N ab, welches die Rolle einer Norm spielt, und von der Anzahl $p+q$, die gleich *der Summe der Anzahl der reellen und der Anzahl der Paare von complexen conjugirten Wurzeln der Gleichung* $f(z) = 0$ ist. Es bekommt somit diese Gesammtzahl, welche durch *Dirichlets* Untersuchungen über die zerlegbaren arithmetischen Formen einen unvergänglichen Platz in der Arithmetik erhalten hat, eine Bedeutung in der Theorie der gegenwärtig untersuchten vielfachen Integrale. Die Substitution, durch welche das Integral (16.) in (23.) verwandelt wird, stimmt genau mit derjenigen überein, welche ich in art. 4 der Abhandlung: Propositions arithmétiques, tirées de la fonction exponentielle, Journal de *Liouville,* quatrième série, tome II, année 1886, p. 219 angewendet habe, um das dort mit (43.) bezeichnete Integral in die Gestalt (46.) zu bringen.

Die Function (26.) lässt sich unter der besonderen Voraussetzung, dass $p+q = 1$ ist, wie sich in (5.) gezeigt hat, durch die Exponentialfunction selbst ausdrücken, und zwar unterscheidet sich dieser Fall, wie mir scheint, von allen übrigen in einer merkwürdigen Weise. Der hierzu gehörige Ausdruck

$$(28.)\qquad \frac{2\pi i}{\mathfrak{D}}(1-e^{-N})$$

hat nämlich die evidente Eigenschaft, sobald der positiven Grösse N nach und nach immer grössere Werthe beigelegt werden, sich der festen Grenze $\frac{2\pi i}{\mathfrak{D}}$ zu nähern. Wofern dagegen $p+q$ die Einheit übersteigt, so folgt aus der Darstellung (27.), dass der betreffende Werth für wachsende Werthe der Grösse N niemals gegen einen festen Grenzwerth convergiren kann. Damit der Werth des Integrals (16.) für beständig zunehmende Werthe des Products N gegen einen festen Grenzwerth convergire, ist es nothwendig und hinreichend, dass die in (15.) als ein Product linearer Factoren definirte Form binär und wesentlich positiv sei. Für eine Zahl von Variabeln, welche die Zwei übertrifft, geht also jene Eigenschaft auch dann verloren, wenn die gewählte Form die Eigenschaft, wesentlich positiv zu sein, behält.

Als ich die so eben entwickelten Beobachtungen bei einer sich darbietenden Gelegenheit Herrn *Hermite* mündlich auseinandersetzte, machte

mich derselbe darauf aufmerksam, dass es nützlich sein kann, in dem obigen Integral (16.) unter Beibehaltung der Begrenzung zu der Function $F(x_0, x_1, \dots x_n)$ einen positiven Factor G hinzuzufügen, für mehrere mit derselben Function gebildete Ausdrücke diesem Factor eine Reihe verschiedener Werthe $G, G', G'', \dots$ beizulegen, die hervorgehenden Gleichungen beziehungsweise mit willkürlichen Constanten $A, A', A'', \dots$ zu multipliciren, und hierauf zu addiren, so dass unter dem Zeichen der mehrfachen Integration eine durch die Summation entstandene eindeutige Function erscheint. Man überzeugt sich leicht, dass, wenn mit (16.) die bezeichnete Aenderung vorgenommen wird, zu dem Werthe des Integrals der Factor $\frac{1}{G}$ hinzukommt, während der Werth N durch GN zu ersetzen ist; somit ergiebt sich die allgemeinere Relation

$$\int\int \dots (A e^{-GF(x_0, x_1, \dots x_n)} + A' e^{-G'F(x_0, x_1, \dots x_n)} + \cdots) dx_0 dx_1 \dots dx_n$$
$$= \frac{(2\pi i)^q}{\mathfrak{D}} \frac{A}{G} \Big(GN - \frac{(GN)^2}{2!2^{p+q-1}} + \frac{(GN)^3}{3!3^{p+q-1}} \mp \cdots \Big)$$
$$+ \frac{(2\pi i)^q}{\mathfrak{D}} \frac{A'}{G'} \Big(G'N - \frac{(G'N)^2}{2!2^{p+q-1}} + \frac{(G'N)^3}{3!3^{p+q-1}} \mp \cdots \Big) + \cdots.$$

Bei demselben Anlass war zwischen Herrn *Hermite* und mir von Ihrer vorhin angeführten Abhandlung die Rede, und Herr *Hermite* machte mir in Betreff derselben eine Mittheilung, welche ich mich freue, wie die frühere Bemerkung, mit seiner Genehmigung hier wiedergeben zu dürfen:

„Die nach den steigenden Potenzen der Grösse q fortschreitenden Entwickelungen der 16 Verbindungen $\frac{2K}{\pi} \frac{H'(0)\Theta(x+a)}{\Theta(x)H(a)}$, u. s. f., welche ich in den Annales de l'École Normale Supérieure gegeben habe, enthalten einen Zeichenfehler, der die erste Gruppe von acht Formeln betrifft. Es sind Summen und nicht Differenzen von ganzen Vielfachen der Argumente a und x, welche unter den Zeichen der trigonometrischen Functionen auftreten; diese Ausdrücke unterscheiden sich also nicht von denen der zweiten Gruppe hinsichtlich der nach den Potenzen von q geordneten Entwickelungen, wie angenommen war. Ich werde jetzt auf diesen Gegenstand zurückkommen, um richtige Formeln zu erhalten, und um unter einem anderen Gesichtspunkte einen Unterschied nachzuweisen.

Zunächst bemerke ich, dass die Relationen, welche zu der ersten Gruppe vereinigt sind, aus den beiden folgenden hervorgehen:

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{\Theta(x)H(a)} = \Sigma\frac{e^{\frac{ni\pi x}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(a+niK')} \qquad (n=0,\ \pm2,\ \pm4,\ \ldots),$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)} = \Sigma\frac{e^{\frac{mi\pi x}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(a+miK')} \qquad (m=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \ldots),$$

indem a und x mit $a+K$ und $x+K$ vertauscht wird.

Man erhält die Entwickelungen nach den Potenzen von q, indem man in der Gleichung

$$\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = -\frac{2ie^{\frac{ix}{2}}}{1-e^{ix}}$$

den Werth

$$x = \frac{\pi}{K}(a+siK')$$

einsetzt; hier bedeutet s eine positive Grösse, welche nach einander gleich n und gleich m gemacht wird. Man erhält also

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(a+siK')} = -\frac{2iq^{\frac{s}{2}}e^{\frac{i\pi a}{2K}}}{1-q^se^{\frac{i\pi a}{K}}}$$

und folglich die Darstellung durch die Reihe

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(a+siK')} = -2i\Sigma q^{\frac{\mu s}{2}}e^{\frac{\mu i\pi a}{2K}} \qquad (\mu=1,\ 3,\ 5,\ \ldots).$$

Hiernach ergiebt sich, indem a in $-a$ verwandelt wird,

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(a-siK')} = 2i\Sigma q^{\frac{\mu s}{2}}e^{-\frac{\mu i\pi a}{2K}}.$$

Es sei jetzt $s=n$; nachdem man in der ersten Relation das Glied $\frac{1}{\sin\frac{\pi a}{2K}}$ für sich genommen, und diejenigen Glieder zusammengefügt hat, welche den gleichen und dem Zeichen nach entgegengesetzten Werthen von n entsprechen, gelangt man zu der gesuchten Entwickelung

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{\Theta(x)H(a)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi a}{2K}}+4\Sigma q^{\frac{\mu n}{2}}\sin\frac{\pi}{2K}(\mu a+nx)$$

$$(\mu=1,\ 3,\ 5,\ \ldots;\ n=2,\ 4,\ 6,\ \ldots),$$

Ebenso giebt die zweite Relation, indem man $s=m$ setzt,

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)} = 4\Sigma q^{\frac{\mu m}{2}}\sin\frac{\pi}{2K}(\mu a+mx) \qquad (\mu=1,3,5,\ldots;\ m=1,3,5,\ldots).$$

Ohne mich mit dem Hinschreiben der andern Gleichungen aufzuhalten, welche aus den so eben gefundenen entstehen, indem a und x in $a+K$ und $x+K$ verwandelt werden, gehe ich sogleich zu den Functionen über, welche die zweite Gruppe bilden.

Die bezüglichen Relationen lassen sich aus den beiden folgenden ableiten

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)H(x+a)}{H(x)H(a)} = \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2K}+\Sigma e^{\frac{ni\pi x}{2K}}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(a+niK')+\varepsilon i\right]$$
$$(n=0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \ldots),$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2K}}+\Sigma e^{\frac{mi\pi x}{2K}}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(a+miK')+\varepsilon i\right]$$
$$(m=\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots);$$

die Grösse ε soll für $n=0$ gleich Null sein, und gleich $+1$ oder -1, je nachdem n und m positiv oder negativ sind.

Ich benutze jetzt die folgenden Gleichungen, in denen s wie vorhin eine positive Grösse bedeutet,

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(a+siK') = -i\frac{1+q^s e^{\frac{i\pi a}{K}}}{1-q^s e^{\frac{i\pi a}{K}}},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(a-siK') = i\frac{1+q^s e^{-\frac{i\pi a}{K}}}{1-q^s e^{-\frac{i\pi a}{K}}}.$$

Hieraus folgen, sobald nach den wachsenden Potenzen von q entwickelt wird, die beiden Reihen

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(a+siK') = -i(1+2q^s e^{\frac{i\pi a}{K}}+2q^{2s}e^{\frac{2i\pi a}{K}}+\cdots),$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(a-siK') = i(1+2q^s e^{-\frac{i\pi a}{K}}+2q^{2s}e^{-\frac{2i\pi a}{K}}+\cdots),$$

und daher auch diese

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(a+siK')+i = -2i\Sigma q^{\frac{\nu s}{2}}e^{\frac{\nu i\pi a}{2K}},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(a-siK')-i = 2i\Sigma q^{\frac{\nu s}{2}}e^{-\frac{\nu i\pi a}{2K}} \qquad (\nu=2,4,6,\ldots).$$

Indem man nach einander $s = n$ und $s = m$ nimmt, entstehen aus den beiden vorliegenden Gleichungen die Relationen

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)H(x+a)}{H(x)H(a)} = \cot\!\operatorname{g}\frac{\pi x}{2K} + \cot\!\operatorname{g}\frac{\pi a}{2K} + 4\Sigma q^{\frac{\nu n}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(\nu a + n x),$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2K}} + 4\Sigma q^{\frac{\nu m}{2}} \sin\frac{\pi}{2K}(\nu a + m x)$$

$$(\nu,\ n = 2, 4, 6, \ldots;\ m = 1, 3, 5, \ldots).$$

Aus diesen Formeln erhält man durch die Verwandlung von a und x in $a+K$ und $x+K$ alle Formeln der zweiten Gruppe, und in beiden Fällen sind es immer die Summen der Vielfachen der beiden Argumente, welche unter den Zeichen sinus und cosinus vorkommen. Man kann aber die verschiedene Natur der beiden Arten von Functionen, deren Entwickelungen nach den Potenzen von q eine ähnliche analytische Form zeigen, folgendermassen zur Evidenz bringen. Ich nehme die ursprünglichen Darstellungen wieder auf

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2K}} + \Sigma e^{\frac{m i\pi x}{2K}}\left[\cot\!\operatorname{g}\frac{\pi}{2K}(a+miK') + \varepsilon i\right],$$

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)} = \Sigma\frac{e^{\frac{m i\pi x}{2K}}}{\sin\frac{\pi}{2K}(a+miK')} \qquad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),$$

und werde dieselben in Bezug auf die Grösse a zwischen den Grenzen $a = 0$ und $a = 2K$ integriren. Zu diesem Zweck möge in Bezug auf die früher angewendeten Reihen

$$\cot\!\operatorname{g}\frac{\pi}{2K}(a+miK') + i = -2i\Sigma q^{\frac{\nu s}{2}} e^{\frac{\nu i\pi a}{2K}},$$

$$\cot\!\operatorname{g}\frac{\pi}{2K}(a-miK') - i = \quad 2i\Sigma q^{\frac{\nu s}{2}} e^{-\frac{\nu i\pi a}{2K}}$$

bemerkt werden, dass, da die ganze Zahl ν gerade und von Null verschieden ist, die über die rechten Seiten von $a = 0$ bis $a = 2K$ genommenen Integrale verschwinden. Demnach ergiebt sich das höchst einfache Resultat

$$\int_0^{2K}\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)}\,da = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi x}{2K}},$$

oder auch

$$\int_0^{2K} \frac{\Theta(x+a)}{\Theta(a)} da = \frac{\pi}{H'(0)} \frac{H(x)}{\sin\frac{\pi x}{2K}}.$$

Für die zweite Relation kommen die Reihen

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(a+miK')} = -2i\Sigma q^{\frac{\mu m}{2}} e^{\frac{\mu i \pi a}{2K}},$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2K}(a-miK')} = 2i\Sigma q^{\frac{\mu m}{2}} e^{-\frac{\mu i \pi a}{2K}}$$

zur Anwendung. Bei der Integration liefern beide denselben Werth, nämlich

$$\frac{8K}{\pi}\left(q^{\frac{m}{2}} + \frac{q^{\frac{3m}{2}}}{3} + \frac{q^{\frac{5m}{2}}}{5} + \cdots\right),$$

das heisst $\frac{4K}{\pi}\log\frac{1+q^{\frac{m}{2}}}{1-q^{\frac{m}{2}}}$. Es findet sich also der folgende Ausdruck, der von dem vorhergehenden durchaus verschieden ist,

$$\int_0^{2K} \frac{H'(0)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)} da = 2\Sigma(e^{\frac{mi\pi x}{2K}} + e^{-\frac{mi\pi x}{2K}})\log\frac{1+q^{\frac{m}{2}}}{1-q^{\frac{m}{2}}}$$

oder

$$\int_0^{2K} \frac{H'(0)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)} da = 4\Sigma\cos\frac{m\pi x}{2K}\log\frac{1+q^{\frac{m}{2}}}{1-q^{\frac{m}{2}}} \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots).$$

Nun werde ich noch das bestimmte Integral aufsuchen, das über dieselbe Function zwischen den Grenzen $a = -K$ und $a = K$ genommen wird, und gehe von den Ausdrücken aus

$$\int_{-K}^{+K} \frac{da}{\sin\frac{\pi}{2K}(a+miK')} = -\frac{8iK}{\pi}\Sigma\frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} q^{\frac{\mu m}{2}}}{\mu}$$

$$= -\frac{8iK}{\pi}\operatorname{arc\,tg} q^{\frac{m}{2}},$$

und

$$\int_{-K}^{+K} \frac{da}{\sin\frac{\pi}{2K}(a-miK')} = \frac{8iK}{\pi}\operatorname{arc\,tg} q^{\frac{m}{2}}.$$

Hiernach ergiebt sich das neue Resultat:

$$\int_{-K}^{+K} \frac{H'(0)H(x+a)}{\Theta(x)\Theta(a)}da = 8\Sigma \sin\frac{mx}{2K}\operatorname{arctg} q^{\frac{m}{2}} \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots).$$

Ich werde die beiden letzten Resultate durch die Betrachtung eines besonderen Falles verificiren.

Es werde in dem ersten bestimmten Integral $x = 0$ genommen, dann hat man

$$\frac{H'(0)H(a)}{\Theta(0)\Theta(a)} = k \operatorname{sn} a$$

und die Formel

$$\int k \operatorname{sn} a\, da = \log(\operatorname{dn} a - k \operatorname{cn} a)$$

giebt durch Einsetzung der Grenzen $a = 0$ und $a = 2K$

$$\log\left(\frac{1+k}{1-k}\right) = 4\Sigma \log\frac{1+q^{\frac{m}{2}}}{1-q^{\frac{m}{2}}}.$$

Sobald man q in q^2 verwandelt, wird die Grösse $\frac{1+k}{1-k}$ gleich $\frac{1}{k'}$, und durch den Uebergang zu den Logarithmen erhält man die bekannte Formel

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}.$$

Ferner sei in dem zweiten Integral $x = K$, so kommt

$$\frac{H'(0)H(a+K)}{\Theta(K)\Theta(a)} = k \operatorname{cn} a,$$

und da die Relation

$$\int k \operatorname{cn} a\, da = \frac{1}{i}\log(\operatorname{dn} a + ik \operatorname{sn} a)$$

das Resultat liefert

$$\int_{-K}^{K} k \operatorname{cn} a\, da = \frac{1}{i}\log\left(\frac{k'+ik}{k'-ik}\right) = 2 \arcsin k,$$

so gelangt man zu der eleganten von *Jacobi* entdeckten Formel

$$\arcsin k = 4(\operatorname{arctg} q^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arctg} q^{\frac{3}{2}} + \operatorname{arctg} q^{\frac{5}{2}} - \cdots).“$$

Zu dieser Mittheilung hat Herr *Hermite* später eine Ergänzung hinzugefügt, welche ich mit seiner Zustimmung gleichfalls hier folgen lasse.

„Ich habe die Bemerkung gemacht, dass, wofern die Function $\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)}$ nach der Variable a nicht zwischen den Grenzen 0 und $2K$, sondern zwischen den Grenzen 0 und K integrirt wird, man das neue Integral erhält

$$\int_0^K \frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)}\,da = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi x}{2K}} + 2\Sigma\cos\frac{m\pi x}{2K}\log\frac{1+q^m}{1-q^m} \qquad (m=1,3,5,\ldots).$$

Ferner finde ich bei einer Integration derselben Function zwischen den Grenzen $-\frac{K}{2}$ und $\frac{K}{2}$

$$\int_{-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} \frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)}\,da = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi x}{2K}} + 2\Sigma\sin\frac{m\pi x}{2K}\operatorname{arctg} q^m \qquad (m=1,3,5,\ldots).$$

Man muss also die Functionen der zweiten Gruppe zwischen Grenzen, die um K differiren, dagegen die Functionen der ersten Gruppe zwischen Grenzen, die um $2K$ verschieden sind, integriren, um zu ähnlichen analytischen Ausdrücken zu gelangen.

Die erste der beiden Formeln gestattet eine leichte Verification für den Fall, dass die Grösse x unendlich klein wird. Sobald der Ausdruck $\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi x}{2K}}$ unter das Integralzeichen gebracht wird, nimmt die Gleichung die Gestalt an

$$\int_0^K \left[\frac{H'(0)\Theta(x+a)}{H(x)\Theta(a)} - \frac{\pi}{2K\sin\frac{\pi x}{2K}}\right]da = 2\Sigma\cos\frac{m\pi x}{2K}\log\frac{1+q^m}{1-q^m}.$$

Nun hat man

$$\frac{H'(0)}{H(x)} = \frac{1}{x} + \alpha x + \cdots$$
$$\frac{\pi}{2K\sin\frac{\pi x}{2K}} = \frac{1}{x} + \beta x + \cdots.$$

Bei der Vernachlässigung von x wird daher die Grösse unter dem Integralzeichen

$$\frac{\Theta(x+a)}{x\,\Theta(a)} - \frac{1}{x} = \frac{\Theta(x+a)-\Theta(a)}{x\,\Theta(a)}.$$

Für einen unendlich kleinen Werth von x convergirt dieser Ausdruck gegen

den Grenzwerth $\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$, und man hat

$$\int_0^K \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}\, da = \log\frac{\Theta(K)}{\Theta(0)} = -\log\sqrt{k'},$$

es wird also

$$\log\sqrt{k'} = -2\Sigma\log\frac{1+q^m}{1-q^m},$$

und in Folge dessen ergiebt sich

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}.\text{“}$$

Bonn, im December 1886.

Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt.

(Von Herrn *F. Schottky* in Zürich.)

Am Schluss der Arbeit: „Ueber conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen" *) hatte ich die Aufgabe behandelt, diejenigen Functionen einer Variabeln x zu bestimmen, welche auf $\varrho+1$ gegebenen Kreisen reelle Werthe annehmen und in dem Gebiet, das durch diese Kreise begrenzt wird, den Charakter eindeutiger rationaler Functionen haben. Alle diese Functionen sind durch algebraische Gleichungen unter einander verbunden, und es ist möglich, zwei derselben p, q so auszuwählen, dass alle übrigen rational durch p und q dargestellt werden können; x selbst, eine unendlich-vieldeutige transcendente Function von p und q, genügt einer Differentialgleichung dritter Ordnung.

Die Kreise seien K_0, K_1, ... K_ϱ. Aus der Bedingung, dass $F(x)$ längs K_0 reelle Werthe besitzt, folgt, dass $F(x)$ conjugirte Werthe hat in zwei Punkten x, x', die einander in Bezug auf den Kreis K_0 vermöge der Transformation der reciproken Radien entsprechen. Beschränkt man nun x' auf einen der Kreise K_α ($\alpha = 1, 2, \ldots \varrho$), so wird x beschränkt auf einen Kreis $K_{\alpha'}$, der innerhalb K_0 liegt. Nun ist $F(x')$ reell, $F(x)$ und $F(x')$ haben conjugirte Werthe; folglich ist $F(x') = F(x)$. Ferner ist x mit dem zu x' conjugirten Werthe y' durch eine bilineare Gleichung verbunden — die Gleichung für die Transformation der reciproken Radien. Andererseits ist aber x' mit y' durch eine ebensolche Gleichung verbunden, da x' auf den Kreis K_α beschränkt ist. Dadurch ist eine linear-gebrochene Function $x' = f_\alpha(x)$ definirt, die den Kreis $K_{\alpha'}$ in K_α überführt, und die Function $F(x)$ besitzt die Eigenschaft, durch die ϱ verschiedenen Substitutionen $x' = f_\alpha(x)$ für x nicht geändert zu werden.

*) Dieses Journal Bd. 83, S. 300—351.

Herr *Poincaré* hat in seinen Untersuchungen über die eindeutigen Functionen mit linearen Substitutionen an Stelle des Abbildungsproblems ein allgemeineres gesetzt. Dadurch sind wir hier im Stande, Functionen zu betrachten, die im Wesentlichen die gleichen Eigenschaften haben, wie die eben erwähnten, sich aber dadurch unterscheiden, dass constante Parameter, die beim Abbildungsproblem nothwendig als reelle Grössen aufgefasst werden müssen, hier auch complexe Werthe haben können. Für diese Functionen sollen hier einige Entwickelungen gegeben werden. Namentlich wird eine Function $E(x, \xi)$ aufgestellt, der für $\varrho = 1$, wenn man 0 und ∞ als Doppelpunkte der Substitution wählt, das bekannte Product

$$(x-\xi)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\xi q^n)(\xi-x q^n)}{(x-x q^n)(\xi-\xi q^n)}$$

entspricht. Für $\varrho > 1$ besteht allerdings ein wesentlicher Unterschied zwischen dieser und den Thetafunctionen; indem zwar $E(x, \xi) = 0$ wird nur für einen Werth $x = \xi$ und die congruenten, aber an einer Stelle unendlich gross (dagegen nicht an den congruenten). Es hat dies einen Einfluss auf die Eigenschaften der Function, der nicht dadurch gehoben wird, dass man diese Stelle mit einer wesentlich singulären zusammenfallen lässt. Neben diesen treten auch die Thetafunctionen auf, als solche, die für ϱ Punktgruppen verschwinden; ein Productausdruck für diese freilich hat sich hier nicht ergeben. — Diejenige Function, welche der mit der Aufgabe zusammenhängenden linearen Differentialgleichung genügt, lässt sich auffassen als Quotient einer Thetafunction durch $E(x, \xi)$.

§ 1.

Wir nehmen *) in der Ebene x 2ϱ Kreise an, deren Flächen sich weder decken noch berühren. Diese Linien ordnen wir paarweise einander zu:

$$K_1, K_{1'};\quad K_2, K_{2'}, \ldots K_\varrho, K_{\varrho'}.$$

Das unendlich grosse Gebiet der Ebene, welches nach Ausschluss der 2ϱ Kreisflächen übrig bleibt, nennen wir Nullgebiet oder Nullfläche; und zwar möge bei jedem der ϱ Kreispaare, welche die Begrenzung der Nullfläche bilden, der eine, gleichgültig welcher, noch zu diesem Gebiet hinzu gerechnet werden, der andere nicht. Im Zusammenhang mit dieser

*) Vgl. *H. Poincaré,* Mémoire sur les groupes kleinéens, § 7, Acta math. Bd. 3, S. 75—76.

Figur mögen ferner 2ϱ lineare gebrochene Functionen

$$f_1(x),\ f_{1'}(x);\quad f_2(x),\ f_{2'}(x),\ \ldots\ f_\varrho(x),\ f_{\varrho'}(x)$$

eingeführt werden, die folgenden Bedingungen genügen: $f_1(x)$ sei so gewählt, dass jedem Punkte x der Linie $K_{1'}$ ein Punkt $f_1(x)$ der Linie K_1 entspricht, dagegen jedem x ausserhalb $K_{1'}$ ein $f_1(x)$ innerhalb K_1. — Diese Art der Transformation eines Kreises in einen andern nennen wir negativ; bei positiver würde dem Innern des einen Kreises auch wieder das Innere des andern entsprechen. — Es wird hierdurch $f_1(x)$ nur bestimmt bis auf drei reelle Constanten, die willkürlich angenommen werden können.

Unter $f_{1'}(x)$ verstehen wir dann die zu $f_1(x)$ inverse Function; sodass gleichzeitig

$$y = f_1(x) \quad \text{und} \quad x = f_{1'}(y)$$

ist. $f_{1'}$ führt dann, ebenfalls negativ, den Kreis K_1 in $K_{1'}$ über.

In der gleichen Weise denken wir uns die $2\varrho-2$ übrigen Functionen gewählt. Ist dann α einer der 2ϱ Indices $1, 2, \ldots \varrho, 1', 2', \ldots \varrho'$, so existirt in derselben Reihe ein entgegengesetzter α', sodass f_α, $f_{\alpha'}$ inverse Functionen sind. Nimmt man x auf dem Kreise $K_{\alpha'}$ an, so ist $f_\alpha(x)$ ein Punkt des Kreises K_α. Ist dagegen x ein Punkt ausserhalb $K_{\alpha'}$, so liegt $f_\alpha(x)$ im Innern des Kreises K_α. — Ist $\alpha = 1'$, so ist natürlich $\alpha' = 1$.

Alle Werthe, die man aus einem gegebenen x, durch diese 2ϱ Substitutionen und deren Wiederholung erhält, sollen congruent genannt und in folgender Weise bezeichnet werden: der Werth $f_\mu(x)$ durch x_μ, $f_\lambda(x_\mu)$ mit $x_{\lambda\mu}$, $f_\varkappa(x_{\lambda\mu})$ mit $x_{\varkappa\lambda\mu}$ u. s. f. Jeder zu x congruente Werth wird demnach bezeichnet durch eine Combination m der 2ϱ Elemente

$$1,\ 2,\ \ldots\ \varrho,\qquad 1',\ 2',\ \ldots\ \varrho'.$$

Auszuschliessen sind hierbei solche Combinationen, in denen zwei unmittelbar auf einander folgende Elemente entgegengesetzt sind, d. h. inverse Substitutionen bezeichnen. Denn offenbar kann $x_{\lambda\lambda'}$ durch x, $x_{\varkappa\lambda\lambda'}$ durch $x_\varkappa$ ersetzt werden, u. s. f.; $f_0(x)$ möge x selbst bezeichnen.

Zu jedem Index m giebt es einen entgegengesetzten m', sodass gleichzeitig

$$f_m(x) = y,\quad f_{m'}(y) = x$$

ist, und zu je zweien m, n einen dritten, p, sodass, wenn

$$f_n(x) = y,\quad f_m(y) = z,$$

gleichzeitig

$$f_p(x) = z$$

ist. Dieser möge mit mn bezeichnet werden, sodass allgemein $f_m(x_n) = x_{mn}$ ist.

Einen Index m, der aus h Elementen besteht, nennen wir einen Index h^{ter} Stufe. Zu einem Index $\bar{m}$ erhält man den entgegengesetzten, indem man jedes Element durch das entgegengesetzte ersetzt und die Reihenfolge umkehrt. Entgegengesetzte Indices sind also von gleicher Stufe. Ist ferner m von der h^{ten}, n von der k^{ten} Stufe, so wird mn von der $(h+k)^{\text{ten}}$ Stufe sein, wenn das letzte Element von m und das erste von n nicht entgegengesetzt sind. Tritt aber dieser letztere Fall ein, so erniedrigt sich die Stufe von mn um eine gerade Zahl.

Fügt man zu einem Index m der h^{ten} Stufe der Reihe nach alle 2ϱ Elemente hinzu, so erhält man 2ϱ neue Indices $m\varkappa$, von denen einer von der $(h-1)^{\text{ten}}$ Stufe, die übrigen von der $(h+1)^{\text{ten}}$ Stufe sind. Wir wollen diese die zu m benachbarten Indices nennen, und zwar denjenigen, welcher von niedrigerer Stufe ist, als den m vorangehenden, die übrigen $2\varrho-1$ als die auf m folgenden bezeichnen. So ist zunächst leicht zu erkennen, dass die Anzahl der Indices h^{ter} Stufe $= 2\varrho(2\varrho-1)^{h-1}$ ist.

Beschränkt man x auf die Nullfläche, so wird $x_m = f_m(x)$ beschränkt auf eine Fläche, die der Nullfläche conform ist und gleichfalls von 2ϱ Kreisen begrenzt wird. Diese nennen wir die Fläche (m). Nehmen wir zunächst für m einen Index α der Reihe $1, 1', \ldots \varrho, \varrho'$. Liegt x im Innern des Nullgebiets, also ausserhalb $K_{\alpha'}$, so liegt x_α innerhalb K_α; und liegt x auf der Grenzlinie $K_{\alpha'}$, so liegt x_α auf dem Kreise K_α. Daraus folgt: das Gebiet (α) wird umschlossen von dem Kreise K_α; letzterer ist die gemeinsame Grenze der Gebiete (0) und (α). Der Kreis selbst gehört entweder dem einen oder dem andern Gebiete an, aber nicht beiden zugleich. Denn gehört K_α noch zum Nullgebiet, so gehört der Kreis $K_{\alpha'}$ nicht dazu, also auch K_α nicht zum Gebiete (α); gehört aber K_α nicht zum Nullgebiet, so gehört $K_{\alpha'}$ dazu, folglich K_α zum Gebiete (α).

Ist nun m ein beliebiger Index, so gehen durch die gleiche Transformation f_m die Gebiete (0) und (α) über in (m) und $(m\alpha)$; benachbarten Indices entsprechen also auch benachbarte Gebiete. Macht man die Voraussetzung, dass (m) umschlossen werde von demjenigen Gebiete, welches dem vorangehenden Index entspricht, so müssen, da es nur ein umschliessendes Gebiet geben kann, die $2\varrho-1$ übrigen Gebiete $(m\varkappa)$ selbst von (m) um-

schlossen werden. Wenn also alle Flächen (m) h^{ter} Stufe umschlossen werden von Flächen $(h-1)^{\text{ter}}$, so werden alle Flächen $(h+1)^{\text{ter}}$ Stufe umschlossen von Flächen h^{ter} Stufe. Alle 2ϱ Flächen erster Stufe werden umschlossen vom Nullgebiet; folglich wird jede Fläche h^{ter} Stufe umschlossen von derjenigen Fläche, die dem vorangehenden Index entspricht. Z. B. $(\alpha\beta\gamma)$ von $(\alpha\beta)$, $(\alpha\beta)$ von (α), dieses Gebiet von der Nullfläche.

Den Kreis, der das Gebiet (m) umschliesst, bezeichnen wir allgemein mit K_m. Vom Gebiete $(\alpha\beta\gamma)$ gelangt man durch den Kreis $K_{\alpha\beta\gamma}$ nach $(\alpha\beta)$, von hier durch $K_{\alpha\beta}$ nach (α), von (α) durch K_α in die Nullfläche. Allgemein kann man aus einer Fläche h^{ter} Stufe nach der Nullfläche gelangen auf einer Linie, die nicht mehr als h Kreise trifft. Das erste Element eines Index m bezeichnet denjenigen Grundkreis, innerhalb dessen K_m liegt.

Jeder Kreis umschliesst nur Kreise höherer Stufe. Fasst man daher die Gesammtheit aller Kreise h^{ter} Stufe ins Auge, so liegt jeder ausserhalb des andern. Diese Kreise begrenzen also ein zusammenhängendes Gebiet G_h, welches alle Flächen (m) von niedrigerer Stufe als h und nur diese enthält. Von jedem Punkte von G_h kann man nach der Nullfläche gelangen, indem man höchstens $h-1$ Kreise K_m durchschneidet. Also ist es immer möglich, zwei beliebige Punkte ξ, η von G_h durch eine Linie zu verbinden, die nicht mehr als $2h-2$ Kreise trifft.

§ 2.

Es lässt sich folgender Satz beweisen:

Wenn es möglich ist, die Nullfläche durch eine Anzahl neuer Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2, \dots \mathfrak{K}_n$, die sich weder gegenseitig noch mit den 2ϱ gegebenen schneiden, in eine Reihe nur dreifach zusammenhängender Gebiete zu zerlegen, so ist die Summe der Radien aller Kreise K_m eine endliche *).

Um das Wesen dieser Voraussetzung deutlich zu machen, betrachten wir zwei besondere Fälle.

I. Es werde eine Reihe von mindestens vier Kreisen angenommen, deren Flächen sich weder decken noch berühren, und deren Mittelpunkte

*) Die allgemein gültigen Convergenzbetrachtungen von Herrn *Poincaré* sind von einer solchen Beschränkung frei; sie beweisen aber nur, dass die Kreisflächen, also die Quadrate der Radien, eine endliche Summe haben. Vgl. *H. Poincaré,* Mémoire sur les fonctions *Fuchs*iennes, § 1, Acta math. Bd. 2, S. 193.

auf einer Geraden liegen. Der Reihenfolge der Mittelpunkte auf der Geraden entspreche die Bezeichnung K_1, K_2, ... K_r. Dann lässt sich sicher ein Kreis $\bar{K}_1$ construiren, dessen Mittelpunkt auf der gleichen Geraden liegt und der K_1, K_2 umschliesst, K_3 und die folgenden ausschliesst; ferner in derselben Weise ein zweiter $\bar{K}_2$, der $\bar{K}_1$ und K_3 umschliesst, die auf K_3 folgenden ausschliesst u. s. f. So kann man fortfahren bis zu einem letzten Hülfskreise $\bar{K}_{r-3}$, ausserhalb dessen nur noch K_{r-1} und K_r liegen. Auf diese Weise erhält man eine Reihe von Hülfskreisen, deren jeder von dem folgenden umschlossen wird. Zwischen zwei auf einander folgenden liegt immer nur einer der r gegebenen Kreise, dagegen schliesst der innerste zwei Kreise K_1, K_2 ein, der äusserste zwei, K_{r-1} und K_r, aus. Es wird also vermöge der Hülfskreise $\bar{K}$ das durch K_1, ... K_r begrenzte Gebiet zerlegt in $r-2$ Theilgebiete, deren jedes nur von drei Kreisen begrenzt ist; eins davon, das letzte, ist natürlich unendlich gross.

II. Wir nehmen eine endliche Anzahl von Punkten, und zwar wieder mindestens vier, beliebig in der Ebene an. Es ist dann sicher möglich, einen Kreis $\bar{K}_1$ zu construiren, der durch keinen der gegebenen Punkte hindurchgeht und zwei derselben umschliesst, die übrigen ausschliesst. Dann ist es ebenfalls möglich, einen zweiten Kreis $\bar{K}_2$ zu ziehen, der $\bar{K}_1$ und einen dritten Punkt umschliesst, die übrigen ausschliesst; u. s. f. Es lässt sich also wieder eine Folge von Kreisen construiren, sodass jeder von dem folgenden umschlossen wird, zwischen je zwei auf einander folgenden nur ein Punkt liegt, und der innerste Kreis zwei Punkte umschliesst, der äusserste zwei ausschliesst. Ersetzt man jetzt die gegebenen Punkte durch Kreise mit hinlänglich kleinen Radien, so bekommt man genau wie vorhin eine Folge dreifach zusammenhängender Gebiete; die Mittelpunkte von K_1, K_2, ... K_r sind aber willkürlich angenommen.

Man sieht demnach, dass die Voraussetzung sich erfüllen lässt, wenn die Mittelpunkte der Kreise K_1, $K_{1'}$, ... K_ϱ, $K_{\varrho'}$ auf einer Geraden liegen. Liegen die Mittelpunkte nicht auf einer Geraden, so kann unter Umständen, damit die Construction ausführbar wird, eine neue Ungleichheitsbedingung nöthig werden, welche die Grösse der Radien beschränkt. Allerdings giebt es Fälle, in denen die Construction der Hülfskreise nicht ausgeführt werden kann. Für diese muss ich die Frage, ob der Satz gilt, unentschieden lassen.

Wir gehen jetzt zum Beweise über. Nimmt man die Voraussetzung

als erfüllt an und denkt sich nun auch die entsprechenden Kreise in jedem der Gebiete (m), so wird hierdurch die ganze Ebene, soweit sie vorher bedeckt war durch die Flächen (m), zerlegt in eine Schaar dreifach zusammenhängender Flächen, deren jede einem Theilgebiet der Nullfläche vermöge einer linearen Substitution conform ist. Mit Ausnahme einer einzigen, die unendlich gross ist, wird jede von einem Kreise umschlossen und umschliesst selbst zwei andere Kreise. — Nun gilt der Satz:

Sind R, r die Radien zweier Kreise in der Ebene x, e die Entfernung ihrer Mittelpunkte, so ist

$$\frac{(R^2+r^2-e^2)^2}{4R^2r^2}-1 = K$$

ein Ausdruck, der durch lineare Transformation von x seine Bedeutung nicht ändert*).

K ist 0, wenn die Kreise sich berühren, negativ, wenn sie sich schneiden, in jedem anderen Falle positiv, gleichviel ob der eine Kreis im Innern des anderen liegt oder beide ausserhalb einander.

Diesen Ausdruck K denken wir uns aufgestellt für je zwei der drei Kreise, welche irgend eins der n Theilgebiete der Nullfläche begrenzen. So bekommen wir $3n$ charakteristische Constanten, deren jede einen positiven Werth hat. Die kleinste derselben sei $\varkappa$. Wenn wir nun irgend eins der unendlich vielen dreifach zusammenhängenden Gebiete betrachten, und für zwei dasselbe begrenzende Kreise den Ausdruck K bilden, so muss dieser einer der $3n$ charakteristischen Constanten gleich, also jedenfalls $\geqq \varkappa$ sein.

Es sei R der Radius des umschliessenden Kreises, r der eines der

*) Dies ist offenbar richtig, wenn die Kreise sich schneiden; denn dann ist $K = -\sin^2\varphi$, und φ der Winkel, unter dem beide Kreise zusammentreffen. Dieser bleibt bekanntlich bei linearer Abbildung ungeändert. Denkt man sich im allgemeinen Falle die Gleichungen der beiden Kreise aufgestellt in rechtwinkligen Coordinaten, so ist K sicher eine rationale Function der Coefficienten dieser Gleichungen:

$$K = R(c, c', \ldots).$$

Durch eine lineare Substitution erhält man zwei andere Kreise, deren Coefficienten rational sind in c, c', etc. und den Coordinaten γ, γ', etc. der Substitutionscoefficienten. Der Ausdruck K, gebildet für diese beiden neuen Kreise, den wir mit $\bar{K}$ bezeichnen wollen, kann also nur rational abhängen von den Grössen c, c', etc. γ, γ', etc. Wenn die Kreise sich schneiden, d. h. eine bestimmte Ungleichheitsbedingung besteht zwischen den c, so ist $\bar{K}$ unabhängig von den Grössen γ. Dann muss $\bar{K}$ aber auch unabhängig sein von den Substitutionscoefficienten, wenn die Ungleichheitsbedingung nicht besteht.

beiden eingeschlossenen, e die Entfernung der Mittelpunkte. Dann ist ausserdem $R^2+r^2-e^2$ positiv; daher

$$R^2+r^2-e^2 \geqq 2Rr\sqrt{1+\varkappa}.$$

Ferner ist $R-e>r$, also

$$R^2-2Re+e^2>r^2;$$

somit

$$2R^2-2Re>2Rr\sqrt{1+\varkappa},$$

$$e<R-r\sqrt{1+\varkappa}.$$

Dasselbe muss gelten für den umschliessenden und den anderen eingeschlossenen Kreis; es ist also:

$$e+e'<2R-(r+r')\sqrt{1+\varkappa},$$

wenn r, r' die Radien der beiden eingeschlossenen Kreise sind, und e, e' die Entfernungen ihrer Mittelpunkte vom Mittelpunkt des umschliessenden Kreises.

Nun ist aber, da von den beiden inneren Kreisen jeder ausserhalb des anderen liegt, die Summe der Radien $r+r'$ kleiner als die gegenseitige Entfernung ihrer Mittelpunkte, also auch kleiner als $e+e'$; man hat demnach

$$r+r'<e+e'<2R-(r+r')\sqrt{1+\varkappa}$$

oder, wenn

$$\frac{2}{1+\sqrt{1+\varkappa}} = \varepsilon$$

gesetzt wird:

$$r+r'<R\varepsilon,$$

wo ε eine positive Grösse bedeutet, die <1 ist.

Betrachtet man nun die Gesammtheit der Radien aller unendlich vielen Kreise, die von einem mit dem Radius R umschlossen werden, so ist die Summe der beiden auf R zunächst folgenden Radien $r+r'<R\varepsilon$. Dringt man in das Innere dieser beiden kleineren Kreise ein, so kommt man zu zwei Gebieten, für die dasselbe gilt. r und r' sind hier die Radien der umschliessenden Kreise. Die der vier umschlossenen sind demnach zusammengenommen kleiner als $r\varepsilon+r'\varepsilon$, mithin kleiner als $R\varepsilon^2$. Dann folgen, wenn man in diese vier Kreise eindringt, acht, deren Radiensumme

kleiner ist als $R\varepsilon^3$, u. s. f. Die Summe der Radien aller unendlich vielen Kreise, welche innerhalb des einen mit dem Radius R liegen, ist demnach kleiner als

$$R\varepsilon + R\varepsilon^2 + R\varepsilon^3 + \text{etc. in inf.} = \frac{R\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Da dies gilt für jeden Grundkreis, so ist der Satz bewiesen.

Ohne die Voraussetzung, welche diesem Beweise zu Grunde liegt, lässt sich auf dieselbe Art wenigstens zeigen, dass die Radien der Kreise K_m unbegrenzt abnehmen. Denkt man sich für je zwei Grundkreise den Ausdruck K gebildet und bezeichnet das Minimum dieser $\frac{2\varrho(2\varrho-1)}{2}$ Werthe mit $\varkappa$, so gilt für den Radius r eines Kreises $(h-1)^{\text{ter}}$ Stufe und den des umschliessenden Kreises h^{ter} Stufe, R, die Ungleichung

$$R^2 + r^2 - e^2 > 2Rr\sqrt{1+\varkappa},$$

also auch

$$2R^2 > 2Rr\sqrt{1+\varkappa},$$

$$\frac{r}{R} < \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}}.$$

Wenn man auf diese Weise fortschreitet, bis man zum Nullgebiet gelangt, und mit G den Radius des grössten unter den 2ϱ gegebenen Kreisen bezeichnet, so folgt, dass der Radius jedes Kreises h^{ter} Stufe kleiner ist als

$$\frac{G}{(\sqrt{1+\varkappa})^{h-1}}.$$

Bestimmt man also eine reelle Zahl M durch die Gleichung

$$(\sqrt{1+\varkappa})^{M-1}\delta = G,$$

wo δ eine beliebige positive Zahl bedeutet, so kann der Radius eines Kreises K_m nur dann $\geqq \delta$ sein, wenn die Anzahl der Elemente von m kleiner als M ist. Die Anzahl dieser Kreise ist aber eine endliche.

Für den Fall $\varrho = 1$, wo nur zwei Grundkreise gegeben sind, ist der erste Beweis nicht anwendbar, aber hier genügt schon das letzte Resultat. Denn da in diesem Falle nur zwei Kreise h^{ter} Stufe existiren, so muss die Summe aller Radien kleiner sein als

$$2G\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}} + \frac{1}{(\sqrt{1+\varkappa})^2} + \text{etc.}\right)$$

d. h. kleiner als

$$\frac{2G\sqrt{1+\varkappa}}{\sqrt{1+\varkappa}-1}.$$

§ 3.

Jeder Punkt X der Ebene, welcher keiner Fläche (m) angehört, muss wenigstens im Innern eines bestimmten Grundkreises K_α liegen; da er aber der Voraussetzung nach dem Gebiete (α) nicht angehört, so muss er im Innern eines der $2\varrho-1$ auf K_α folgenden Kreise $K_{\alpha\beta}$ liegen. Dieser Schluss lässt sich unbegrenzt fortsetzen; daher wird durch einen solchen Punkt X eine unendliche Reihe von Elementen

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ \ldots \text{ in inf.}$$

bestimmt, übrigens von der gleichen Beschaffenheit wie die endlichen Combinationen, dass nicht zwei entgegengesetzte Elemente direct auf einander folgen.

Jeder solchen willkürlich gebildeten Reihe entspricht auch immer ein und nur ein Punkt X, der im Innern aller Kreise

$$K_\alpha, \quad K_{\alpha\beta}, \quad K_{\alpha\beta\gamma}, \quad \text{etc. in inf.}$$

liegt und somit keinem der Gebiete (m) angehört; denn jeder Kreis liegt im Innern des vorhergehenden, und die Radien nehmen unbegrenzt ab.

Diese Punkte können wesentlich singuläre oder Grenzpunkte genannt werden aus folgendem Grunde. Ist x ein Punkt, der einem Gebiete (m) h^{ter} Stufe angehört, und bildet man die Grössenreihe:

$$f_\alpha(x) = \overset{(1)}{u}, \quad f_{\alpha\beta}(x) = \overset{(2)}{u}, \quad f_{\alpha\beta\gamma}(x) = \overset{(3)}{u}, \quad \text{etc.,}$$

so convergirt diese gegen den von x unabhängigen Werth X. Denn die Punkte

$$\overset{(1)}{u}, \quad \overset{(2)}{u}, \quad \overset{(3)}{u}, \quad \text{etc.}$$

liegen der Reihe nach in den Gebieten

$$(\alpha m), \quad (\alpha\beta m), \quad (\alpha\beta\gamma m), \quad \text{etc.}$$

Durch die Zusammensetzung nm eines andern Index mit m können höchstens h Elemente von n aufgehoben werden; es liegt deswegen $\overset{(h+1)}{u}$ innerhalb K_α, $\overset{(h+2)}{u}$ innerhalb $K_{\alpha\beta}$ u. s. f. Folglich ist

$$\overset{(h+k)}{u} - X$$

kleiner als der Diameter eines Kreises k^{ter} Stufe, mithin:

$$\operatorname*{Lim}_{k=\infty}(\overset{k}{u}) = X.$$

Irgend ein endlicher Index m kann mit dem unendlich grossen zusammengesetzt werden:

$$(m\alpha\beta\gamma\ldots),$$

wobei eine Reduction vorzunehmen ist, wenn das letzte Element von m zu α entgegengesetzt ist. Bezeichnet man diesen neuen Grenzpunkt mit Y, so ist

$$Y = f_m(X);$$

denn es ist

$$Y = \operatorname{Lim} f_m(\overset{k}{u}) = f_m(\operatorname{Lim}(\overset{k}{u})) = f_m(X).$$

Denkt man sich die sämmtlichen Kreise h^{ter} Stufe construirt, so kann man durch Vergrösserung von h bewirken, dass die Radien dieser Kreise, und sogar, wenn der Satz des vorigen Paragraphen gilt, die Summe der Flächen und Umfänge beliebig klein wird. Es umschliesst aber jeder solche Kreis unendlich viele Gebiete (m) und unendlich viele singuläre Punkte. Daraus geht hervor, dass eine eindeutige analytische Function $F(x)$, wenn sie die Eigenschaft besitzt: $F(x_m) = F(x)$, bei der Annäherung an einen Grenzpunkt nothwendig unbestimmt werden muss.

Wichtig sind für uns besonders diejenigen singulären Punkte, deren Indices-Entwickelung von einem bestimmten Gliede an periodisch ist. Jedem endlichen Index m kann man einen derartigen Grenzpunkt $\overset{m}{A}$ auf folgende Weise zuordnen:

Wenn das erste und letzte Element von m entgegengesetzt sind, so mögen beide fortgelassen werden. Mit dem so reducirten Index verfahre man in derselben Weise, und so fort; dann muss schliesslich eine Combination p übrig bleiben, deren letztes Element dem ersten nicht entgegengesetzt ist; diese nennen wir die Periode von m. m selbst lässt sich dann in der Form darstellen: $m = cpc'$, wo c und c' entgegengesetzte Indices sind, die auch 0 sein können. Unter $\overset{(m)}{A}$ verstehen wir dann denjenigen singulären Punkt, dessen Entwickelung durch die Reihe

$$(cppp \text{ etc. in inf.})$$

gegeben ist. — Hieraus folgt sofort, da c, c' bei der Zusammensetzung

sich gegenseitig aufheben, dass

$$f_m(\overset{(m)}{A}) = (cpc'cpp\ldots) = \overset{(m)}{A}$$

ist. — Ist m' der zu m entgegengesetzte Index, so ist $m' = cp'c'$, wo p' die zu p entgegengesetzte Periode bedeutet. $\overset{(m')}{A}$ ist dann definirt durch die Entwickelung

$$(cp'p'p'\ldots)$$

und genügt der Gleichung

$$f_{m'}(\overset{m'}{A}) = \overset{(m')}{A}.$$

Dieser Punkt möge mit $\overset{m}{B}$ bezeichnet werden; sodass gleichzeitig

$$\overset{(m')}{A} = \overset{(m)}{B}, \quad \overset{(m')}{B} = \overset{(m)}{A}$$

ist. Ist nun $f_{m'}(x) = x$, so ist auch $x = f_m(x)$; beide Werthe sind also Wurzeln der quadratischen Gleichung $f_m(x) = x$, und beide sind verschieden. Denn da das letzte Element von p zum ersten nicht entgegengesetzt ist, so fangen p und p' mit verschiedenen Elementen an. Ist $c = 0$, so gehören beide Doppelpunkte verschiedenen Grundkreisen an; andernfalls liegen beide im Kreise K_c, dies ist aber der letzte Kreis, der beide zugleich enthält.

Bezeichnet man mit m^h denjenigen Index, der durch h-fache Wiederholung von m hervorgeht, mit m^{-h} den in gleicher Weise aus m' gebildeten, so ist

$$m^h = cp^h c', \quad m^{-h} = cp'^h c'.$$

Daraus folgt, wenn x kein singulärer Punkt ist:

$$\lim_{h=+\infty} f_{m^h}(x) = \overset{(m)}{A}, \quad \lim_{h=+\infty} f_{m^{-h}}(x) = \overset{(m)}{B}.$$

Da auf diese Weise die Doppelpunkte der Substitution f_m bekannt sind, so kann man ihre Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\frac{f_m(x) - \overset{(m)}{A}}{f_m(x) - \overset{(m)}{B}} = \overset{(m)}{q}\,\frac{x - \overset{(m)}{A}}{x - \overset{(m)}{B}}.$$

Hieraus folgt, wenn $\overset{(h)}{x}$ gesetzt wird für $f_{m^h}(x)$:

$$\frac{\overset{(h)}{x} - \overset{(m)}{A}}{\overset{(h)}{x} - \overset{(m)}{B}} = (\overset{m}{q})^h\,\frac{x - \overset{(m)}{A}}{x - \overset{(m)}{B}},$$

und da $\overset{(h)}{x}$ mit wachsendem h in $\overset{(m)}{A}$ übergeht, so muss

$$|\overset{(m)}{q}| < 1$$

sein. — Entgegengesetzten Indices entsprechen übrigens gleiche Moduln $\overset{(m)}{q}$.

§ 4.

Bei den folgenden Entwickelungen setzen wir die Convergenz der Radien- oder Diametersumme voraus. Eine unmittelbare Folge hiervon ist die Convergenz der über sämmtliche Indices m erstreckten Summe

$$\sum_m (\xi_m - \eta_m),$$

wenn wir die Variabeln ξ, η auf die Nullfläche beschränken; denn dann liegen ξ_m, η_m innerhalb des Kreises K_m, es ist also $\xi_m - \eta_m$ absolut genommen kleiner als der Diameter des entsprechenden Kreises.

Es möge der etwas allgemeinere Ausdruck

$$S = \sum_m (\Phi_m),$$

wo

$$\Phi_m = \frac{(\xi_m - \eta_m)(x - y)}{(\xi_m - y)(\eta_m - x)}$$

ist, betrachtet werden. Die vier Grössen x, y, ξ, η beschränken wir auf dasjenige Gebiet, welches von den Kreisen h^{ter} Stufe begrenzt ist, und das wir in § 1 als G_h bezeichnet haben. Man kann h immer so gross annehmen, dass irgend ein beliebiges Gebiet, welches im Innern und auf seiner Begrenzung keinen Grenzpunkt enthält, ganz im Innern von G_h liegt.

Weiter möge eine ganze Zahl $k \geqq h$ angenommen werden, und von dem Summenausdruck S alle Glieder Φ_m abgesondert, deren Indices m weniger als $h+k$ Elemente enthalten. Die Anzahl dieser abgesonderten Glieder ist jedenfalls eine endliche.

Schliesslich führen wir zwei Hülfsgrössen ein. Mit ϱ_h möge die kleinste Entfernung der Kreise h^{ter} Stufe von denen der folgenden Stufe, und mit ε_h die Summe der Diameter aller Kreise von höherer als der h^{ten} Stufe bezeichnet werden. Der Voraussetzung nach ist dann ε_h eine Grösse, die mit wachsendem h unendlich klein wird.

Wenn ξ, η innerhalb G_h liegen, so ist es möglich, in dieser Fläche eine Linie von ξ nach η zu ziehen, die höchstens $2h-2$ Kreise schneidet.

Die Schnittpunkte denken wir uns in der Richtung von ξ nach η bezeichnet durch

$$\overset{(1)}{\xi},\ \overset{(2)}{\xi},\ \ldots\ \overset{(r-1)}{\xi};$$

ξ selbst durch $\overset{(0)}{\xi}$, und η durch $\overset{(r)}{\xi}$. Zwei auf einander folgende Punkte dieser Reihe liegen dann im Innern oder auf der Grenze eines und desselben Gebietes (c) von niedrigerer Stufe als h; r ist $\leqq 2h-1$.

$f_m(\overset{\nu}{\xi})$ und $f_m(\overset{\nu+1}{\xi})$ liegen im Innern oder auf der Grenze des Gebietes (mc), das von K_{mc} umschlossen wird; es ist also

$$|f_m(\overset{\nu}{\xi})-f_m(\overset{\nu+1}{\xi})| < D_{mc},$$

wenn wir allgemein mit D_m den Diameter des Kreises K_m bezeichnen. Folglich ist:

$$\sum_m |f_m(\overset{\nu+1}{\xi})-f_m(\overset{\nu}{\xi})| < \sum_m (D_{mc}).$$

m enthält mindestens $h+k$ Elemente, c höchstens $h-1$, also mc mindestens $k+1$; daher ist

$$\sum_m (D_{mc}) < \varepsilon_k.$$

Da sich $f_m(\xi)-f_m(\eta)$ in r solche Differenzen zerlegen lässt und $r<2h$ ist, so ist

$$\Sigma|\xi_m-\eta_m| < 2h\varepsilon_k.$$

Wir sahen so eben, dass jede Grösse ξ_m, η_m im Innern oder auf der Grenze eines Gebietes (mc) liegt, das mindestens von der $(k+1)^{\text{ten}}$ Stufe ist. Da wir $k \geqq h$ angenommen haben, so liegen alle Grössen ξ_m, η_m im Innern oder auf der Grenze von Kreisen $(h+1)^{\text{ter}}$ Stufe, während x, y ausserhalb aller Kreise h^{ter} Stufe liegen. Es ist deswegen

$$|x-\eta_m| > \varrho_h, \quad |y-\xi_m| > \varrho_h;$$

und somit:

$$\sum_m |\Phi_m| < \frac{2h|x-y|}{\varrho_h^2}\varepsilon_k.$$

Es wird sich sehr leicht ergeben, dass die Ausdrücke, die wir betrachten, auch im unendlich fernen Punkte nicht aufhören, convergent zu sein. Vorläufig sieht man, da ε_k mit wachsendem k sich dem Werthe 0 nähert, Folgendes:

Ist G irgend ein endliches Gebiet der Ebene, das im Innern und auf seiner Begrenzung keinen der im vorigen Paragraphen definirten wesentlich

singulären Punkte enthält, so ist es möglich, von der Summe $S = \Sigma(\Phi_m)$ eine endliche Anzahl von Gliedern in der Weise abzusondern, dass der Rest im Innern und auf der Grenze von G beständig kleiner ist als eine vorgeschriebene Zahl.

Hieraus folgt nicht nur die Convergenz von $\Sigma(\Phi_m)$, sondern auch von $\Sigma\log(1+\Phi_m)$ und die des Productes

$$\prod_m (1+\Phi_m).$$

$1+\Phi_m$ ist nun folgender Ausdruck:

$$\frac{(x-\xi_m)(y-\eta_m)}{(x-\eta_m)(y-\xi_m)}.$$

Wir bezeichnen das über sämmtliche Indices m, 0 eingeschlossen, ausgedehnte Product

$$\prod_m \left(\frac{(x-\xi_m)(y-\eta_m)}{(x-\eta_m)(y-\xi_m)}\right) \quad \text{mit} \quad (x,\ y;\ \xi,\ \eta).$$

Dieses stellt eine eindeutige analytische Function der vier Grössen dar, die — von den Grenzpunkten abgesehen — beständig den Charakter einer rationalen Function besitzt. Da die Factoren Doppelverhältnisse sind, die bei gleichzeitiger linearer Transformation aller vier Grössen ungeändert bleiben, so kann der unendlich ferne Punkt kein singulärer sein.

§ 5.

Das Product $(x, y; \xi, \eta)$, als abhängig von x betrachtet, stellt eine Function dar, die nur für $x = \xi$ und die congruenten Werthe verschwindet, und für $x = \eta$ und die congruenten unendlich gross wird, beides von der ersten Ordnung. Vertauscht man x mit y oder ξ mit η, so bekommt man den reciproken Werth.

Ferner bleibt $(x, y; \xi, \eta)$ ungeändert, wenn man gleichzeitig x mit ξ, y mit η vertauscht. Denn wenn man das Glied absondert, welches zum Index 0 gehört, und dann zwei Factoren auffasst, die entgegengesetzten Indices m, m' entsprechen, so ist das Doppelverhältniss

$$\frac{(x-\xi_{m'})(y-\eta_{m'})}{(x-\eta_{m'})(y-\xi_{m'})} = \frac{(\xi-x_m)(\eta-y_m)}{(\xi-y_m)(\eta-x_m)},$$

da durch die Substitution f_m die vier Grössen $x,\ y,\ \xi_{m'},\ \eta_{m'}$ übergehen in $x_m,\ y_m,\ \xi,\ \eta$.

Folglich ist:

$$(x, y;\, \xi, \eta) = \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)} \prod_n \frac{(x-\xi_n)(y-\eta_n)}{(x-\eta_n)(y-\xi_n)} \prod_n \frac{(\xi-x_n)(\eta-y_n)}{(\xi-y_n)(\eta-x_n)}.$$

Von jedem Paare entgegengesetzter Indices ist hier immer nur einer zu nehmen. Dieser Ausdruck ist symmetrisch in Bezug auf x, y einerseits, ξ, η andererseits.

Multiplicirt man den letzten Ausdruck mit $x-\eta$ und $y-\xi$, und setzt dann $\eta = x$, $y = \xi$, so wird der erste Factor $-(x-\xi)^2$ und die beiden folgenden Producte einander gleich. Dadurch kommt man zu einer von nur zwei Variabeln abhängigen Function

$$\text{(I.)} \qquad E(x, \xi) = (x-\xi) \prod_n \frac{(x-\xi_n)(\xi-x_n)}{(x-x_n)(\xi-\xi_n)},$$

deren Quadrat identisch ist mit dem Werthe von

$$(x-\eta)(\xi-y)(x,\, y;\, \xi,\, \eta) \quad \text{für} \quad \eta = x, \quad y = \xi.$$

Durch diese Function lässt sich der zuerst aufgestellte Product-Ausdruck folgendermassen darstellen:

$$\text{(II.)} \qquad (x,\, y;\, \xi,\, \eta) = \frac{E(x, \xi)E(y, \eta)}{E(x, \eta)E(y, \xi)}.$$

Es giebt offenbar unendlich viele Functionen zweier Variabeln, die dieser letzten Gleichung genügen würden. Die hier angegebene ist durch zwei Bedingungen charakterisirt:

Erstens ist $E(x, \xi)$ eine alternirende Function von x und ξ:

$$\text{(III.)} \qquad E(\xi,\, x) = -E(x,\, \xi).$$

Zweitens ist:

$$\text{(IV.)} \qquad \frac{E(x, \xi)}{x-\xi} = 1 \quad \text{für} \quad x = \xi.$$

Aus beiden Gleichungen ergiebt sich noch Folgendes. Setzt man für den Augenblick

$$E(x,\, \xi) = (x-\xi)F(x,\, \xi),$$

so ist $F(x, \xi)$ eine symmetrische Function von x und ξ, die für $x = \xi$ den Werth 1 annimmt. Daraus folgt, dass man setzen kann

$$F(x,\, \xi) = 1+(x-\xi)^2 Q(x,\, \xi),$$

wo $Q(x, \xi)$ eine gleichfalls symmetrische Function von x und ξ bedeutet,

die nach ganzen Potenzen von x und ξ entwickelt werden kann. Mithin ist

$$\text{(V.)} \qquad \frac{\partial \log E(x,\xi)}{\partial \xi} + \frac{1}{x-\xi} = 0 \quad \text{für} \quad x = \xi.$$

Der Ausdruck für $E(x,\xi)$ besteht, von $x-\xi$ abgesehen, aus quadratischen Factoren, deren jeder für zwei zu ξ congruente Werthe $x=\xi_n$ und $x=\xi_{n'}$ verschwindet, und in den beiden Doppelpunkten $\overset{(n)}{A}$, $\overset{(n)}{B}$ unendlich wird. Die letzteren sind Grenzpunkte. Ferner nimmt für $x=\infty$ jeder Factor mit Ausnahme von $x-\xi$ einen endlichen und von 0 verschiedenen Werth an. Daher ergiebt sich:

Von den Grenzpunkten abgesehen, wird $E(x,\xi)$ unendlich gross nur im Punkte $x=\infty$, und zwar von der ersten Ordnung. Dagegen wird $E(x,\xi)=0$ für $x=\xi$ und alle congruenten Werthe, ebenfalls von der ersten Ordnung; in allen anderen Punkten hat $E(x,\xi)$ einen endlichen, von 0 verschiedenen Werth.

Wenn man ξ durch irgend einen congruenten Werth ξ_n ersetzt, so wird $E(x,\xi_n)$ genau für dieselben Werthe von x Null und unendlich gross, wie $E(x,\xi)$. Daraus folgt, dass der Quotient

$$\frac{E(x,\xi_n)}{E(x,\xi)},$$

als Function von x betrachtet, nie Null und nie unendlich werden kann. Um diese Function zu bestimmen, gehen wir von der Gleichung

$$(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = \frac{E(x,\xi)E(y,\eta)}{E(x,\eta)E(y,\xi)}$$

aus und ersetzen hier ξ durch ξ_n, η durch ξ. So ergiebt sich:

$$\frac{E(x,\xi_n)E(y,\xi)}{E(x,\xi\ )E(y,\xi_n)} = \prod_m \frac{(x-\xi_{mn})(y-\xi_m)}{(x-\xi_m\ )(y-\xi_{mn})}.$$

Man kann die Factoren dieses Products in folgender Weise zusammenfassen. Wenn m irgend ein Index ist, so betrachten wir mit m zugleich alle diejenigen unendlich vielen Indices, die aus m durch wiederholte Hinzufügung von n oder n' entstehen; diese wollen wir modulo n congruent nennen. Auf diese Weise kann man setzen:

$$m = pn^h,$$

und bekommt sämmtliche Indices m, jeden nur einmal, wenn man für p ein vollständiges System modulo n incongruenter Indices setzt, und h alle ganzen

Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. mn wird dann $= pn^{h+1}$; also

$$\frac{E(x,\xi_n)E(y,\xi)}{E(x,\xi)\,E(y,\xi_n)} = \mathop{\Pi}_{p}\mathop{\Pi}_{h=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x-\xi_{pn^{h+1}}}{x-\xi_{pn^h}}\cdot\frac{y-\xi_{pn^h}}{y-\xi_{pn^{h+1}}}\right).$$

Das Product, ausgedehnt über die Factoren einer Gruppe (p), lässt sich jetzt ausführen und ist

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{h=+\infty}\left(\frac{x-\xi_{pn^h}}{y-\xi_{pn^h}}\cdot\frac{y-\xi_{pn^{-h}}}{x-\xi_{pn^{-h}}}\right) = \frac{x-f_p(\overset{n}{A})}{y-f_p(\overset{n}{A})}\cdot\frac{y-f_p(\overset{n}{B})}{x-f_p(\overset{n}{B})},$$

da

$$\mathrm{Lim}(\xi_{pn^h}) = f_p(\overset{n}{A}),\quad \mathrm{Lim}(\xi_{pn^{-h}}) = f_p(\overset{n}{B})$$

ist. Es ergiebt sich also:

$$\frac{E(x,\xi_n)}{E(x,\xi)}\cdot\frac{E(y,\xi)}{E(y,\xi_n)} = \mathop{\Pi}_{p}\left(\frac{x-f_p(\overset{n}{A})}{x-f_p(\overset{n}{B})}\cdot\frac{y-f_p(\overset{n}{B})}{y-f_p(\overset{n}{A})}\right).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite, welcher sich erstreckt über ein vollständiges System modulo n incongruenter Indices p, stellt eine Function von x dar, die nie 0 und nie ∞ wird, und für $x = y$ den Werth 1 annimmt.

Der Einfachheit wegen bestimmen wir die Function so, dass sie 1 wird für $x = \infty$, und bezeichnen sie dann mit $E_n(x)$:

$$\text{(VI.)}\qquad E_n(x) = \mathop{\Pi}_{p}\frac{x-f_p(\overset{n}{A})}{x-f_p(\overset{n}{B})}.$$

Wir erhalten dann die Formel:

$$\frac{E(x,\xi_n)}{E(x,\xi)E_n(x)} = \frac{E(y,\xi_n)}{E(y,\xi)E_n(y)},$$

aus der hervorgeht, dass dieser Quotient von x unabhängig ist. Er möge vorläufig mit $\psi_n(\xi)$ bezeichnet werden:

$$E(x,\xi_n) = E_n(x)\psi_n(\xi)E(x,\xi).$$

Vertauscht man x mit ξ, so folgt, da $E(x,\xi)$ alternirend ist:

$$E(x_n,\xi) = E_n(\xi)\psi_n(x)E(x,\xi).$$

Wenn jetzt m ein zweiter beliebiger Index ist, und man ersetzt ξ durch ξ_m, so ergiebt sich:

$$E(x_n,\xi_m) = E_n(\xi_m)\psi_n(x)E(x,\xi_m) = E_n(\xi_m)\psi_n(x)E_m(x)\psi_m(\xi)E(x,\xi).$$

Werden hier gleichzeitig die Variabeln x, ξ und die Indices n, m vertauscht, so ändern $E(x, \xi)$ und $E(x_n, \xi_m)$ nur ihr Vorzeichen; das Product

$$E_n(\xi_m)\psi_n(x)E_m(x)\psi_m(\xi)$$

bleibt daher ungeändert. Hieraus folgt:

$$E_n(\xi_m)E_m(x) = E_m(x_n)E_n(\xi).$$

Es muss deswegen der Quotient

$$\frac{E_m(x_n)}{E_m(x)} = E_{m,n}$$

eine Constante sein, und zwar eine solche, die von den beiden Indices m, n symmetrisch abhängt; wir erhalten also:

$$\text{(VII.)} \qquad E_m(x_n) = E_{m,n}E_m(x),$$
$$\text{(VIII.)} \qquad E_{m,n} = E_{n,m}.$$

Nimmt man jetzt in der Gleichung für $E(x_n, \xi_m)$ $n = m$ an, und auch $x = \xi$, nachdem durch $x-\xi$ dividirt worden ist, so ergiebt sich, da für $x = \xi$

$$\frac{E(x,\xi)}{x-\xi} = 1, \qquad \frac{E(x_n, \xi_n)}{x-\xi} = \frac{x_n-\xi_n}{x-\xi} = \frac{d\xi_n}{d\xi}$$

wird:

$$\frac{d\xi_n}{d\xi} = E_n(\xi_n)E_n(\xi)\psi_n^2(\xi) = E_{n,n}(E_n(\xi)\psi_n(\xi))^2.$$

Oder, wenn man an Stelle von $\psi_n(\xi)$ den Ausdruck

$$L_n(\xi) = \frac{1}{E_n(\xi)\psi_n(\xi)}$$

einführt:

$$(L_n(\xi))^2 = E_{n,n}\frac{d\xi}{d\xi_n}.$$

Hieraus geht hervor, dass $L_n(\xi)$ eine ganze lineare Function von ξ ist, nämlich der Nenner der gebrochenen Function $f_n(\xi)$, mit einem constanten Factor multiplicirt, der, abgesehen vom Vorzeichen, durch die letzte Formel bestimmt ist. Wir können setzen:

$$\text{(IX.)} \qquad L_n(\xi) = \sqrt{E_{n,n}\frac{d\xi}{d\xi_n}}.$$

Wenn das Zeichen dieser Wurzelgrösse bekannt ist für die primitiven Indices 1, 2, ... ϱ, so lässt sich der genaue Werth von $L_n(\xi)$ allgemein angeben; für $L_1, \dots L_\varrho$ selbst aber bekommt man hier keine Zeichenbestimmung.

Es ist jetzt:

$$\text{(X.)}\qquad E(x_n,\ \xi) = \frac{E_n(\xi)E(x,\ \xi)}{E_n(x)L_n(x)} = \frac{E_n(\xi)}{E_n(x)\sqrt{E_{n,n}\dfrac{dx}{dx_n}}}E(x,\ \xi)$$

und allgemeiner:

$$\text{(XI.)}\qquad E(x_n,\ \xi_m) = \frac{E_n(\xi)E_m(x)}{E_n(x)E_m(\xi)}\,\frac{E_{n,m}E(x,\ \xi)}{\sqrt{E_{n,n}\dfrac{dx}{dx_n}}\sqrt{E_{m,m}\dfrac{d\xi}{d\xi_m}}}.$$

§ 6.

Aus der Gleichung (X.) des vorigen Paragraphen folgt, wenn man x ersetzt durch einen congruenten Werth x_m:

$$E(x_{nm},\ \xi) = \frac{E_n(\xi)}{E_n(x_m)L_n(x_m)}\cdot E(x_m,\ \xi) = \frac{E_n(\xi)}{E_n(x_m)L_n(x_m)}\cdot\frac{E_m(\xi)}{E_m(x)L_m(x)}\cdot E(x,\ \xi).$$

Daher ist:

$$\frac{E_{nm}(\xi)}{E_{nm}(x)L_{nm}(x)} = \frac{E_n(\xi)}{E_n(x_m)L_n(x_m)}\cdot\frac{E_m(\xi)}{E_m(x)L_m(x)}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Quotient

$$\frac{E_{nm}(\xi)}{E_n(\xi)E_m(\xi)}$$

eine Constante sein muss. Da aber die Functionen $E_n(\xi)$ so angenommen wurden, dass sie für $\xi = \infty$ den Werth 1 erhalten, so muss der Werth dieser Constanten ebenfalls $= 1$ sein, also:

$$\text{(I.)}\qquad E_{nm}(\xi) = E_n(\xi)E_m(\xi).$$

Für die linearen Functionen $L_n(\xi)$ folgt dann, wenn man die Formel (VII.) des vorigen Paragraphen berücksichtigt:

$$\text{(II.)}\qquad L_{nm}(x) = E_{n,m}L_n(x_m)L_m(x),$$

wonach das Vorzeichen von L_{nm} bestimmt wird durch das von L_n und L_m.

Für die Constanten $E_{n,m}$ müssen, da sie durch die Gleichung (VII.) bestimmt sind, entsprechende Gleichungen gelten, wie für die Functionen $E_n(\xi)$:

$$\text{(III.)}\qquad E_{nm,p} = E_{n,p}.E_{m,p}.$$

Es geht hieraus hervor, dass sich die sämmtlichen Functionen $E_n(x)$ ausdrücken lassen als Producte von Potenzen der ϱ primitiven:

$$E_1(x),\quad E_2(x),\quad \dots\quad E_\varrho(x).$$

Entgegengesetzten Indices müssen reciproke E-Functionen entsprechen; es muss also

$$E_{\varkappa'}(x)E_{\varkappa}(x) = 1$$

sein. — Dasselbe gilt für die Constanten $E_{n,m}$; diese müssen sich ausdrücken lassen als Producte von Potenzen der primitiven Grössen $E_{\varkappa,\lambda}$ ($\varkappa$, $\lambda = 1, 2, \dots \varrho$). Die Anzahl dieser ist $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$, da $E_{\varkappa,\lambda} = E_{\lambda,\varkappa}$ ist. Speciell ist

$$E_{\varkappa',\lambda} = E_{\lambda,\varkappa'} = \frac{1}{E_{\varkappa,\lambda}}; \quad E_{\varkappa',\lambda'} = E_{\varkappa,\lambda}.$$

Wir können uns also auf diese den einfachen Indices entsprechenden Grössen beschränken. In dem Ausdruck

$$E_{\varkappa}(x) = \prod_p \frac{x - f_p(\overset{\varkappa}{A})}{x - f_p(\overset{\varkappa}{B})}$$

ist für p ein vollständiges System modulo $\varkappa$ incongruenter Indices zu setzen. Dafür kann man die Gesammtheit derjenigen Combinationen wählen, die nicht mit $\varkappa$ oder $\varkappa'$ endigen. Der Index 0 gehört auch zu diesen, und es lässt sich sogar vermuthen, dass der diesem Index entsprechende Factor

$$\frac{x - \overset{\varkappa}{A}}{x - \overset{\varkappa}{B}}$$

hauptsächlich den Werth des Products bestimmt, wenn man x auf die Nullfläche beschränkt. Denn $\overset{\varkappa}{A}$, $\overset{\varkappa}{B}$ gehören verschiedenen Grundkreisen an, hingegen liegen $f_p(\overset{\varkappa}{A})$, $f_p(\overset{\varkappa}{B})$, sobald p von 0 verschieden ist, in demselben Kreise K_p, sodass der Werth des Factors der Einheit nahekommt.

Um einen entsprechenden Ausdruck für $E_{\varkappa,\lambda}$ zu erhalten, gehen wir aus von der Gleichung (VI.) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{E_{\varkappa}(x)}{E_{\varkappa}(y)} = \prod_p \left(\frac{x - f_p(\overset{\varkappa}{A})}{x - f_p(\overset{\varkappa}{B})} \cdot \frac{y - f_p(\overset{\varkappa}{B})}{y - f_p(\overset{\varkappa}{A})} \right).$$

Jeder Factor ist hier ein Doppelverhältniss. Es ist deswegen, wenn man mit q den zu p entgegengesetzten Index bezeichnet:

$$\frac{x - f_p(\overset{\varkappa}{A})}{x - f_p(\overset{\varkappa}{B})} \cdot \frac{y - f_p(\overset{\varkappa}{B})}{y - f_p(\overset{\varkappa}{A})} = \frac{\overset{\varkappa}{A} - x_q}{\overset{\varkappa}{B} - x_q} \cdot \frac{\overset{\varkappa}{B} - y_q}{\overset{\varkappa}{A} - y_q}.$$

Ersetzt man x durch x_λ — wo λ wieder einen der Indices $1, 2, \dots \varrho$

bezeichnen möge — und y durch x, so ergiebt sich:

$$\frac{E_\varkappa(x_\lambda)}{E_\varkappa(x)} = E_{\varkappa,\lambda} = \prod_q \left(\frac{\overset{\varkappa}{A} - x_{q\lambda}}{\overset{\varkappa}{B} - x_{q\lambda}} \cdot \frac{\overset{\varkappa}{B} - x_q}{\overset{\varkappa}{A} - x_q} \right).$$

Diese Indices q können in Bezug auf λ ebenso reducirt werden, wie früher die Indices m in Bezug auf n. Ist λ nicht $= \varkappa$, so wird man die Gesammtheit aller Indices q erhalten, wenn man setzt: $q = r\lambda^h$, für r alle Combinationen nimmt, die weder mit $\varkappa$ noch mit $\varkappa'$ anfangen, und weder mit λ noch mit λ' endigen, und h alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. Zu diesen Combinationen r gehört auch $r = 0$.

Ist dagegen $\lambda = \varkappa$, so darf man im Falle $r = 0$ dem h nur den einzigen Werth $h = 0$ beilegen, weil sonst q mit $\varkappa$ oder $\varkappa'$ anfinge. Zu $r = 0$ gehört also in diesem Falle ein einziges Glied, und dieses ist:

$$\frac{\overset{\varkappa}{A} - x_\varkappa}{\overset{\varkappa}{B} - x_\varkappa} \cdot \frac{\overset{\varkappa}{B} - x}{\overset{\varkappa}{A} - x} = \overset{\varkappa}{q}.$$

Wir bekommen also im ersten Falle ($\varkappa \lessgtr \lambda$):

$$E_{\varkappa,\lambda} = \prod_r \prod_{h=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{(\overset{\varkappa}{A} - x_{r\lambda^{h+1}})}{(\overset{\varkappa}{B} - x_{r\lambda^{h+1}})} \cdot \frac{(\overset{\varkappa}{B} - x_{r\lambda^h})}{(\overset{\varkappa}{A} - x_{r\lambda^h})} \right\}$$

oder, nach Ausführung der Multiplication in Bezug auf h:

$$E_{\varkappa,\lambda} = \prod_r \left(\frac{\overset{\varkappa}{A} - f_r(\overset{\lambda}{A})}{\overset{\varkappa}{B} - f_r(\overset{\lambda}{A})} \cdot \frac{\overset{\varkappa}{B} - f_r(\overset{\lambda}{B})}{\overset{\varkappa}{A} - f_r(\overset{\lambda}{B})} \right),$$

im zweiten, $\lambda = \varkappa$:

$$E_{\varkappa,\varkappa} = \overset{\varkappa}{q} \prod_r{}' \left(\frac{\overset{\varkappa}{A} - f_r(\overset{\varkappa}{A})}{\overset{\varkappa}{B} - f_r(\overset{\varkappa}{A})} \cdot \frac{\overset{\varkappa}{B} - f_r(\overset{\varkappa}{B})}{\overset{\varkappa}{A} - f_r(\overset{\varkappa}{B})} \right),$$

wobei im zweiten Falle der Index $r = 0$ auszuschliessen ist. Wenn wir auch im ersten Falle den Factor, welcher dem Index 0 entspricht, heraussetzen, und nun, entsprechend der Bezeichnung x_m für $f_m(x)$, auch $\overset{\varkappa}{A}_r$ für $f_r(\overset{\varkappa}{A})$ setzen, so erhalten wir die Formeln:

$$\text{(IV.)} \qquad E_\varkappa(x) = \frac{x - \overset{\varkappa}{A}}{x - \overset{\varkappa}{B}} \prod_p \left(\frac{x - \overset{\varkappa}{A}_p}{x - \overset{\varkappa}{B}_p} \right);$$

$$\text{(V.)}\qquad E_{\varkappa,\lambda} = \frac{\overset{\varkappa}{A}-\overset{\lambda}{A}}{\overset{\varkappa}{A}-\overset{\lambda}{B}}\cdot\frac{\overset{\varkappa}{B}-\overset{\lambda}{B}}{\overset{\varkappa}{B}-\overset{\lambda}{A}}\prod_r\left(\frac{\overset{\varkappa}{A}-\overset{\lambda}{A}_r}{\overset{\varkappa}{B}-\overset{\lambda}{A}_r}\cdot\frac{\overset{\varkappa}{B}-\overset{\lambda}{B}_r}{\overset{\varkappa}{A}-\overset{\lambda}{B}_r}\right)\qquad (\varkappa \lessgtr \lambda);$$

$$\text{(VI.)}\qquad E_{\varkappa,\varkappa} = \overset{\varkappa}{q}\prod_s\left(\frac{\overset{\varkappa}{A}-\overset{\varkappa}{A}_s}{\overset{\varkappa}{B}-\overset{\varkappa}{A}_s}\cdot\frac{\overset{\varkappa}{B}-\overset{\varkappa}{B}_s}{\overset{\varkappa}{A}-\overset{\varkappa}{B}_s}\right);$$

wobei zu setzen sind:

für p alle Indices, die mit einem von $\varkappa$, $\varkappa'$ verschiedenen Element endigen;

für r alle diejenigen, welche mit einem von $\varkappa$, $\varkappa'$ verschiedenen Element anfangen und mit einem von λ, λ' verschiedenen endigen;

für s alle Indices, die mit einem von $\varkappa$, $\varkappa'$ verschiedenen Element anfangen und endigen.

Es genügt, die charakteristischen Gleichungen für die primitiven Transformationen aufzustellen. Diese sind:

$$\text{(VII.)}\qquad E(x_\varkappa,\,\xi) = \frac{E_\varkappa(\xi)}{E_\varkappa(x)\sqrt{E_{\varkappa,\varkappa}\frac{dx}{dx_\varkappa}}}\,E(x,\,\xi),$$

$$\text{(VIII.)}\qquad E_\varkappa(x_\lambda) = E_{\varkappa,\lambda}E_\varkappa(x),$$

$$\text{(IX.)}\qquad E_{\varkappa,\lambda} = E_{\lambda,\varkappa}.$$

Die Richtigkeit der letzten Formel lässt sich unmittelbar aus der Darstellung von $E_{\varkappa,\lambda}$ erkennen, wenn man den schon mehrfach benutzten Satz über die Constanz der Doppelverhältnisse anwendet. Auf dieselbe Weise erkennt man, dass von den Factoren des Products $E_{\varkappa,\varkappa}$ je zwei einander gleich sind; sodass nicht nur $E_{\varkappa,\varkappa}$, sondern auch

$$\sqrt{\frac{E_{\varkappa,\varkappa}}{\overset{\varkappa}{q}}}$$

eindeutig dargestellt werden kann durch ein Product von Doppelverhältnissen. Hiernach sind die sämmtlichen $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Grössen $E_{\varkappa,\lambda}$ dargestellt durch unendliche Producte, deren Factoren rational sind in den Coefficienten der ϱ primitiven Substitutionen $f_1, f_2, \dots f_\varrho$; vorausgesetzt, dass man sich diese durch ihre Doppelpunkte $\overset{\varkappa}{A}$, $\overset{\varkappa}{B}$ und Moduln $\overset{\varkappa}{q}$ gegeben denkt. Da aber nur Grössen vorkommen, die von einer linearen Transformation unabhängig sind, so enthalten die Ausdrücke nur $3\varrho-3$ wesentliche Constanten.

§ 7.

Wenn man von diesen unendlichen Producten übergeht zu den Summen der Logarithmen, so sind auch diese convergent und bestimmen analytische Functionen, welche unendlich gross und vieldeutig werden können nur durch die einzelnen Glieder der Ausdrücke. Daraus geht hervor, dass die Function

$$\log E(x,\ \xi) = \log(x-\xi)+\sum_n \log\frac{(x-\xi_n)(\xi-x_n)}{(x-x_n)(\xi-\xi_n)},$$

wenn man die Variabeln x und ξ auf das Innere der Nullfläche beschränkt, nur durch das Anfangsglied unendlich gross und vieldeutig werden kann. Denn fasst man eins der übrigen Glieder auf, so ist dies der Logarithmus einer quadratischen Function von x, die für $x=\xi_n$ und $\xi_{n'}$ verschwindet, für $x=\overset{n}{A}$ und $\overset{n}{B}$ unendlich gross wird. Ist p die Periode des Index n, also $n=cpc'$, so liegen $\overset{n}{A}$ und ξ_n beide im Kreise K_{cp}, also auch in demselben Grundkreise. Dasselbe gilt für $\overset{n}{B}=\overset{n'}{A}$ und $\xi_{n'}$; es sind also

$$\log\frac{x-\xi_n}{x-\overset{n}{A}} \quad \text{und} \quad \log\frac{x-\xi_{n'}}{x-\overset{n}{B}}$$

für das Nullgebiet als eindeutige Functionen zu betrachten. — Wenn man demnach irgend einen der 2ϱ Grundkreise durchläuft, so bleibt $\log E(x,\ \xi)$ ungeändert; dagegen ändert sich die Function um $2\pi i$ auf einem Wege, der den Punkt ξ umschliesst.

Bei der Function

$$\log E_\lambda(x) = \log\left(\frac{x-\overset{\lambda}{A}}{x-\overset{\lambda}{B}}\right)+\sum_r \log\left(\frac{x-\overset{\lambda}{A_r}}{x-\overset{\lambda}{B_r}}\right)$$

ist ebenfalls nur das erste Glied mehrdeutig, wenn man x auf die Nullfläche beschränkt; denn die Punkte $\overset{\lambda}{A_r}$, $\overset{\lambda}{B_r}$ (mit der Indicesentwickelung $(r\lambda\lambda\ldots)$, $(r\lambda'\lambda'\ldots)$) liegen in demselben Kreise K_r. Dagegen liegt $\overset{\lambda}{A}$ im Kreise K_λ, $\overset{\lambda}{B}$ im Kreise $K_{\lambda'}$; folglich ändert sich $\log E_\lambda(x)$ um $2\pi i$ auf einer Linie die den Kreis K_λ, aber nicht $K_{\lambda'}$, positiv umschliesst, um $-2\pi i$, wenn $K_{\lambda'}$ positiv umschlossen wird und nicht K_λ, und es bleibt $\log E_\lambda$ ungeändert, wenn entweder beide Kreise umschlossen werden oder keiner von beiden. — Eine Folge hiervon ist, dass zwischen diesen ϱ Functionen keine Gleichung von der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{\varrho} c_\lambda \log E_\lambda(x) = c,$$

wo die c Constanten sind, bestehen kann; denn der Ausdruck auf der linken Seite ändert sich auf dem Kreise K_λ um $2c_\lambda\pi i$. Diese ϱ Functionen sind daher linear unabhängig.

Da ferner $E_\lambda(x)$ sich jedesmal nur um einen constanten Factor ändert, wenn man x durch einen congruenten Werth ersetzt, so ist der logarithmische Differentialquotient von $E_\lambda(x)$ eine eindeutige Function $\Phi'(x)$, welche der Bedingung

$$\Phi'(x_m)dx_m = \Phi'(x)dx$$

genügt. Dasselbe gilt, zwar nicht von $\log E(x,\xi)$, aber von

$$\log\frac{E(x,\xi)E(y,\eta)}{E(x,\eta)E(y,\xi)};$$

denn es ist

$$(x_m,\ y;\ \xi,\ \eta) = (x,\ y;\ \xi,\ \eta)\frac{E_m(\xi)}{E_m(\eta)}.$$

Eine Function, welche diese Eigenschaften gemeinsam hat mit $\log(x,y;\ \xi,\eta)$ und den ϱ Ausdrücken $\log E_\lambda(x)$, wollen wir eine Integralfunction nennen und allgemein mit $J(x)$ bezeichnen. Eine solche kann eindeutig oder vieldeutig sein; ihr Differentialquotient aber muss beständig (von den wesentlich singulären Punkten abgesehen, ein Zusatz, den wir von jetzt ab nicht mehr wiederholen) den Charakter einer eindeutigen rationalen Function besitzen und der Gleichung

$$J'(x_m)dx_m = J'(x)dx$$

genügen. Unter diesen Integralfunctionen kann es solche geben, welche selbst eindeutig sind und ungeändert bleiben bei den Substitutionen f_m; letztere wollen wir invariante nennen und mit $\Phi(x)$ bezeichnen. Wenn zwei Integralfunctionen gegeben sind, so ist der Quotient ihrer Ableitungen eine Function $\Phi(x)$.

Andere Integralfunctionen und invariante lassen sich aus $\log(x,y;\ \xi,\eta)$ in folgender Weise bilden. Es sei a irgend ein nicht singulärer und zu ξ,η nicht congruenter Werth; wir setzen dann $x = a+t$ oder $\frac{1}{t}$, je nachdem a endlich oder unendlich gross ist.

In jedem Falle lässt sich dann die logarithmische Function in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von t entwickeln, deren Coefficienten in folgender Weise bezeichnet werden mögen:

$$F = \log(x,y;\ \xi,\eta) = F_0 - F_1\frac{t}{1} - F_2\frac{t^2}{2} - F_3\frac{t^3}{3} - \text{ etc.}$$

falls eindeutig sein. Daraus folgt dann, dass sie in der ganzen Nullfläche eindeutig sein muss und deswegen im unendlich fernen Punkte nicht logarithmisch singulär werden kann. Demnach kann auch jede Singularität in diesem Punkte aufgehoben werden. Wir brauchen nun nur folgenden Satz zu beweisen:

Eine eindeutige beständig endliche Integralfunction existirt nicht, ausser der Constanten;

dann ist klar, dass die aufgestellten Ausdrücke alle existirenden Integralfunctionen umfassen.

§ 8.

Es sei $f(x)$ eine rationale oder transcendente Function, welche im Innern und auf der Grenze des Nullgebiets beständig den Charakter einer eindeutigen ganzen Function besitzt, mit Ausnahme höchstens des unendlich fernen, aber auch dort sich wenigstens wie eine rationale verhält.

Die aus $f(x)$ durch Integration entspringende Function

$$g(x) = \int^x f(x)dx$$

wird im Allgemeinen eine mehrdeutige sein; wir bezeichnen mit $2\omega_a$ den Werth, um welchen $g(x)$ sich ändert, wenn x den Kreis K_a in positivem Sinne durchläuft ($\alpha = 1\ldots\varrho,\ 1'\ldots\varrho'$). Denkt man sich dann einen Kreis beschrieben, der alle diese 2ϱ Linien umschliesst, so ist die Summe der Perioden $2\omega_a$ bekanntlich gleich der Aenderung, welche $g(x)$ erfährt, wenn x diesen einen Kreis, ebenfalls positiv, durchläuft.

Setzt man nun $x = \frac{1}{t}$, und bezeichnet den Coefficienten von t^{-1} in der Entwickelung von $f(x)\frac{dx}{dt}$ nach aufsteigenden Potenzen von t durch

$$\left[f(x)\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}},$$

so ist der Werth dieses letzten Integrals offenbar gegeben durch die Formel

$$-2\pi i\left[f(x)\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}};$$

daher:

$$2\pi i\left[f(x)\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}} = -\sum_{\alpha=1}^{\varrho}(2\omega_\alpha + 2\omega_{\alpha'}).$$

Wenn der Punkt x den Kreis K_a in positivem Sinne durchläuft, so

bewegt sich $x_{a'} = f_{a'}(x)$ in negativem Sinne auf dem Kreise K_{a}. Man kann deswegen die Summe $2\omega_a + 2\omega_{a'}$ auf ein einziges Integral, ausgedehnt im positiven Sinne über den Kreis K_a, ersetzen:

$$2\omega_a + 2\omega_{a'} = \overline{\int_a}\left(f(x) - f(x_{a'})\frac{dx_{a'}}{dx}\right)dx.$$

Somit erhält man die Formel

$$2\pi i\left[f(x)\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}} = \sum_{a=1}^{\varrho}\overline{\int_a}\left(f(x_{a'})\frac{dx_{a'}}{dx} - f(x)\right)dx.$$

Wir fassen jetzt auch den Fall ins Auge, wo $f(x)$ in einzelnen Punkten innerhalb des Gebiets unendlich wird wie eine rationale Function, aber nicht auf der Grenze. Dann lässt sich eine rationale Function $R(x)$ angeben, welche nur innerhalb der Nullfläche unendlich wird, und zwar für die endlichen Punkte genau wie $f(x)$. Für die Differenz $f(x) - R(x)$ gilt dann die obige Formel; da aber die singulären Punkte von $R(x)$ sämmtlich ausserhalb der Kreise K_a liegen, so hat die Hinzufügung von $R(x)$ keinen Einfluss auf den Werth der Integrale $2\omega_a$; es ist also:

$$2\pi i\left[\left(f(x) - R(x)\right)\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}} = \sum_{a=1}^{\varrho}\overline{\int_a}\left(f(x_{a'})\frac{dx_{a'}}{dx} - f(x)\right)dx.$$

Dies gilt für jede Function $f(x)$, die im Nullgebiet den Charakter einer eindeutigen rationalen besitzt und auf den Grenzlinien nicht unendlich wird.

Den Fall, dass singuläre Punkte auf der Begrenzung selbst liegen, schliessen wir aus folgendem Grunde aus. Die Functionen, welche wir betrachten, hängen ausser von den eingeführten Variabeln nur ab von den Coefficienten der primitiven Substitutionen. Man kann deswegen die Nullfläche variiren, indem man irgend einen Kreis K_a durch einen unendlich nahen L_a ersetzt und gleichzeitig $K_{a'}$ durch denjenigen $L_{a'}$, welcher aus L_a durch dieselbe Transformation $f_{a'}$ hervorgeht, wie $K_{a'}$ aus K_a.

Um jetzt den im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Satz zu beweisen, nehmen wir an, es sei $J(x)$ eine Integralfunction, welche im Nullgebiet eindeutig ist und keine singulären Punkte besitzt. Daraus folgt, dass die ϱ Integrale

$$\overline{\int_a} J'(x)dx \qquad (a = 1, 2, \ldots \varrho)$$

den Werth 0 haben. Für $f(x)$ werde das Product gesetzt:

$$f(x) = -J'(x)\frac{\partial \log(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi};$$

wobei ξ einen Punkt innerhalb der Nullfläche bedeuten möge. Der letzte Factor ist eine Integralfunction zweiter Gattung, die innerhalb der Nullfläche unendlich gross wird nur im Punkte $x = \xi$, und zwar wie $-\frac{1}{x-\xi}$; es ist also in diesem Falle

$$R(x) = \frac{J'(\xi)}{x-\xi},$$

und daher

$$\left[\frac{dJ(x)}{dt} - \frac{J'(\xi)}{x-\xi}\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0.$$

Hieraus folgt aber, da wir $J(x)$ auch im unendlich fernen Punkte als regulär angenommen haben, dass $J'(\xi) = 0$, somit $J(\xi)$ eine Constante sein muss.

Aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen folgt jetzt:

Alle eindeutigen Functionen, welche beständig den Charakter rationaler besitzen und bei den Substitutionen x_{m} entweder ungeändert bleiben oder sich nur um additive Constanten ändern, lassen sich darstellen als beständig convergente Summen rationaler Functionen.

Ferner: Alle Integralfunctionen lassen sich zusammensetzen aus rationalen und Logarithmen rationaler Functionen von x.

Es sei jetzt $F(x)$ eine Function, welche beständig den Charakter einer eindeutigen rationalen besitzt und bei der Substitution x_{m} entweder ungeändert bleibt, oder sich nur um constante Factoren ändert. Der Logarithmus einer solchen ist offenbar eine Integralfunction und lässt sich wegen des rein logarithmischen Charakters aus den Functionen der ersten und dritten Gattung additiv zusammensetzen:

$$\log(F(x)) = C + \Sigma c \log(x, y; \xi, \eta) + \sum_{\alpha=1}^{\varrho} c_\alpha \log E_\alpha(x).$$

Da nun $(x, y; \xi, \eta)$ sich zerlegen lässt in einen Quotienten zweier E-Functionen, so kann man dieser Gleichung auch folgende Form geben:

$$\log F(x) = C + \Sigma \overset{\nu}{c} \log E(x, \overset{\nu}{\xi}) + \Sigma c_\alpha \log E_\alpha(x),$$

wo

$$\Sigma \overset{\nu}{c} = 0$$

ist und alle Grössen $\overset{\nu}{\xi}$ als unter einander incongruent angenommen werden dürfen.

Die Coefficienten $\overset{\nu}{c}$ und c_a müssen hier sämmtlich ganze Zahlen sein; denn $\overset{\nu}{c}\log E(x, \overset{\nu}{\xi})$ ändert sich um $2\pi i\overset{\nu}{c}$, wenn man den Punkt $\overset{\nu}{\xi}$ umschliesst, $c_a \log E_a(x)$ um $2\pi i c_a$ auf dem Kreise K_a; diese Zahlen müssen Vielfache von $2\pi i$ sein, da $F(x)$ eindeutig ist.

Der allgemeine Ausdruck von $F(x)$ ist daher folgender:

$$F(x) = C\Pi\{E(x, \overset{\nu}{\xi})\}^{m_\nu}\Pi(E_a^{n_a}(x)),$$

wo die m und n sämmtlich ganze Zahlen, und die Summe der Zahlen m gleich 0 ist.

Dieser Ausdruck kann, indem man jede Grösse $\overset{\nu}{\xi}$ so oft aufnimmt, wie die Zahl $\pm m_\nu$ angiebt, auch in dieser Form dargestellt werden:

$$F(x) = CE_m(x)\frac{E(x, \overset{1}{\xi})\dots E(x, \overset{\nu}{\xi})}{E(x, \underset{1}{\eta})\dots E(x, \underset{\nu}{\eta})},$$

wo $E_m(x)$ die zu irgend einem Index m gehörige Function bedeutet. $\overset{1}{\xi}\dots\overset{\nu}{\xi}$, $\overset{1}{\eta}\dots\overset{\nu}{\eta}$ sind dann die vollständigen Systeme der incongruenten Null- und Unendlichkeitswerthe von $F(x)$ *). Eine solche Function muss also für ebensoviel Punktgruppen 0 wie unendlich gross werden. Wenn mindestens ein Nullpunkt ξ von $F(x)$ existirt, so lässt sich der Factor $E_m(x)$ fortschaffen, indem man ξ durch einen congruenten Werth ersetzt.

Wenn man nun berücksichtigt, dass der Quotient

$$\frac{E(x, \xi)}{E(x, \eta)}$$

auch durch $(x, y; \xi, \eta)$ ersetzt werden kann, dieser Ausdruck aber, ebenso wie $E_m(x)$ ein Product von Linearfactoren ist, so folgt:

Jede invariante Function $\Phi(x)$, sowie jede, die den eindeutig rationalen Charakter besitzt und bei den Substitutionen sich nur um constante Factoren ändert, lässt sich als beständig convergentes Product von Linearfactoren darstellen.

Wir betrachten jetzt eine Function $G(x)$ von eindeutig rationalem Charakter, die folgende Eigenschaft besitzt: Wenn man x durch x_m ersetzt, so ändert sich $G(x)$ um einen Factor

$$\frac{C_m}{E_m(x)},$$

*) Diese Gleichung, verbunden mit den charakteristischen für $E(x, \xi)$, enthält das *Abel*sche Theorem für die Integralfunctionen der ersten Gattung.

wo C_m constant ist. Zu Functionen dieser Art kommen wir im letzten Paragraphen. Wenn $G(x) = 0$ oder $= \infty$ wird für einen Werth von x, so muss, da $E_m(x)$ nie 0 oder ∞ wird, dies für die ganze Gruppe der zugehörigen Punkte eintreten, und wir setzen bald voraus, dass $G(x)$ nie ∞ wird, da sich dies immer erreichen lässt durch Multiplication mit Factoren der Form

$$\frac{E(x,\xi)}{E(x,\eta)}.$$

Auch kann angenommen werden, dass kein Nullpunkt auf der Grenze liegt.

Wendet man auf die logarithmische Ableitung einer solchen Function den Integralsatz an, so ergiebt sich, da

$$d\log G(x_m) = d\log G(x) - d\log E_m(x)$$

ist:

$$2\pi i\left[\frac{d\log G(x)}{dt} - R(x)\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}} = \sum_{a=1}^{\varrho}\overline{\int_a} d\log E_a(x),$$

also, da

$$\overline{\int_a} d\log E_a(x) = 2\pi i$$

ist:

$$\left[\frac{d\log G(x)}{dt} - R(x)\frac{dx}{dt}\right]_{t^{-1}} = \varrho.$$

Diese Gleichung sagt offenbar nichts anderes aus, als dass die Anzahl der Punkte innerhalb der Nullfläche, wofür $G(x) = 0$ ist, ϱ beträgt; wenn, wie natürlich, der unendlich ferne Punkt mitgezählt wird.

Es würde sich offenbar nichts ändern, wenn $G(x)$ als mehrdeutig angenommen wird, aber so beschaffen, dass $G(x)$ auf geschlossenem Wege nur um constante Factoren zunimmt. Dieser Fall lässt sich übrigens auf den vorigen zurückführen durch Multiplication mit einem Factor, dessen Logarithmus ein Integral erster Gattung ist. Nur muss $G(x)$ selbst beständig von rationalem Charakter sein. Im letzten Paragraphen wird eine Function dieser Art aufgestellt, welche Quadratwurzel einer eindeutigen ist.

Dividirt man $G(x)$ durch die Function $E(x,\xi)$, welche der Bedingung

$$E(x_m,\xi) = \frac{E_m(\xi)}{E_m(x)\sqrt{\frac{dx}{dx_m}}E_{m,m}}E(x,\xi)$$

genügt, so ergiebt sich:

Eine Function $H(x)$, die Gleichungen von der Form

$$H(x_m) = c_m \sqrt{\frac{dx}{dx_m}}\, H(x)$$

genügt, muss für $\varrho-1$ Punktgruppen mehr verschwinden als unendlich gross werden und ausserdem 0 werden von der ersten Ordnung für $x=\infty$. Man kann noch Producte von Functionen der einen und der andern Art betrachten und dadurch Sätze ableiten, die mit bekannten in offenbarem Zusammenhang stehen.

§ 9.

Dass je zwei invariante Functionen $p=\Phi(x)$, $q=\Phi_1(x)$ durch eine algebraische Gleichung $G(p,q)=0$ mit einander verbunden sind, geht, wohl am einfachsten, in dieser Weise hervor. Es sei n die Anzahl der incongruenten Stellen, in denen p und q unendlich werden, und m die höchste Ordnungszahl. Bildet man die $\frac{(r+1)(r+2)}{2}-1$ Producte $p^\alpha q^\beta$, bei denen die Summe der Exponenten $\alpha+\beta \leqq r$ ist, so sind dies invariante Functionen, die sämmtlich nur an denselben Stellen, und an keiner von höherer Ordnung als rm, unendlich werden. Alle diese müssen sich durch $rm.n$ Integralfunctionen zweiter Gattung linear ausdrücken lassen; wenn also

$$\frac{(r+1)(r+2)}{2}-1 > rmn, \quad \text{d. h.} \quad r+3 > mn$$

angenommen wird, so muss zwischen ihnen eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten bestehen. Es muss daher auch eine irreductible Gleichung existiren, durch welche beide Functionen verbunden sind.

Auf die Beziehung zwischen diesen algebraischen Gleichungen und der Functionenklasse $\Phi(x)$ möchte ich etwas genauer eingehen, indem ich mich hierbei der Vorstellungen und Sätze bediene, welche der *Weierstrass*schen Theorie der *Abel*schen Functionen zu Grunde liegen.

Es sei $G(p,q)$ eine unzerlegbare ganze Function von p und q; so wird durch $G(p,q)=0$ ein algebraisches Gebilde definirt: die Gesammtheit der Werthsysteme (p,q), welche dieser Gleichung genügen.

Setzt man $p=\frac{1}{r}$, so wird $G(p,q)$ durch Multiplication mit einer bestimmten Potenz von r übergehen in eine unzerlegbare ganze Function von r und q; wenn $r=0$, $q=c$ ein Werthsystem ist, wofür diese verschwindet,

so wird das Werthepaar $p=\infty$, $q=c$ ebenfalls zum Gebilde (p, q) gerechnet. Ebenso kann q einen unendlich grossen Werth haben.

Ist nun $p=a$, $q=b$ eins der zum Gebilde gehörigen Werthepaare, so ist es möglich, ein Functionenpaar aufzustellen: $p=\varphi(t)$, $q=\psi(t)$, ausgedrückt durch Reihen nach aufsteigenden ganzen Potenzen von t, die innerhalb eines bestimmten Bezirks convergiren, das folgende Eigenschaften besitzt:

1) Die beiden Reihen genügen identisch der Gleichung $G(p, q)=0$ und reduciren sich für $t=0$ auf die gegebenen Werthe a, b.

2) Die Umkehrung der beiden Gleichungen $p=\varphi(t)$, $q=\psi(t)$ oder ihre Auflösung nach t liefert nur einen Werth dieser Grösse.

Damit die letzte Bedingung erfüllt ist, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass sich zwei ganze Zahlen m, n angeben lassen von der Beschaffenheit, dass $(p-a)^m(q-b)^n$ für $t=0$ von der ersten Ordnung verschwindet. Wenn $a=\infty$ ist, so tritt $\frac{1}{p}$ für $p-a$ ein. Man kann also die letzte Bedingung auch so ausdrücken, dass man sagt: es muss rationale Functionen von p, q geben, die für $t=0$ von der ersten Ordnung verschwinden.

Ein solches Functionenpaar nennt Herr *Weierstrass* ein Element des Gebildes. Beschränkt man t auf einen kleinen Bereich, der den Nullpunkt umgiebt, so bilden die entsprechenden Werthepaare (p, q) die Umgebung der Stelle (a, b) des Gebildes. Jedem Werthe von t in der Umgebung des Nullpunktes entspricht eine bestimmte Stelle (p, q) des Gebildes in der Umgebung von (a, b) und umgekehrt.

Die Grösse t, durch welche p und q dargestellt sind in der Nähe von (a, b), ist nicht vollständig bestimmt; sie kann ersetzt werden durch jede andere Grösse τ, die mit t verbunden ist durch eine Gleichung

$$\tau = \alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\text{etc.},$$

wo α von 0 verschieden ist. Von dem so entstehenden Functionenpaar $\bar{\varphi}(\tau)$, $\bar{\psi}(\tau)$ sagt man, dass es dasselbe Element darstelle. Deswegen kann für t immer eine rationale Function von p, q gewählt werden. Es kann aber der Fall eintreten, dass zu einem Werthepaar (a, b) verschiedene Elemente gehören. Dann ist (a, b) als Punkt des Gebildes so oft zu zählen, als es verschiedene Elemente giebt, die sich für $t=0$ auf (a, b) reduciren.

Es ist nun, wenn jedem Punkt ein Element zugeordnet ist, die Mög-

lichkeit gegeben, sich in dem Gebilde stetig zu bewegen. Man gehe von (a, b) aus zu einem andern Punkte (a_1, b_1) in der Umgebung von (a, b), also im Convergenzbezirk des Elements. (a_1, b_1) besitzt selbst eine Umgebung und liegt in der Umgebung anderer Stellen; man kann daher fortschreiten zu immer neuen Punkten (a_2, b_2), (a_3, b_3) etc., und zwar lässt sich beweisen, dass man durch eine endliche Anzahl derartiger Schritte zu jedem Punkte des Gebildes gelangen kann.

Da jedem Punkte (a, b) ein bestimmtes Element zugeordnet ist, so erhält eine rationale Function $R(p, q)$ in jedem Punkte einen bestimmten Werth, und wenn sie 0 oder ∞ wird, so existirt dafür eine bestimmte Ordnungszahl.

Es können jetzt aber auch allgemeinere Functionen von p, q betrachtet werden. Eine solche, $F(p, q)$, können wir uns zunächst in der Nähe eines Punktes (a, b) durch eine Reihe $\mathfrak{P}(t)$ definirt denken. Wenn man von hier aus $F(p, q)$ fortsetzen kann auf beliebigem Wege nach jedem andern Punkte des Gebildes, und zwar so, dass in der Nähe jeder Stelle, zu der man gelangt, $F(p, q)$ durch eine Reihe nach aufsteigenden ganzen Potenzen des zugehörigen t dargestellt werden kann, so sagt man, auch wenn die Function mehrdeutig ist, sie besitze beständig den Charakter einer rationalen. Von dieser Art sind die Integrale zweiter Gattung. Wenn die Potenzentwickelungen von F nie negative Potenzen enthalten, also F nie ∞ wird, so sagt man: F besitze den Charakter einer ganzen Function von (p, q). Dies ist die Eigenschaft der Integrale erster Gattung. Es gilt der Satz: Eine eindeutige Function von (p, q), welche beständig den Charakter einer rationalen besitzt, ist nothwendig eine rationale.

Ausser auf diese allgemeinen Sätze der *Weierstrass*schen Theorie beziehen wir uns im Folgenden noch auf einen speciellen aus der Theorie der Integrale.

Wenn die Gleichung $G(p, q) = 0$ vom Range — nach *Riemann*scher Bezeichnung vom Geschlechte — 0 ist, so giebt es eine rationale Function z von p und q, die in einem willkürlich angenommenen Punkte (p_0, q_0) von der ersten Ordnung verschwindet, in einem zweiten (p_1, q_1), den man ebenfalls willkürlich annehmen kann, in der gleichen Weise unendlich wird, an jeder andern Stelle dagegen einen von 0 verschiedenen endlichen Werth hat.

Ist die Gleichung von höherem Range, so existirt zwar keine rationale

Function von dieser Beschaffenheit, wohl aber eine transcendente, deren Logarithmus ein Integral dritter Gattung ist. Sie ist nicht eindeutig, besitzt aber beständig den Charakter einer rationalen und ändert sich auf geschlossenen Wegen nur um constante Factoren.

Kehren wir jetzt zu unserer Untersuchung zurück. Da p und q invariante Functionen der Klasse sind, so ist jede rationale Function von p, q ebenfalls eine Function $\Phi(x)$ der Klasse; ferner jede durch Integration einer rationalen entspringende

$$J(p, q) = \int R(p, q)\,dp$$

eine Integralfunction $J(x)$ in unserm Sinne. Allgemein muss jede Function von p, q, die beständig den Charakter einer rationalen besitzt, aufgefasst als abhängig von x, dieselbe Eigenschaft haben für alle Punkte der Ebene, mit Ausnahme der wesentlich singulären. Dies muss also auch gelten von der eben erwähnten Grösse z. Indem man zu z einen Factor hinzufügt, dessen Logarithmus eine Integralfunction erster Gattung ist, kann man z in eine eindeutige Function verwandeln; dann muss z zu denjenigen Functionen gehören, die im vorigen Paragraphen betrachtet und mit $F(x)$ bezeichnet wurden. Daraus folgt aber, dass z für eben soviel incongruente Werthe von x Null wie unendlich gross werden muss, wenn jeder Werth so oft gezählt wird, als die Ordnungszahl beträgt.

Wir denken uns jetzt die Functionen $p = \Phi(x)$, $q = \Phi_1(x)$ in folgender Weise gewählt:

p werde unendlich an einer Stelle $x = \xi$ der Nullfläche von der ersten Ordnung, ausserdem an beliebig vielen andern von irgend welcher Ordnung. q erhalte für $x = \xi$ einen endlichen Werth c, werde aber an den übrigen Unendlichkeitsstellen von p ebenfalls unendlich gross. Dem Werthepaar $p = \infty$, $q = c$ entspricht dann nur ein Punkt der Nullfläche, und in der Nähe desselben lassen sich p und q durch Potenzreihen von dieser Form darstellen:

$$p = \frac{\alpha}{x-\xi} + \alpha_0 + \alpha_1(x-\xi) + \text{etc.}$$

$$q = c + c_1(x-\xi) + c_2(x-\xi)^2 + \text{etc.}$$

Aus dieser Form der Gleichungen geht hervor, dass sie ein Element des Gebildes darstellen, dass man also hier $x-\xi$ für t setzen kann.

Wenn wir nun bei der Bildung der Grösse z für p_1, q_1 dieses

Werthepaar: $p_1 = \infty$, $q_1 = c$ nehmen, für (p_0, q_0) irgend einen andern Punkt des Gebildes, so wird z nur an dieser einen Stelle des Nullgebiets unendlich gross und zwar von der ersten Ordnung. Folglich muss z für einen und nur einen Punkt η der Nullfläche verschwinden und zwar ebenfalls von der ersten Ordnung. Es muss deshalb dort:

$$z = z_1(x-\eta)+z_2(x-\eta)^2+\text{etc.}$$

sein, wo z_1 nicht 0 ist. Das heisst:

Jeder Stelle (p_0, q_0) des Gebildes entspricht ein und nur ein Punkt der Nullfläche, und eine Function t von p und q, welche an dieser Stelle von der ersten Ordnung 0 wird, wird auch von der ersten Ordnung 0, als abhängig von x betrachtet, in dem entsprechenden Punkte der Nullfläche.

η kann auch der Punkt ∞ sein; dann tritt $\frac{1}{x}$ für $x-\eta$ ein.

Denkt man sich p, q in dieser Weise gewählt, so gehören zu einem Punkte (p_0, q_0) des Gebildes unendlich viele Werthe von x; diese sind aber alle unter einander congruent. Ist x_0 einer derselben, so kann man p und q nach Potenzen von $x-x_0$ $\left(\text{oder } \frac{1}{x}, \text{ wenn } x_0 = \infty\right)$ entwickeln. Diese Reihen stellen dann, im *Weierstrass*schen Sinne, das zur Stelle (p_0, q_0) gehörige Element des Gebildes dar. Deswegen kann man sagen, dass das Gebilde (p, q) durch die Functionen $p = \Phi(x)$, $q = \Phi_1(x)$ ausnahmslos dargestellt wird.

Ist $r = \Phi_2(x)$ irgend eine dritte invariante Function, so kann man diese als abhängig von p, q betrachten. Zu einem Punkte (p, q) gehören unendlich viele Werthe x; da diese aber sämmtlich congruent sind, nur ein Werth von r. r ist also eine eindeutige Function von (p, q). Ferner: ist x_0 einer der zu (p_0, q_0) gehörigen Werthe von x, so lässt sich r nach ganzen Potenzen von $x-x_0$, aber auch $x-x_0$ nach ganzen Potenzen der zu (p_0, q_0) gehörigen Grösse t entwickeln; folglich besitzt r beständig den Charakter einer rationalen Function von p, q. Mithin ist $\Phi_2(x)$ eine rationale Function von p, q.

Denkt man sich ferner irgend eine Integralfunction $J(x)$, so ist der Quotient

$$\frac{J'(x)}{\Phi'(x)} = \frac{dJ(x)}{dp}$$

eine invariante Function von x, also eine rationale von p, q; daher ist

$$J(x) = \int R(p, q)dp.$$

Speciell muss jeder Integralfunction, die nie ∞ wird, ein Integral erster Gattung entsprechen. Da nun genau ϱ linear unabhängige Integralfunctionen $J(x)$ erster Gattung existiren, so muss die zwischen p und q bestehende Gleichung vom Range ϱ sein.

Wenn in dem hier angegebenen Sinne ein algebraisches Gebilde, definirt durch eine Gleichung $G(p, q) = 0$ vom Range ϱ, dargestellt sein soll durch Functionen $p = \Phi(x)$, $q = \Phi_1(x)$ einer dritten Variabeln x, so ist nicht unumgänglich nothwendig, dass Φ und Φ_1 eindeutige Functionen von x sind; die Grundbedingungen sind vielmehr folgende:

Erstens muss x, als Function von p und q betrachtet, beständig den Charakter einer rationalen besitzen;

zweitens muss, wenn (p_0, q_0) irgend ein Punkt des Gebildes und x_0 einer der zugehörigen Werthe von x ist, $x - x_0$ $\left(\text{oder } \frac{1}{x}, \text{ wenn } x_0 = \infty\right)$ in der Nähe von (p_0, q_0) unendlich klein werden von der ersten Ordnung.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so lässt sich jedes Element des Gebildes darstellen durch Entwickelungen von p und q nach Potenzen von $x - x_0$, oder $\frac{1}{x}$, sowie umgekehrt jede derartige Entwickelung ein Element darstellt.

Ist $\varrho > 1$, so lassen sich Functionen x, die diesen beiden Bedingungen genügen, leicht definiren als Quotienten der Integrale linear-homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen von p und q sind. Der eine Coefficient kann willkürlich angenommen werden, da es nur auf den Quotienten der Integrale ankommt; der andere ist dann bestimmt bis auf $3\varrho - 3$ Constanten, die gleichfalls willkürlich gewählt werden können. Für $\varrho = 2$ und 3 sind diese Differentialgleichungen von mir angegeben worden in der anfangs citirten Arbeit über das Abbildungsproblem (S. 348–351). Für andere lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, als solche, die dieser besonderen Klasse angehören, sind die beiden Grundbedingungen sicher nicht erfüllt.

Kommt nun noch als dritte Bedingung hinzu, dass p, q eindeutige Functionen von x sein sollen, dass also x nicht den gleichen Werth in zwei verschiedenen Punkten des Gebildes annehmen darf, so wird hierdurch über die $3\varrho - 3$ Constanten der Differentialgleichung verfügt, aber nicht eindeutig,

wie schon aus dem Falle $\varrho = 1$ hervorgeht. Es existiren Functionen $\Phi(x)$ von ganz verschiedenem Charakter, die den drei Bedingungen genügen; die hier behandelten sind nur eine besonders einfache Art derselben.

Man könnte, da die Coefficienten der Gleichungen $G(p, q) = 0$ ebenfalls Grössen sind, die sich in bestimmter analytischer Form darstellen lassen, für diese Gleichungen das Problem der Darstellung als gelöst betrachten. Freilich ist die Lösung nicht eine so befriedigende wie die der Gleichungen ersten Ranges durch elliptische Functionen.

Für Gleichungen vom Range 1 gilt ebenso wie für solche vom Range 0 der Satz: Wenn man die Gesammtheit aller rationalen Functionen von p, q auffasst und aller, welche beständig den Charakter rationaler besitzen, so giebt es unter diesen eine, x, von der alle übrigen eindeutige Functionen sind; und die allgemeinste Grösse, welche dieser Bedingung genügt, ist eine linear gebrochene Function $f(x)$.

Von dieser Beschaffenheit ist bei unserer Untersuchung die Grösse x nicht. Es werden zwar Integrale zweiter Gattung als eindeutige Functionen von x dargestellt. Dagegen sind die Integrale erster Gattung vieldeutig und nur als Logarithmen eindeutiger dargestellt *).

§ 10.

Es handelt sich jetzt darum, die Function $E(x, \xi)$, als abhängig von p, q, durch Differentialgleichungen zu bestimmen. An Stelle von $\Phi(x)$ und $\Phi_1(x)$ mögen hier die Bezeichnungen $p(x)$ und $q(x)$ gewählt und zur Abkürzung

$$p(x) = p, \quad q(x) = q; \quad p(\xi) = p_0, \quad q(\xi) = q_0$$

gesetzt werden. — Wenn man die Gleichung:

$$\log \frac{E(x, \xi)E(y, \eta)}{E(x, \eta)E(y, \xi)} = \sum_{m} \log \frac{(\xi - x_m)(\eta - y_m)}{(\eta - x_m)(\xi - y_m)}$$

nach ξ differentiirt und den Differentialquotienten:

*) Die Arbeiten von den Herren *Poincaré* und *Klein* über diesen Gegenstand sind bekannt. Ich erhielt vor dem Abschluss dieser Untersuchung eine Schrift von Herrn *H. Weber:* Ein Beitrag zu Herrn *Poincarés* Theorie der *Fuchs*schen Functionen. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrgang 1886 No. 10, S. 359—370, deren Inhalt sich theilweise mit dieser deckt. Namentlich werden dort auch die Product-Ausdrücke eingeführt, aber unter anderen Voraussetzungen.

$$\text{(I.)}\qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\log E(x,\ \xi)\quad\text{mit}\quad L_2(x,\ \xi)$$

bezeichnet, so ergiebt sich:

$$L_2(x,\ \xi)-L_2(y,\ \xi) = \sum_m\left(\frac{1}{\xi-x_m}-\frac{1}{\xi-y_m}\right).$$

Sondert man hier dasjenige Glied ab, welches dem Index $m=0$ entspricht, so kann man in dem Rest y mit ξ zusammenfallen lassen. Da nun nach § 5, Gleichung (V.):

$$L_2(y,\ \xi)+\frac{1}{y-\xi} = 0\quad\text{ist für}\quad y=\xi,$$

so ergiebt sich:

$$\text{(II.)}\qquad L_2(x,\ \xi) = \frac{1}{\xi-x}+\sum_m{}'\left(\frac{1}{\xi-x_m}-\frac{1}{\xi-\xi_m}\right),$$

wo zu summiren ist über alle von 0 verschiedenen Indices m. Nun folgt aus den charakteristischen Gleichungen für $E(x,\ \xi)$ (§ 5, Gleichung (X.)):

$$L_2(x_n,\ \xi) = L_2(x,\ \xi)+\frac{\partial}{\partial\xi}\log E_n(\xi).$$

Als abhängig von x betrachtet ist daher $L_2(x,\ \xi)$ eine Integralfunction zweiter Gattung und zwar eine solche, die für $x=\xi$ unendlich wird wie $\frac{-1}{x-\xi}$, ausserdem nur für die congruenten Werthe.

Bildet man die Ableitung von $\log E(x,\ \xi)$ nach x und ξ und dividirt diese durch $p'(x)$ und $p'(\xi)$, so folgt hieraus, dass dieser Ausdruck eine invariante Function von x, und da er symmetrisch ist, auch von ξ sein muss. Er kann also ausgedrückt werden durch eine rationale und symmetrische Function der beiden Werthsysteme $(p,\ q)$ und $(p_0,\ q_0)$:

$$\text{(III.)}\qquad \frac{\partial^2\log E(x,\xi)}{p'(x)p'(\xi)\partial x\partial\xi} = R(p,\ q;\ p_0,\ q_0).$$

Die Bestimmung dieser rationalen Function ist eine Aufgabe, die ganz der Theorie der Integrale angehört. Nimmt man $p_0=p(\xi)$, $q_0=q(\xi)$ als constante Grössen an und $p'(\xi)$ als von 0 verschieden, so ist

$$\frac{\partial\log E(x,\xi)}{p'(\xi)\partial\xi} = \int^{p,q} R(p,\ q;\ p_0,\ q_0)\,dp+\text{Const.}$$

Da die Entwickelung von

$$\frac{1}{p-p_0} = \frac{1}{p(x)-p(\xi)}$$

nach aufsteigenden Potenzen von $x-\xi$ anfängt mit

$$\frac{1}{p'(\xi)(x-\xi)},$$

so ist das Integral der rationalen Function ein solches von der zweiten Gattung, das nur an der einen Stelle (p_0, q_0) unendlich wird und zwar wie $\frac{-1}{p-p_0}$. Da es ausserdem einer eindeutigen Function von x gleich ist, so muss es ungeändert bleiben auf denjenigen ϱ geschlossenen Linien des Gebildes, welche den Kreisen $K_1, \dots K_\varrho$ entsprechen. Durch diese Bedingungen ist die Integralfunction bestimmt bis auf eine additive Constante, R selbst also vollständig, und zwar erkennt man, dass die Coefficienten von R rational sind in den Coefficienten der Gleichung und in ϱ Systemen von Perioden der Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Wir nehmen deshalb diese Function als gegeben an.

Wir setzen jetzt x nahe an ξ voraus, beschränken also (p, q) auf die Umgebung von (p_0, q_0). Unter dieser Voraussetzung definiren wir die Integralfunction

$$\text{(IV.)} \qquad J(p,\ q;\ p_0,\ q_0) = \int^{p,\ q} R(p,\ q;\ p_0,\ q_0)dp$$

so, dass

$$\text{(V.)} \qquad J(p,\ q;\ p_0,\ q_0) + \frac{1}{p-p_0} = 0 \quad \text{ist für} \quad (p,\ q) = (p_0,\ q_0).$$

Wir können dann setzen:

$$\text{(VI.)} \qquad L_2(x,\ \xi) = J(p,\ q;\ p_0,\ q_0)p'(\xi) + \chi(\xi),$$

wo $\chi(\xi)$ eine noch zu bestimmende Function von ξ bedeutet. Ausser diesen Ausdrücken führen wir noch eine rationale Function $R(p_0, q_0)$ ein, den Werth von

$$\text{(VII.)} \qquad R(p,\ q;\ p_0,\ q_0) - \frac{1}{(p-p_0)^2} = R(p_0,\ q_0) \quad \text{für} \quad (p,\ q) = (p_0,\ q_0).$$

Nach diesen Vorbereitungen entwickeln wir beide Seiten der Gleichung (VI.) nach Potenzen von $x-\xi$. Man kann setzen:

$$R(p,\ q;\ p_0,\ q_0) = \frac{1}{(p-p_0)^2} + R(p_0,\ q_0) + c_1(p-p_0) + \text{etc.},$$

also:

$$J(p,\ q;\ p_0,\ q_0) = -\frac{1}{p-p_0}+R(p_0,\ q_0)(p-p_0)+\text{etc.}$$

Wenn man nun $\frac{1}{p-p_0}$ und $p-p_0$ durch Potenzreihen von $x-\xi$ ersetzt, so ergiebt sich aus (VI.):

$$L_2(x,\ \xi) = \frac{-1}{x-\xi}+A+B(x-\xi)+\text{etc.},$$

wo

$$A = \tfrac{1}{2}\frac{p''(\xi)}{p'(\xi)}+\chi(\xi),$$
$$B = \tfrac{1}{6}\frac{p'''(\xi)}{p'(\xi)}-\tfrac{1}{4}\left(\frac{p''(\xi)}{p'(\xi)}\right)^2+R(p_0,\ q_0)p'^2(\xi)$$

ist. — Andererseits können wir aber auch den Reihen-Ausdruck (II.) nach Potenzen von $x-\xi$ entwickeln. Auf diese Weise ergiebt sich:

$$L_2(x,\ \xi) = \frac{1}{\xi-x}+(x-\xi)\sum_{m}{}'\left(\frac{\frac{d\xi_m}{d\xi}}{(\xi-\xi_m)^2}\right)+\text{etc.}$$

Wenn wir beide Ausdrücke vergleichen und die Function

$$\text{(VIII.)}\qquad \sum_{m}{}'\left(\frac{\frac{dx_m}{dx}}{(x-x_m)^2}\right)\quad \text{mit}\quad \psi(x)$$

bezeichnen *), so ergiebt sich:

$$A = 0,\quad B = \psi(\xi);$$

oder:

$$\text{(IX.)}\qquad \chi(x) = -\tfrac{1}{2}\frac{d\log p'(x)}{dx},$$

$$\text{(X.)}\qquad \tfrac{1}{6}\frac{p'''(x)}{p'(x)}-\tfrac{1}{4}\left(\frac{p''(x)}{p'(x)}\right)^2 = \psi(x)-R(p,\ q)\left(\frac{dp}{dx}\right)^2.$$

---

*) Setzt man:

$$E(x,\ \xi) = e_1(x-\xi)+e_2(x-\xi)^2+e_3(x-\xi)^3+\text{etc.},$$

so ist $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, wie aus § 5, (V.) hervorgeht. Es ist dann

$$\frac{\partial \log E(x,\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi-x}-2e_3(x-\xi)-\text{etc.},$$

also $-\frac{1}{6}\psi(\xi)$ zugleich der Coefficient von $(x-\xi)^3$ in der Entwickelung von $E(x,\ \xi)$ nach Potenzen von $x-\xi$:

$$E(x,\ \xi) = (x-\xi)-\tfrac{1}{6}\psi(\xi)(x-\xi)^3-\text{etc.}$$

$\psi(x)$ wird für keinen Werth von x unendlich gross, dagegen 0 von der vierten Ordnung für $x=\infty$. Die charakteristische Eigenschaft von $\psi(x)$ ergiebt sich hier wie bei den früher eingeführten Functionen direct aus der Darstellung. Setzt man x_n für x, so wird

$$\psi(x_n) = \sum_m{}' \frac{\frac{dx_{mn}}{dx_n}}{(x_n-x_{mn})^2}.$$

Man kann aber hier mn ersetzen durch nm; denn zu jedem Index m existirt ein zweiter, p, so dass $mn=np$ ist; ist $m=0$, so ist auch $p=0$. Wenn man nun die identische Gleichung anwendet:

$$(f(x)-f(y))^2 = f'(x)f'(y)(x-y)^2,$$

welche für jede lineare Function gilt, indem man f_n für f und x_m für y nimmt, so ergiebt sich:

$$(x_n-x_{nm})^2 = \frac{dx_n}{dx}\cdot\frac{dx_{nm}}{dx_m}(x-x_m)^2,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\frac{dx_{nm}}{dx_n}}{(x_n-x_{nm})^2} = \left(\frac{dx}{dx_n}\right)^2 \frac{\frac{dx_m}{dx}}{(x-x_m)^2};$$

mithin:

$$\text{(XI.)} \qquad \psi(x_n)\left(\frac{dx_n}{dx}\right)^2 = \psi(x).$$

Hieraus folgt, dass der Quotient:

$$\text{(XII.)} \qquad \frac{\psi(x)}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2} = R_1(p,\ q)$$

eine rationale Function ist. Die Bestimmung dieser rationalen Function ist das bekannte, noch zu lösende Problem. Es hatte sich am Schluss von § 8 ergeben, dass eine Function $H(x)$, die charakteristischen Gleichungen von der Form

$$H(x_m) = C_m\sqrt{\frac{dx}{dx_m}}\,H(x)$$

genügt, für $\varrho-1$ Punktgruppen mehr verschwinden als unendlich gross werden muss. $\psi(x)$ ist das Product der vierten Potenz einer solchen Function mit einer invarianten; folglich wird $\psi(x)=0$ für $4\varrho-4$ Punkt-

gruppen; ausserdem für $x=\infty$ von der vierten Ordnung. Hieraus folgt, dass nicht mehr als $3\varrho-3$ linear unabhängige Functionen existiren können, welche nie unendlich werden und denselben charakteristischen Gleichungen genügen wie $\psi(x)$.

Wenn wir den Ausdruck für $\psi(x)$ in die Gleichung (X.) einsetzen, so erhalten wir die Differentialgleichung für $p(x)$.

Wir denken uns jetzt eine Integralfunction erster Gattung:

$$\text{(XIII.)} \qquad J(x) = \int H(p,\, q)\,dp,$$

so gewählt, dass die $2\varrho-2$ wesentlichen Nullpunkte von $J'(x)$ paarweise zusammenfallen und demnach nicht nur $J'(x)$, sondern auch $\sqrt{J'(x)}$ eine Function ist, die beständig den Charakter einer ganzen rationalen besitzt. Sie ist zwar nicht eindeutig, sondern kann auf geschlossenen Wegen ihr Zeichen ändern, könnte aber durch Multiplication mit Quadratwurzeln der Grössen $E_a(x)$ in eine eindeutige verwandelt werden. — Betrachtet man an Stelle von $E(x,\, \xi)$ das Product

$$\text{(XIV.)} \qquad E(x,\, \xi)\sqrt{J'(x)}\sqrt{J'(\xi)} = G(x,\, \xi),$$

so wird diese Function im Punkte $x=\infty$ nicht mehr singulär, da zwar $E(x,\, \xi)$ für $x=\infty$ von der ersten Ordnung unendlich gross wird, dafür aber $J'(x)$ von der zweiten Ordnung 0. — Diese Function $G(x,\, \xi)$ genügt den charakteristischen Gleichungen

$$\text{(XV.)} \qquad G(x_n,\, \xi) = \pm\frac{E_n(\xi)}{E_n(x)\sqrt{E_{n,n}}}\, G(x,\, \xi),$$

wie unmittelbar aus denen für $E(x,\, \xi)$ hervorgeht; sie wird 0 für ϱ Punktgruppen: nämlich $x=\xi$ und die Nullwerthe von $\sqrt{J'(x)}$. Von dem Logarithmus dieser Function G lassen sich die Ableitungen nach p und p_0 vollständig angeben. Es ist

$$\frac{\partial \log G(x,\, \xi)}{\partial p_0} = \frac{\partial \log E(x,\, \xi)}{p'(\xi)\partial\xi} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log J'(\xi)}{\partial p_0}.$$

Aber, nach (VI.) und (IX.):

$$\frac{\partial \log E(x,\, \xi)}{p'(\xi)\partial\xi} = J(p,\, q;\; p_0,\, q_0) - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log p'(\xi)}{\partial p_0};$$

folglich, da

$$J'(\xi) = H(p_0, q_0)p'(\xi):$$

$$\frac{\partial \log G(x,\xi)}{\partial p_0} = J(p, q; p_0, q_0) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log H(p_0, q_0)}{\partial p_0}.$$

Die Ableitung derselben Function $\log G$ nach p ergiebt sich hieraus, indem man (p, q) mit (p_0, q_0) vertauscht:

$$\text{(XVI.)} \quad \frac{\partial \log G}{\partial p} = J(p_0, q_0; p, q) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \log H(p, q)}{\partial p}.$$

Wenn man das Zeichen von $\sqrt{J'(x)}$ so fixirt, dass diese Grösse für $x = \xi$ in $\sqrt{J'(\xi)}$ übergeht, so ist, da

$$\frac{E(x,\xi)}{x-\xi} = 1 \quad \text{ist für} \quad x = \xi,$$

auch:

$$\frac{G(x,\xi)}{x-\xi} = J'(\xi) \quad \text{für} \quad x = \xi.$$

Gleichzeitig ist

$$\frac{p(x)-p(\xi)}{x-\xi} = p'(\xi) \quad \text{für} \quad x = \xi,$$

also:

$$\frac{G(x,\xi)}{p-p_0} = H(p_0, q_0) \quad \text{für} \quad x = \xi.$$

Es wird also, wenn wir G als Function von p und q betrachten, definirt zunächst für die Umgebung der Stelle (p_0, q_0), in diesem Punkte selbst $G = 0$ und

$$\text{(XVII.)} \quad \frac{dG}{dp} = H(p_0, q_0).$$

Fügt man diese Bedingung noch hinzu zu der Differentialgleichung (XVI.), so ist hierdurch G als Function von p und q vollständig bestimmt.

Diese Function G ist bekannt; abgesehen von einem constanten Factor, lässt sie sich darstellen durch eine ungerade Thetafunction, deren Variabeln und Moduln die Grössen

$$\text{(XVIII.)} \quad v_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{E_\alpha(x)}{E_\alpha(\xi)},$$

$$\text{(XIX.)} \quad \tau_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2\pi i}\log E_{\alpha,\beta}$$

sind:

$$\text{(XX.)} \quad G(x,\xi) = \vartheta(v_1, \dots v_\varrho).$$

Es ist also

$$\text{(XXI.)} \qquad E(x,\, \xi) = \frac{\vartheta(v_1, \ldots v_\varrho)}{\sqrt{J'(x)}\sqrt{J'(\xi)}}.$$

Setzt man jetzt:

$$\sqrt{J'(x)}\sqrt{J'(\xi)} = z,$$

so folgt aus den Gleichungen (X.), (XII.) und (XIII.), dass z der Differentialgleichung genügt:

$$\text{(XXII.)} \qquad \frac{d^2z}{dp^2} - \frac{1}{H}\frac{dH}{dp}\frac{dz}{dp} + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{H}\frac{dH}{dp}\right)^2 - \frac{1}{2H}\frac{d^2H}{dp^2} - 3R_1 + 3R\right)z = 0.$$

Derselben Gleichung genügt, wie leicht zu sehen, auch das Product $x.z$; es sind also x und $E(x,\, \xi)$ bestimmt als Quotienten von Functionen, welche Differentialgleichungen von bekannter Form erfüllen.

Zürich, den 24. Juli 1886.

Ueber die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Auf die Untersuchungen aus der Theorie der *Gruppen*, die den Inhalt dieser Arbeit bilden, bin ich durch das Studium der merkwürdigen Abhandlung des Herrn *Kronecker* „Ueber die Irreductibilität von Gleichungen" (Monatsber. der Berl. Akad. 1880, Seite 155) geführt worden, insbesondere durch den Versuch, die am Ende von Seite 157 angedeuteten Relationen aufzufinden. Ueber die betrachteten *Elemente* mache ich diejenigen Voraussetzungen, die ich in meiner Arbeit „Neuer Beweis des *Sylow*schen Satzes" (dieses Journal Bd. 100) zusammengestellt habe. Für den Fall, dass je zwei Elemente *vertauschbar* sind, nennt Herr *Kronecker* (Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen. Monatsber. 1870) zwei Elemente A und B *äquivalent* oder *congruent* in Bezug auf eine Gruppe $\mathfrak{G}$,

$$A \sim B \quad (\text{mod.}\, \mathfrak{G}),$$

wenn AB^{-1} in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, wenn also $A = GB$ ist, wo G ein Element der Gruppe $\mathfrak{G}$ bedeutet. Herr *Cam. Jordan* (Sur la limite de transitivité des groupes non alternés. Bull. de la Soc. Math. de France, T. I) wendet diese Definition auch in dem Falle an, wo die Elemente A und B mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind. Ich will sie hier benutzen, ohne über die Vertauschbarkeit der betrachteten Elemente und Gruppen eine Voraussetzung zu machen.

Die Anzahl der (mod. $\mathfrak{G}$) verschiedenen Elemente einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{S}$ bezeichne ich mit $(\mathfrak{S}:\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{G}$ ein *Divisor* von $\mathfrak{S}$ (sind alle Elemente von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{S}$ enthalten), so ist nach dem *Lagrange*schen Satze $(\mathfrak{S}:\mathfrak{G}) = \frac{s}{g}$, wo s und g die Ordnungen der Gruppen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}$ bezeichnen. Im allgemeinen Falle sei $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Divisor von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}$,

und sei d seine Ordnung, also die Anzahl der Elemente, welche die Gruppen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}$ gemeinsam haben. Sind dann A und B zwei Elemente von $\mathfrak{S}$, so ist auch AB^{-1} in $\mathfrak{S}$ enthalten. Ist ferner $A \sim B$ (mod. $\mathfrak{G}$), so ist AB^{-1} auch in $\mathfrak{G}$ und folglich auch in $\mathfrak{D}$ enthalten, und daher ist auch $A \sim B$ (mod. $\mathfrak{D}$). Mithin ist

$$(\mathfrak{S}:\mathfrak{G}) = (\mathfrak{S}:\mathfrak{D}) = \frac{s}{d}.$$

Für manche Untersuchungen kann es zweckmässig erscheinen, $A \sim B$ (mod. $\mathfrak{G}$) zu nennen, wenn $A = BG$ und $G (= B^{-1}A)$ ein Element von $\mathfrak{G}$ ist. Diese Bemerkung weist darauf hin, dass der oben erklärte Congruenzbegriff nur ein specieller Fall eines allgemeineren, für die Untersuchung von Gruppen nicht vertauschbarer Elemente sehr wichtigen Begriffes ist. Sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Gruppen, so nenne ich ein Element B einem anderen Elemente A congruent (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$), wenn

$$GAH = B$$

ist, wo G der Gruppe $\mathfrak{G}$ und H der Gruppe $\mathfrak{H}$ angehört. Aus dieser Gleichung ergiebt sich $A = G^{-1}BH^{-1}$. Da G^{-1} ein Element von $\mathfrak{G}$ ist, so ist folglich $A \sim B$ (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$), wenn $B \sim A$ (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$) ist. Ist ferner $A = G_1CH_1$ und $B = G_2CH_2$, und setzt man $G_2G_1^{-1} = G$ und $H_1^{-1}H_2 = H$, so ist auch $B = GAH$. Sind also zwei Elemente einem dritten congruent, so sind sie es auch unter einander. Ist nun $\mathfrak{S}$ eine gegebene Gruppe, so nenne ich die Gesammtheit derjenigen Elemente von $\mathfrak{S}$, welche einem bestimmten unter ihnen (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$) congruent sind, eine ***Klasse congruenter Elemente.*** Von den Elementen einer solchen Klasse sind dann auch je zwei unter einander congruent, und die Klasse ist durch jedes ihrer Elemente vollständig bestimmt, oder es kann jedes ihrer Elemente als ***Repräsentant*** der Klasse gewählt werden. Die Anzahl der Klassen, in welche die Elemente von $\mathfrak{S}$ zerfallen, oder die Anzahl der (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$) incongruenten Elemente von $\mathfrak{S}$ bezeichne ich mit $(\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$.

§ 1.

Aus der Gleichung $GAH = B$ folgt $H^{-1}A^{-1}G^{-1} = B^{-1}$. Ist also $A \sim B$ (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$), so ist $A^{-1} \sim B^{-1}$ (modd. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$), und bilden $S_1, S_2, \dots S_m$ ein vollständiges System incongruenter Elemente von $\mathfrak{S}$ (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$), so

bilden $S_1^{-1}, S_2^{-1}, \dots S_m^{-1}$ ein solches System (modd. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$). Mithin ist

$$(1.) \quad (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{S}:\mathfrak{H}, \mathfrak{G}).$$

Wie ich in meiner oben citirten Arbeit gezeigt habe, giebt es in jedem Elementensystem eine und nur eine Gruppe der Ordnung 1, *die Hauptgruppe*. Dieselbe besteht aus einem einzigen Elemente E, dem *Hauptelement*, welches eben dadurch, dass es schon für sich allein eine Gruppe bildet, vollständig charakterisirt ist. Ist $\mathfrak{E}$ die Hauptgruppe, so ist die oben mit $(\mathfrak{S}:\mathfrak{G})$ bezeichnete Zahl gleich

$$(2.) \quad (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}) = (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{E}) = (\mathfrak{S}:\mathfrak{E}, \mathfrak{G}) = \frac{s}{d}.$$

Durch diese Gleichung wird die Einführung des Zeichens $(\mathfrak{S}:\mathfrak{G})$ auch für den Fall nicht vertauschbarer Elemente gerechtfertigt.

Aus der Gleichung $GAH = B$ ergiebt sich ferner

$$(P^{-1}GP)(P^{-1}AQ)(Q^{-1}HQ) = P^{-1}BQ.$$

Sind daher P und Q zwei Elemente von $\mathfrak{S}$, so bilden $P^{-1}S_1Q, \dots P^{-1}S_mQ$ ein vollständiges System incongruenter Elemente von $\mathfrak{S}$ (modd. $P^{-1}\mathfrak{G}P$, $Q^{-1}\mathfrak{H}Q$), und folglich ist

$$(3.) \quad (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{S}:P^{-1}\mathfrak{G}P, \quad Q^{-1}\mathfrak{H}Q).$$

Mit $Q^{-1}\mathfrak{H}Q$ ist hier die (der Gruppe $\mathfrak{H}$ *ähnliche*) Gruppe bezeichnet, die von den Elementen $Q^{-1}HQ$ gebildet wird, wo H die Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft. In ähnlicher Weise zeigt man, dass allgemein, auch wenn P nicht der Gruppe $\mathfrak{S}$ angehört, die Gleichung gilt

$$(4.) \quad (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = (P^{-1}\mathfrak{S}P : P^{-1}\mathfrak{G}P, \; P^{-1}\mathfrak{H}P).$$

Sei $\mathfrak{G}'$ ein Divisor von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}'$ ein Divisor von $\mathfrak{H}$. Ist dann $A \sim B$ (modd. $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$), so ist offenbar auch $A \sim B$ (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$). Aus den verschiedenen Klassen, in welche die Elemente von $\mathfrak{S}$ (modd. $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$) zerfallen, entstehen daher die Klassen (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$), indem sich mehrere Klassen in eine vereinigen. Daher ist

$$(5.) \quad (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) \leqq (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'),$$

und nur dann

$$(\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'),$$

wenn je zwei Elemente von $\mathfrak{S}$, die (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$) congruent sind, auch (modd. $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$) congruent sind.

Sei $\mathfrak{N}$ ein gemeinsamer Divisor von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$, n seine Ordnung, und sei die Gruppe $\mathfrak{N}$ mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ vertauschbar. Betrachtet man jeden Complex von n Elementen der Gruppe $\mathfrak{S}$, die einander (mod. $\mathfrak{N}$) congruent sind, als *ein* Element, so bilden diese $\frac{s}{n}$ complexen Elemente eine Gruppe, die ich nach dem Vorgange des Herrn *Jordan* (l. c. pag. 46) mit $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{N}}$ bezeichne. Dann ist, wie leicht zu sehen,

$$(\mathfrak{S}:\mathfrak{G},\ \mathfrak{H}) = \left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{N}} : \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{N}},\ \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{N}}\right).$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo die Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ Divisoren von $\mathfrak{S}$ sind. Für diesen kann man die Zahl $m = (\mathfrak{S}:\mathfrak{G},\ \mathfrak{H})$ ermitteln, indem man untersucht, wie viele Male die Gleichung

$$(6.)\qquad GSH = S$$

befriedigt wird, wenn G alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$, H die von $\mathfrak{H}$ und S die von $\mathfrak{S}$ durchläuft. Ist S_λ ein bestimmtes der s Elemente von $\mathfrak{S}$, und d_λ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $GS_\lambda H = S_\lambda$, so ist diese Zahl gleich $d_1 + d_2 + \cdots + d_s$. Nun seien

$$(7.)\qquad S_1,\quad S_2,\quad \ldots\quad S_c$$

die c Elemente von $\mathfrak{S}$, die $\sim S_1(\text{modd. } \mathfrak{G},\ \mathfrak{H})$ sind. Sind dann α und β zwei verschiedene oder gleiche Indices von 1 bis c, so giebt es in den Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Elemente G_α und H_α, die der Gleichung $G_\alpha S_\alpha H_\alpha = S_1$ genügen, und zwei Elemente G_β und H_β, die der Gleichung $G_\beta S_\beta H_\beta = S_1$ genügen. Aus jeder Gleichung von der Form $GS_1H = S_1$ folgt, wenn man $G_\beta^{-1} G G_\alpha = G'$ und $H_\alpha H H_\beta^{-1} = H'$ setzt, die Gleichung $G' S_\alpha H' = S_\beta$, und umgekehrt aus jeder Gleichung dieser Form eine von der Form $GS_1H = S_1$. Daher ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung $GS_\alpha H = S_\beta$, in welcher S_α und S_β zwei gegebene Elemente der betrachteten Klasse sind, gleich d_1, und speciell ist für $\alpha = \beta$ die Zahl $d_\alpha = d_1$. Durchläuft also G alle Elemente von $\mathfrak{G}$ und H die von $\mathfrak{H}$, so stellt GS_1H jedes der c Elemente (7.) d_1 Mal dar, und mithin ist $cd_1 = gh$, wo g und h die Ordnungen der Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind. Durchläuft jetzt G die Elemente von $\mathfrak{G}$ und H die von $\mathfrak{H}$, S aber nicht alle Elemente von $\mathfrak{S}$, sondern nur die c Elemente (7.), so ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung (6.) gleich

$$(8.)\qquad d_1 + d_2 + \cdots + d_c = cd_1 = gh.$$

Da diese Anzahl für jede Klasse dieselbe ist, so ist folglich

$$(9.)\quad d_1+d_2+\cdots+d_s = ghm,$$

wo m die Anzahl der Klassen ist. Es ergiebt sich also der Satz:

I. *Sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{S}$, durchläuft S alle Elemente von $\mathfrak{S}$, G die von $\mathfrak{G}$ und H die von $\mathfrak{H}$, so ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung $GSH = S$ gleich ghm, wo g die Ordnung von $\mathfrak{G}$, h die von $\mathfrak{H}$ bezeichnet, und wo $m = (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ die Anzahl der (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$) incongruenten Elemente von $\mathfrak{S}$ ist.*

Da gleichzeitig mit H auch H^{-1} die Elemente der Gruppe $\mathfrak{H}$ durchläuft, so kann man in der Gleichung (6.) auch H durch H^{-1} ersetzen, und erkennt so, dass auch die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$(10.)\quad GS = SH \quad \text{oder} \quad S^{-1}GS = H$$

gleich ghm ist. Folglich ist d_λ die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$(11.)\quad S_\lambda^{-1}GS_\lambda = H$$

oder die Ordnung des grössten gemeinsamen Divisors der beiden Gruppen $\mathfrak{H}$ und

$$(12.)\quad \mathfrak{G}_\lambda = S_\lambda^{-1}\mathfrak{G}S_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots s).$$

Ist $\mathfrak{G}'$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}'$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$, durchläuft G' die Elemente von $\mathfrak{G}'$ und H' die von $\mathfrak{H}'$, so ist jede Lösung der Gleichung $G'SH' = S$ auch eine Lösung der Gleichung $GSH = S$, und folglich ist für jene Gleichung die Anzahl der Lösungen nicht grösser als für diese. Ist also $m' = (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}', \mathfrak{H}')$, so ist

$$(13.)\quad g'h'm' \geqq ghm, \qquad m' \geqq m.$$

§ 2.

Jede der mannigfachen Arten, die Anzahl der Lösungen der Gleichung (6.) oder (10.) § 1 abzuzählen, führt zu einer Darstellung der Zahl $m = (\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. Sind unter den s Zahlen $d_1, d_2, \ldots d_s$ genau k_d gleich d, so ist $d_1+d_2+\cdots+d_s = k_1+2k_2+3k_3+\cdots$. Aus der Gleichung (8.) § 1, in welcher $d_1 = d_2 = \cdots = d_r$ ist, ergiebt sich aber, dass dk_d durch gh theilbar ist*). Mithin ist

$$(1.)\quad m = \sum_\lambda \frac{\lambda k_\lambda}{gh},$$

und in dieser Summe ist jedes Glied eine ganze Zahl.

*) Für den Fall $d = 1$ hat diese Bemerkung schon *Cauchy* gemacht, Compt. rend. tom. 21, pag. 1039. Ich citire diese Abhandlung im Folgenden mit *C.*

Ist ein bestimmtes Element H der Gruppe $\mathfrak{H}$ in genau λ der Gruppen

$$(2.)\qquad \mathfrak{G}_1,\quad \mathfrak{G}_2,\quad \ldots\quad \mathfrak{G}_s$$

enthalten, so giebt es in $\mathfrak{S}$ genau λ Elemente S, die der Gleichung

$$(3.)\qquad S^{-1}GS = H$$

genügen. Ist also g_λ die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{H}$, die in genau λ der s Gruppen (2.) vorkommen, so ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung (3.) gleich

$$(4.)\qquad ghm = \sum_{\nu=1}^{s} d_\nu = \sum_{\lambda=1}^{s} \lambda g_\lambda.$$

Sind S_α, S_β, ... $S_\varkappa$ die g Elemente von $\mathfrak{G}$, so sind die Gruppen $\mathfrak{G}_\alpha$, $\mathfrak{G}_\beta$, ... $\mathfrak{G}_\varkappa$ alle gleich $\mathfrak{G}$, und ebenso sind auch je g der s Gruppen (2.) einander gleich. Sind $S_1, S_2, \ldots S_{\frac{s}{g}}$ die $\frac{s}{g}$ (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}$) verschiedenen Elemente von $\mathfrak{S}$, so ist daher

$$(5.)\qquad hm = \sum_{\nu=1}^{\frac{s}{g}} d_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\frac{s}{g}} \lambda h_\lambda,$$

wo h_λ die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{H}$ ist, welche in genau λ der Gruppen

$$(6.)\qquad \mathfrak{G}_1,\quad \mathfrak{G}_2,\quad \ldots\quad \mathfrak{G}_{\frac{s}{g}}$$

vorkommen.

Die Anzahl der Lösungen der Gleichung (3.) kann man auch in folgender bemerkenswerthen Weise abzählen. Zwei Elemente A und B mögen *ähnlich* heissen (in Bezug auf $\mathfrak{S}$), wenn es *in der Gruppe* $\mathfrak{S}$ ein Element S giebt, das der Gleichung $S^{-1}AS = B$ genügt*). Ich theile nun die Elemente von $\mathfrak{S}$ in *Klassen ähnlicher Elemente* ein, indem ich zu einer Klasse alle diejenigen Elemente vereinige, welche einem bestimmten, und folglich auch unter einander ähnlich sind. Ist l die Anzahl der Klassen, so nenne ich sie in einer beliebigen Reihenfolge die erste, zweite, ... $l$te Klasse. Sei s_λ die Anzahl der Elemente der λten Klasse und g_λ die Anzahl derjenigen unter ihnen, die in $\mathfrak{G}$ enthalten sind. Ist $g_\lambda > 0$ und sind

$$(7.)\qquad G_1,\quad G_2,\quad \ldots\quad G_{g_\lambda}$$

die in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Elemente der λten Klasse, so untersuche ich zunächst, wie viele Lösungen die Gleichung (3.) zulässt, wenn S alle Elemente von

---

*) Wenn ausser dem Hauptelemente E kein Element von $\mathfrak{H}$ einem Elemente von $\mathfrak{G}$ ähnlich ist, so haben $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}_\lambda$ nur $d_\lambda = 1$ Element gemeinsam, und mithin ist $d_1 + d_2 + \cdots + d_s = s = ghm$, also ist s durch gh theilbar. (*C.* pag. 849.)

$\mathfrak{S}$ durchläuft, G aber nicht alle Elemente von $\mathfrak{G}$, sondern nur die g_λ Elemente (7.). Ist G_γ ein bestimmtes dieser Elemente, und durchläuft S die s Elemente von $\mathfrak{S}$, so stellt $S^{-1}G_\gamma S$ sämmtliche s_λ Elemente der λten Klasse und jedes gleich oft dar, also jedes $\frac{s}{s_\lambda}$ Mal. Da diese Zahl von γ unabhängig ist, so stellt $S^{-1}GS$, wenn G die Elemente (7.) durchläuft, jedes Element der λten Klasse $\frac{s}{s_\lambda}g_\lambda$ Mal dar. Sind also unter den Elementen der λten Klasse h_λ in $\mathfrak{H}$ enthalten, so kommt es $\frac{s}{s_\lambda}g_\lambda h_\lambda$ Mal vor, dass $S^{-1}GS$ ein Element von $\mathfrak{H}$ wird, oder dass die Gleichung (3.) erfüllt wird. Durchläuft also G nicht nur die Elemente (7.), sondern alle Elemente von $\mathfrak{G}$, so ist die Anzahl der Lösungen der Gleichung (3.) gleich $\sum_\lambda' \frac{s}{s_\lambda}g_\lambda h_\lambda$, und da diese Anzahl gleich ghm ist, so ist

$$(8.)\qquad \frac{gh}{s}m = \sum_\lambda \frac{g_\lambda h_\lambda}{s_\lambda}.$$

In dieser Formel sind g_λ, h_λ, s_λ die Anzahl der Elemente der λten Klasse, die in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}$ enthalten sind.

Ist $\mathfrak{S}$ die Gruppe aller $s = n!$ Substitutionen von n Symbolen (die *symmetrische* Gruppe vom *Grade* n), so kann man die Zahlen s_λ nach der in § 6 angegebenen Formel (6.) berechnen. In diesem Falle sind, falls G eine bestimmte Substitution und g ihre Ordnung ist, die Elemente G und G^γ ähnlich, wenn γ zu g theilerfremd ist. Ist daher $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Potenzen von G, so befinden sich unter ihren g Elementen $\varphi(g)$, die dem Elemente G ähnlich sind, und wenn d ein Divisor von g ist, $\varphi(d)$, die dem Elemente $G^{\frac{g}{d}}$ ähnlich sind. Sei G_λ irgend ein Element der λten Klasse von $\mathfrak{S}$, sei $\mathfrak{G}_\lambda$ die Gruppe der Potenzen von G_λ und $m_\lambda = (\mathfrak{S} : \mathfrak{G}_\lambda, \mathfrak{H})$. Wählt man für G_λ irgend ein anderes Element der λten Klasse, $P^{-1}G_\lambda P$, so geht $\mathfrak{G}_\lambda$ in $P^{-1}\mathfrak{G}_\lambda P$ über, und daher bleibt nach Formel (3.) § 1 die Zahl m_λ ungeändert. Setzt man nun in der Formel (8.) für $\mathfrak{H}$ eine bestimmte Gruppe $n$ten Grades, für $\mathfrak{G}$ aber der Reihe nach die l Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots \mathfrak{G}_l$, so erhält man l Gleichungen, denen zufolge die l Zahlen m_λ lineare Functionen der l Zahlen h_λ sind. Ich stelle mir jetzt die Aufgabe, diese Gleichungen aufzulösen, also umgekehrt die Zahlen h_λ durch die Zahlen m_λ linear auszudrücken.

Zu dem Zwecke führe ich folgende Bezeichnung ein: Ist G irgend

ein Element der λten Klasse von $\mathfrak{S}$, so bezeichne ich die Zahl s_λ mit $\sigma(G)$, die Zahl h_λ mit $\chi(G)$ (wobei G nicht der Gruppe $\mathfrak{H}$ anzugehören braucht), und wenn $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Potenzen von G ist, die Zahl $(\mathfrak{S}:\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ mit $\mu(G)$. Jede dieser drei von G abhängigen Zahlen bleibt ungeändert, wenn G durch irgend eine ähnliche Substitution ersetzt wird. Nach Formel (8.) ist dann

$$(9.)\qquad \frac{gh}{s}\mu(G) = \sum_d \frac{\chi(G^{\frac{g}{d}})\varphi(d)}{\sigma(G^{\frac{g}{d}})},$$

wo d alle Divisoren von g durchläuft. Ersetzt man in dieser Formel G durch G^δ, wo δ ein Divisor von g ist, so hat man g durch $\frac{g}{\delta}$ zu ersetzen, und erhält demnach

$$\frac{gh}{s}\frac{\mu(G^\delta)}{\delta} = \sum_d \frac{\chi(G^{\frac{g}{d}})\varphi(d)}{\sigma(G^{\frac{g}{d}})},$$

wo d alle Divisoren von $\frac{g}{\delta}$ durchläuft. Sei ε_k eine Function der positiven ganzen Zahl k, die folgende Werthe hat: Ist k durch das Quadrat einer Primzahl theilbar, so ist $\varepsilon_k = 0$. Sonst ist $\varepsilon_k = +1$ oder -1, je nachdem k das Product einer geraden oder ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen ist, und endlich ist $\varepsilon_1 = 1$. (*Möbius*, dieses Journal Bd. 9, S. 111; *Kronecker*, Berl. Sitzungsber. 1886, S. 707.) Dann ist $\Sigma\varepsilon_\delta = 0$, falls δ alle Divisoren einer gegebenen Zahl k durchläuft, die > 1 ist. Multiplicirt man nun die obige Gleichung mit ε_δ und summirt nach δ über alle Divisoren von g, so erhält man

$$\frac{gh}{s}\sum_\delta \frac{\varepsilon_\delta\mu(G^\delta)}{\delta} = \sum_{d,\delta} \frac{\varepsilon_\delta\chi(G^{\frac{g}{d}})\varphi(d)}{\sigma(G^{\frac{g}{d}})}.$$

Auf der rechten Seite durchlaufen d und δ alle Paare (gleicher oder verschiedener) Zahlen, für welche das Product $d\delta$ in g aufgeht. Für einen bestimmten Werth von d durchläuft daher δ alle Divisoren von $\frac{g}{d}$, und mithin ist $\sum_\delta \varepsilon_\delta = 0$, ausser wenn $d = g$ ist. Demnach ist jene Summe gleich $\frac{\chi(G)\varphi(g)}{\sigma(G)}$, und folglich ist

$$(10.)\qquad \frac{s}{h}\frac{\varphi(g)}{g}\frac{\chi(G)}{\sigma(G)} = \sum_\delta \frac{\varepsilon_\delta\mu(G^\delta)}{\delta},$$

oder wenn $p, q, r, \dots$ die verschiedenen in g enthaltenen Primzahlen sind,

$$(11.)\quad \frac{\chi(\mathfrak{G})}{\sigma(G)}\frac{s}{h}\prod_p\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \mu(G)-\sum_p\frac{\mu(G^p)}{p}+\sum_{p,q}\frac{\mu(G^{pq})}{pq}-\sum_{p,q,r}\frac{\mu(G^{pqr})}{pqr}+\cdots.$$

Setzt man in dieser Gleichung für $\sigma(G)$ seinen Werth aus Formel (6.), § 6 ein, so liefert sie den Werth von $\chi(G)$, also, falls G die λte Klasse repräsentirt, die Zahl h_λ ausgedrückt durch die l Zahlen

$$m_1 = \mu(G_1),\quad \dots\quad m_l = \mu(G_l).$$

§ 3.

In der Gruppe $\mathfrak{S}$ von der Ordnung s seien enthalten die beiden Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ von den Ordnungen g und h. Ist S irgend ein bestimmtes Element von $\mathfrak{S}$, durchläuft G die Elemente von $\mathfrak{G}$ und H die von $\mathfrak{H}$, so stellt GSH jedes Element von $\mathfrak{S}$ dar, das $\sim S$ (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$) ist, und, wie in § 1 gezeigt ist, jedes d Mal, wo d die Anzahl der Lösungen der Gleichung $GSH = S$ oder $S^{-1}GS = H^{-1}$ ist, wo also d die Ordnung des grössten gemeinsamen Divisors der beiden Gruppen $\mathfrak{H}$ und $S^{-1}\mathfrak{G}S$ ist. Die Anzahl der verschiedenen Elemente von $\mathfrak{S}$, die $\sim S$ (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$) sind, ist folglich $c = \frac{gh}{d}\cdot$ Die Zahl d ist ein gemeinsamer Divisor, und mithin die Zahl c ein gemeinsames Vielfaches der beiden Zahlen g und h. Setzt man also $h = df$, so ist $c = fg$, die Zahl h ist durch f theilbar und g durch $\frac{h}{f}$, und die Ordnung des grössten gemeinsamen Divisors der beiden Gruppen $\mathfrak{H}$ und $S^{-1}\mathfrak{G}S$ ist gleich $\frac{h}{f}\cdot$

Zerfallen die s Elemente von $\mathfrak{S}$ nach dem Doppelmodul $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ in m Klassen, von denen die erste f_1g, die zweite f_2g, ... die $m$te f_mg Elemente enthält, so ist $f_1g+f_2g+\cdots+f_mg = s$ oder

$$(1.)\quad f_1+f_2+\cdots+f_m = \frac{s}{g}\cdot$$

Ist S_μ ein Element der μten Klasse und d_μ die Ordnung des grössten gemeinsamen Divisors von $\mathfrak{H}$ und $S_\mu^{-1}\mathfrak{G}S_\mu$, so ist

$$(2.)\quad d_\mu f_\mu = h$$

und mithin

$$(3.)\quad \frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_m} = \frac{s}{gh}\cdot$$

Aus diesen Bemerkungen ergeben sich einige sehr wichtige von Herrn *Sylow* (Math. Ann. Bd. 5) gefundene Sätze:

I. *Ist p^σ die höchste Potenz der Primzahl p, welche in der Ordnung der Gruppe $\mathfrak{S}$ aufgeht, und ist $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{S}$, deren Ordnung p^σ ist, so ist jede Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{S}$, deren Ordnung p^ν ist, einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ähnlich, und es giebt in $\mathfrak{S}$ ein solches Element S, dass $S\mathfrak{H}S^{-1}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist.*

Ist p^σ die höchste Potenz der Primzahl p, welche in der Ordnung der Gruppe $\mathfrak{S}$ aufgeht, so sind je zwei Untergruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{S}$, deren Ordnungen gleich p^σ sind, einander ähnlich, und es giebt in $\mathfrak{S}$ ein solches Element S, dass $S^{-1}\mathfrak{G}S = \mathfrak{H}$ ist.

Da $\frac{s}{g} = \frac{s}{p^\sigma}$ nicht durch p theilbar ist, so können der Formel (1.) zufolge die Zahlen f_μ nicht sämmtlich durch p theilbar sein. Da aber f_μ ein Divisor von $h = p^\nu$ ist, so muss, falls f_μ nicht durch p theilbar ist, $f_\mu = 1$ sein. Ist dann S ein Element der μten Klasse, so hat der grösste gemeinsame Divisor der beiden Gruppen $\mathfrak{H}$ und $S^{-1}\mathfrak{G}S$ die Ordnung $\frac{h}{f_\mu} = h$, und folglich ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $S^{-1}\mathfrak{G}S$, und $S\mathfrak{H}S^{-1}$ ist ein Divisor von $\mathfrak{G}$. Ist $\nu = \sigma$, so ist daher $S^{-1}\mathfrak{G}S = \mathfrak{H}$.

II. *Eine Gruppe, deren Ordnung durch die λte Potenz einer Primzahl p theilbar ist, enthält eine Untergruppe der Ordnung p^λ.*

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf folgendes Lemma:

Enthält eine Gruppe $\mathfrak{S}$ der Ordnung s einen Divisor der Ordnung p^σ, wo p^σ die höchste in s aufgehende Potenz der Primzahl p ist, so enthält auch jede in $\mathfrak{S}$ enthaltene Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung h einen Divisor der Ordnung p^ν, wo p^ν die höchste in h aufgehende Potenz von p ist.

Ist $\mathfrak{G}$ eine in $\mathfrak{S}$ enthaltene Gruppe der Ordnung $g = p^\sigma$, so ist $\frac{s}{g}$ nicht durch p theilbar, und mithin können der Formel (1.) zufolge die Zahlen f_μ nicht sämmtlich durch p theilbar sein. Ist aber f_μ nicht durch p theilbar, so muss die ganze Zahl $d_\mu = \frac{h}{f_\mu}$, weil sie in $g = p^\sigma$ aufgeht, gleich p^ν sein. Ist dann S ein Element der μten Klasse, so ist der grösste gemeinsame Divisor der beiden Gruppen $\mathfrak{H}$ und $S^{-1}\mathfrak{G}S$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$, deren Ordnung gleich $d_\mu = p^\nu$ ist.

Die Elemente jeder Gruppe $\mathfrak{H}$ können als Substitutionen einer gewissen Anzahl von Symbolen aufgefasst werden. Ist diese Anzahl n, so ist

$\mathfrak{H}$ in der Gruppe $\mathfrak{S}$ enthalten, die aus sämmtlichen $n! = s$ Substitutionen der n Symbole gebildet wird. Da diese Gruppe $\mathfrak{S}$, wie *Cauchy* gezeigt hat, eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung p^σ enthält, so ist damit bewiesen, dass auch jede Gruppe $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe der Ordnung p^ν enthält, falls p^ν die höchste in h aufgehende Potenz von p ist. Zugleich ergiebt sich aus dem obigen Beweise (oder auch aus Satz I.), dass diese Untergruppe einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ähnlich ist *).

Zum vollständigen Beweise des Satzes II. ist daher nur noch erforderlich zu zeigen, dass jede Gruppe der Ordnung p^ν eine Untergruppe der Ordnung p^λ enthält, wo $\lambda < \nu$ ist. Dazu genügt der Nachweis, dass jede Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $h = p^\nu$ eine Untergruppe der Ordnung $p^{\nu-1}$ enthält. *Cauchy* hat gezeigt, dass die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}$ eine Reihe von Untergruppen $\mathfrak{G}_\sigma$, $\mathfrak{G}_{\sigma-1}$, ... $\mathfrak{G}_1$ enthält, deren Ordnungen p^σ, $p^{\sigma-1}$, ... p sind, und von denen jede ein Divisor der vorhergehenden ist. Wie oben bewiesen, ist jede Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $h = p^\nu$ einer Untergruppe der Ordnung p^ν von $\mathfrak{G}_\sigma$ ähnlich. Ist $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}_\nu$ ähnlich, giebt es also eine solche Substitution S, dass $S^{-1}\mathfrak{G}_\nu S = \mathfrak{H}$ ist, so enthält $\mathfrak{H}$ die Untergruppe $S^{-1}\mathfrak{G}_{\nu-1}S$ der Ordnung $p^{\nu-1}$. Ist $\mathfrak{H}$ aber nicht der Gruppe $\mathfrak{G}_\nu$ ähnlich, so sei ϱ die kleinste Zahl, für welche $\mathfrak{H}$ einer Untergruppe von $\mathfrak{G}_\varrho$ ähnlich ist. Dann ist $\nu < \varrho \leqq \sigma$, und es giebt eine solche Substitution S, dass $\mathfrak{H}$ in $S^{-1}\mathfrak{G}_\varrho S$ enthalten ist. Ich will nun die Bezeichnung ändern und mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}$ die Gruppen bezeichnen, die ich eben $S^{-1}\mathfrak{G}_\varrho S$ und $S^{-1}\mathfrak{G}_{\varrho-1}S$ nannte.

Dann enthält die Gruppe $\mathfrak{S}$ der Ordnung $s = p^\varrho$ die beiden Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ der Ordnungen $g = p^{\varrho-1}$ und $h = p^\nu$, wo $\nu \leqq \varrho-1$ ist, und $\mathfrak{H}$ ist keiner Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ähnlich. In der Formel (1.), die ich jetzt auf diese drei Gruppen anwende, kann dann keine der Zahlen $f_\mu = 1$ sein. Denn wäre $f_\mu = 1$ und S ein Element der μten Klasse, so hätte der grösste gemeinsame Divisor der beiden Gruppen $\mathfrak{H}$ und $S^{-1}\mathfrak{G}S$ die Ordnung $\frac{h}{f_\mu} = h$, und folglich wäre $\mathfrak{H}$ ein Divisor von $S^{-1}\mathfrak{G}S$, wider die Voraussetzung. Ferner sind die Zahlen f_μ sämmtlich Divisoren von $h = p^\nu$, und

*) Der obige Beweis ist, abgesehen von der Vereinfachung, die durch die abstracte Form der Einkleidung gewonnen ist, mit dem identisch, welchen Herr *Netto*, Math. Ann. Bd. 13 entwickelt hat, ebenso wie die Beweise der Sätze I. und III. mit denen, welche Herr *Sylow* l. c. für dieselben gegeben hat.

endlich ist $f_1+f_2+\cdots+f_m = \frac{h}{g} = p$. Daher muss $m=1$ und $f_1=p$ sein. Der grösste gemeinsame Divisor von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ ($=E^{-1}\mathfrak{G}E$, wo E die identische Substitution ist), ist folglich eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$, deren Ordnung gleich $\frac{h}{f_1} = p^{\nu-1}$ ist. Aus den Sätzen I. und II. ergiebt sich die Folgerung:

Ist p^ν die höchste Potenz der Primzahl p, welche in der Ordnung einer Gruppe $\mathfrak{H}$ aufgeht, und ist $\lambda < \nu$, so ist jede Untergruppe der Ordnung p^λ von $\mathfrak{H}$ in einer Untergruppe der Ordnung p^ν von $\mathfrak{H}$ enthalten.

III. *Ist p^σ die höchste Potenz der Primzahl p, welche in der Ordnung einer Gruppe aufgeht, so ist die Anzahl der verschiedenen in ihr enthaltenen Untergruppen der Ordnung p^σ congruent 1 (mod. p).*

Ist $\mathfrak{S}$ eine beliebige Gruppe, s ihre Ordnung, und p^σ die höchste in s aufgehende Potenz von p, so enthält $\mathfrak{S}$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung $h=p^\sigma$. Alle Elemente G von $\mathfrak{S}$, welche der Bedingung $G^{-1}\mathfrak{H}G=\mathfrak{H}$ genügen, bilden eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{H}$ enthält. Ist g ihre Ordnung, so ist $\frac{s}{g}$ die Anzahl der verschiedenen Gruppen, welche $S^{-1}\mathfrak{H}S$ darstellt, falls S alle Elemente von $\mathfrak{S}$ durchläuft, und folglich nach Satz I. auch die Anzahl aller verschiedenen in $\mathfrak{S}$ enthaltenen Gruppen der Ordnung p^σ.

Gehört das Element E der ersten Klasse an, so wird dieselbe, weil $\mathfrak{H}$ ein Divisor von $\mathfrak{G}$ ist, von den g Elementen der Gruppe $\mathfrak{G}$ gebildet. Da diese Klasse $f_1 g$ Elemente enthält, so ist folglich $f_1 = 1$. Ist aber $\mu > 1$, so ist f_μ ein Divisor von $h=p^\sigma$ und nicht gleich 1. Denn ist $f_\mu = 1$, und S ein Element der μten Klasse, so hat der grösste gemeinsame Divisor der beiden Gruppen $\mathfrak{H}$ und $S^{-1}\mathfrak{G}S$ die Ordnung $\frac{h}{f_\mu} = h$. Folglich ist $\mathfrak{H}$ ein Divisor von $S^{-1}\mathfrak{G}S$ und $\mathfrak{H}' = S\mathfrak{H}S^{-1}$ ein Divisor von $\mathfrak{G}$, dessen Ordnung gleich p^σ ist. Da p^σ die höchste in g aufgehende Potenz von p ist, so giebt es nach Satz I. in $\mathfrak{G}$ ein Element G, welches der Bedingung $G^{-1}\mathfrak{H}G=\mathfrak{H}'$ genügt. Da andererseits jedes Element G von $\mathfrak{G}$ die Gleichung $G^{-1}\mathfrak{H}G=\mathfrak{H}$ befriedigt, so ist $\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}$, also $S\mathfrak{H}S^{-1}=\mathfrak{H}$, und folglich ist S ein Element von $\mathfrak{G}$, gehört also der ersten, und nicht der μten Klasse an. Von den Zahlen $f_1, f_2, \ldots f_m$ ist also eine und nur eine gleich 1, die übrigen sind durch p theilbar und mithin ist

$$\frac{s}{g} = f_1+f_2+\cdots+f_m \equiv 1 \pmod{p}.$$

IV. ***Ist die Ordnung s einer Gruppe eine Potenz einer Primzahl p, so ist jeder ihrer Divisoren, dessen Ordnung gleich $\frac{s}{p}$ ist, eine monotypische Untergruppe.***

Eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{S}$ nenne ich eine ***monotypische***, wenn $\mathfrak{G}$ mit jedem Elemente von $\mathfrak{S}$ vertauschbar ist. Sei $\mathfrak{G}$ eine in $\mathfrak{S}$ enthaltene Gruppe der Ordnung $g = \frac{s}{p}$, sei S irgend ein Element von $\mathfrak{S}$ und $S^{-1}\mathfrak{G}S = \mathfrak{H}$. Der grösste gemeinsame Divisor der beiden Gruppen $\mathfrak{H}$ und $S^{-1}\mathfrak{G}S$ hat also die Ordnung $h = g$. Gehört S der ersten Klasse an, so ist folglich $\frac{h}{f_1} = h$ und mithin $f_1 = 1$. Jede der m Zahlen f_μ ist ein Divisor von h, also eine Potenz von p. Da aber $1 + f_2 + \cdots + f_m = \frac{s}{g} = p$ ist, so sind die Zahlen f_μ alle gleich 1. Gehört also das Hauptelement E der μten Klasse an, so hat der grösste gemeinsame Divisor von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ $(= E^{-1}\mathfrak{G}E)$ die Ordnung $\frac{h}{f_\mu} = h$, und daher ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$, also $S^{-1}\mathfrak{G}S = \mathfrak{G}$. Folglich ist $\mathfrak{G}$ eine monotypische Untergruppe von $\mathfrak{S}$.

§ 4.

Sei $\mathfrak{S}$ die Gruppe aller $s = n!$ Substitutionen von n Symbolen (Unbestimmten) $x_1, x_2, \dots x_n$, seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Untergruppen von $\mathfrak{S}$, g und h ihre Ordnungen und sei $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ eine rationale Function der n Unbestimmten, die bei den Substitutionen von $\mathfrak{G}$ ungeändert bleibt, sich aber bei jeder andern Substitution ändert. Seien

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \dots \quad \varphi_{\frac{s}{g}}$$

die $\frac{s}{g}$ verschiedenen Functionen, in welche φ durch die Substitutionen von $\mathfrak{S}$ übergeht. Geht φ_α durch die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{H}$ in φ_α, φ_β, $\dots$ $\varphi_\varkappa$, also auch jede dieser Functionen in jede andere über, so nenne ich dieselben ein ***System conjugirter Functionen*** (in Bezug auf $\mathfrak{H}$). Damit zwei Substitutionen A und B von $\mathfrak{S}$ congruent seien (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$), muss es in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Substitutionen G und H geben, die der Gleichung $G^{-1}AH = B$ genügen. Wird φ durch die Substitutionen A und B in φ_α und φ_β transformirt, so führt $H = A^{-1}GB$ die Function φ_α in φ_β über, und mithin sind φ_α und φ_β conjugirte Functionen. Sind umgekehrt φ_α und φ_β

zwei solche Functionen, und ist H eine Substitution von $\mathfrak{H}$, die φ_α in φ_β überführt, so lässt AHB^{-1} die Function φ ungeändert und ist daher einer Substitution G der Gruppe $\mathfrak{G}$ gleich. Die Zahl $m = (\mathfrak{S} : \mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ ist folglich die Anzahl der Systeme von Functionen, die in Bezug auf $\mathfrak{H}$ conjugirt sind. Um das erhaltene Resultat algebraisch auszudrücken, erinnere ich an folgenden Satz (*Jordan,* Traité des substitutions, § 366):

Ist $\mathfrak{H}$ die Gruppe der Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$, deren Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ unter einander verschieden sind, so genügt eine rationale Function dieser Wurzeln $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$, deren Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, einer irreductibeln Gleichung vom Grade $(\mathfrak{H} : \mathfrak{G})$ mit rationalen Coefficienten. Sind $A, B, \dots$ die $(\mathfrak{H} : \mathfrak{G})$ (modd. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}$) verschiedenen Substitutionen von $\mathfrak{H}$, so sind $\varphi_A, \varphi_B, \dots$ die Wurzeln dieser Gleichung.

Sind also $x_1, x_2, \dots x_n$ verschiedene irrationale Grössen, sind aber die Coefficienten der Function $f(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$ rational, und ist $\mathfrak{H}$ die Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$, so zerfällt die Function $(y-\varphi_1)\dots(y-\varphi_{\frac{s}{g}})$, deren Coefficienten rational sind, in m irreductible Factoren, deren Grade die in § 3 definirten Zahlen $f_1, f_2, \dots f_m$ sind.

Nach Formel (5.) § 2 ist nun die Zahl m, deren Bedeutung soeben klargelegt ist, durch die Gleichung

$$(1.) \qquad hm = \sum_{\nu}{}_1^{\frac{s}{g}} d_\nu = \sum_{\lambda}{}_1^{\frac{s}{g}} \lambda h_\lambda$$

bestimmt. Hier ist d_ν die Anzahl der Lösungen der Gleichung $H = S_\nu^{-1} G S_\nu$. Wenn aber G die Function φ ungeändert lässt, und φ durch die Substitution S_ν in φ_ν übergeht, so lässt $S_\nu^{-1} G S_\nu$ die Function φ_ν ungeändert. Es ergiebt sich also der Satz:

I. ***Ist $\mathfrak{H}$ die Gruppe einer Gleichung ohne quadratischen Factor, $\mathfrak{G}$ die Gruppe einer rationalen Function ihrer Wurzeln φ, $\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe, und sind h, g, s die Ordnungen dieser Gruppen, so ist die Anzahl der irreductibeln Factoren der Gleichung, welcher die $\frac{s}{g}$ verschiedenen Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{\frac{s}{g}}$ von φ genügen, $m = (\mathfrak{S} : \mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. Ist h_λ die Anzahl der Substitutionen von $\mathfrak{H}$, welche genau λ dieser $\frac{s}{g}$ Functionen ungeändert lassen, und d_ν die Anzahl der Substitutionen von $\mathfrak{H}$, welche die Function φ_ν nicht ändern, so ist***

$$hm = \sum_{\nu}{}_1^{\frac{s}{g}} d_\nu = \sum_{\lambda}{}_1^{\frac{s}{g}} \lambda h_\lambda.$$

Diesen Satz wende ich *erstens* auf den Fall an, wo $\varphi = x_1$ ist. Dann ist $\mathfrak{G}$ die Gruppe der $g = (n-1)!$ Substitutionen, die x_1 ungeändert lassen, m die Anzahl der irreductibeln Factoren der Gleichung $f(x) = 0$, deren Gruppe $\mathfrak{H}$ ist, und d_ν die Anzahl der Substitutionen von $\mathfrak{H}$, welche x_ν nicht ändern. Die Formel (1.) besagt also für diesen Fall:

II. *Ist eine Substitutionsgruppe der Ordnung h in m transitive Gruppen zerlegbar, so ist die Summe der Anzahl der Symbole, die in den einzelnen Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben, gleich hm.*

Damit eine Gruppe transitiv sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Summe der Anzahl der Symbole, die in den einzelnen Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben, der Ordnung der Gruppe gleich ist.

Ist h_λ die Anzahl der Substitutionen von $\mathfrak{H}$, die genau λ Symbole ungeändert lassen, und ist $m_0 = 1$, so ist

$$(2.)\qquad hm_0 = \sum_\lambda {}_0^n h_\lambda.$$

Bezeichnet man ferner die Zahl m für den betrachteten Fall mit m_1, so ist

$$(3.)\qquad hm_1 = \sum_\lambda {}_1^n \lambda h_\lambda = \sum_\varrho {}_1^n d_\varrho.$$

Zweitens nehme ich an, dass $\mathfrak{G}$ die Gruppe der $g = (n-2)!$ Substitutionen ist, welche die Function $\varphi = ax_1 + bx_2$ nicht ändern, wo a und b willkürliche Constanten sind. Betrachtet man alle $n(n-1)$ Paare von je zwei verschiedenen Symbolen (wobei x_α, x_β und x_β, x_α als verschiedene Paare gerechnet sind), und nennt man (x_α, x_β), (x_γ, x_δ), ... $(x_\iota, x_\varkappa)$ ein *System conjugirter Paare*, wenn durch die Substitutionen von $\mathfrak{H}$ jedes dieser Paare in jedes andere übergeführt wird, so ist $m_2 = (\mathfrak{S} : \mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ die Anzahl der Systeme conjugirter Paare von Symbolen. Ist nun $d_{\varrho\sigma}$ $(\varrho \gtrless \sigma)$ die Anzahl der Substitutionen von $\mathfrak{H}$, welche $ax_\varrho + bx_\sigma$ ungeändert lassen, so ist $hm_2 = \Sigma d_{\varrho\sigma}$. (In dieser Summe ist $d_{\varrho\sigma} = d_{\sigma\varrho}$, weil $d_{\varrho\sigma}$ die Anzahl der Substitutionen von $\mathfrak{H}$ ist, die x_ϱ und x_σ ungeändert lassen.) Ist $d_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}$ die Anzahl der Substitutionen von $\mathfrak{H}$, welche ausser den beiden (verschiedenen) Symbolen x_ϱ und x_σ noch genau $\lambda - 2$ andere Symbole ungeändert lassen, so ist offenbar

$$\sum_{\varrho,\sigma} d_{\varrho\sigma}^{(\lambda)} = \lambda(\lambda-1) h_\lambda$$

und daher

$$\sum_\lambda {}_2^n \lambda(\lambda-1) h_\lambda = \sum_\lambda \Big(\sum_{\varrho,\sigma} d_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}\Big) = \sum_{\varrho,\sigma} \Big(\sum_\lambda d_{\varrho\sigma}^{(\lambda)}\Big) = \sum_{\varrho,\sigma} d_{\varrho\sigma} = hm_2,$$

also

$$(4.)\qquad hm_2 = \sum_\lambda {}_2^n \lambda(\lambda-1) h_\lambda = \Sigma\, d_{\varrho\sigma}.$$

In derselben Weise findet man die Gleichung

$$(5.)\qquad hm_3 = \sum_\lambda{}_3^n \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)h_\lambda = \Sigma d_{\varrho\sigma\tau},$$

wo m_3 die Anzahl der Systeme conjugirter Tripel von Symbolen ist, und allgemein

$$(6.)\qquad hm_\mu = \sum_\lambda{}_0^n \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-\mu+1)h_\lambda = \Sigma d_{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_\mu} \qquad (\mu = 0, 1, \dots n)$$

oder

$$(7.)\qquad \frac{hm_\mu}{\mu!} = \sum_\lambda \binom{\lambda}{\mu} h_\lambda = h_\mu + \binom{\mu+1}{\mu} h_{\mu+1} + \binom{\mu+2}{\mu} h_{\mu+2} + \dots + \binom{n}{\mu} h_n.$$

Daher ist

$$\sum_\mu{}_0^n \frac{hm_\mu}{\mu!} x^\mu = \sum_\lambda h_\lambda \left(\sum_\mu \binom{\lambda}{\mu} x^\mu\right),$$

also

$$(8.)\qquad \sum_\mu{}_0^n \frac{hm_\mu}{\mu!} x^\mu = \sum_\lambda{}_0^n h_\lambda (x+1)^\lambda,$$

mithin auch

$$\Sigma \frac{hm_\mu}{\mu!}(x-1)^\mu = \sum_\lambda h_\lambda x^\lambda.$$

Durch Coefficientenvergleichung ergiebt sich daraus die Formel

$$(9.)\qquad \frac{\lambda! h_\lambda}{h} = m_\lambda - m_{\lambda+1} + \frac{m_{\lambda+2}}{1.2} - \frac{m_{\lambda+3}}{1.2.3} + \dots + \frac{(-1)^{n-\lambda} m_n}{(n-\lambda)!}.$$

Wegen der Wichtigkeit der Formeln (6.) will ich kurz zeigen, wie sie direct zu beweisen sind, d. h. wie sich die Ueberlegungen aus der Gruppentheorie, die ich in § 1 angestellt habe, in der Substitutionentheorie darstellen. Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf die Formel (3.). Dabei benutze ich folgenden Hülfssatz (Traité des substitutions, § 44):

Ist d die Anzahl derjenigen Substitutionen einer Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung h, welche die μ Symbole $x_1, x_2, \dots x_\mu$ ungeändert lassen, und c die Anzahl der verschiedenen Systeme von Plätzen, auf welche diese Symbole durch die Substitutionen von $\mathfrak{H}$ geführt werden, so ist $cd = h$.

Ist also c_ν die Anzahl der Plätze, auf welche die Substitutionen von $\mathfrak{H}$ das Symbol x_ν führen, und d_ν die Anzahl der Substitutionen von $\mathfrak{H}$, welche x_ν ungeändert lassen, so ist $c_\nu d_\nu = h$. Ist $x_\alpha, x_\beta, \dots x_\varkappa$ ein System conjugirter Symbole, so kann jedes derselben durch die Substitutionen von $\mathfrak{H}$ in jedes andere, aber in kein weiteres übergeführt werden, und mithin ist die Anzahl dieser Symbole gleich $c_\alpha = c_\beta = \dots = c_\varkappa$. Folglich ist auch $d_\alpha = d_\beta = \dots = d_\varkappa$ und daher $d_\alpha + d_\beta + \dots + d_\varkappa = c_\alpha d_\alpha = h$. Für jedes System

conjugirter Symbole hat also die analoge Summe denselben Werth h. Mithin ist

$$\sum_{\nu}{}_1^n d_\nu = hm,$$

wo m die Anzahl jener Systeme ist *).

§ 5.

Für jede Gruppe $\mathfrak{H}$ ist

$$(1.)\quad h_n = 1, \quad h_{n-1} = 0.$$

Nach Formel (9.), § 4 ist aber für $\lambda = n$ und $n-1$

$$\frac{n!}{h} h_n = m_n \text{ und } \frac{(n-1)!}{h} h_{n-1} = m_{n-1} - m_n.$$

Daher ist für jede Gruppe

$$(2.)\quad m_{n-1} = m_n = \frac{n!}{h}.$$

Demnach ist m_n gleich der Anzahl der verschiedenen Werthe einer Function von n Unbestimmten, deren Gruppe $\mathfrak{H}$ ist. Enthält $\mathfrak{H}$ nur *eigentliche* Substitutionen, so ist auch $h_{n-2} = 0$, also, weil $\frac{(n-2)!}{h} h_{n-2} = m_{n-2} - m_{n-1} + \frac{m_n}{2}$ ist,

$$(3.)\quad h_{n-2} = 0, \quad m_{n-2} = \frac{n!}{2h}.$$

Nach Formel (7.) § 4 ist hm_μ durch $\mu!$ theilbar und ferner

$$\frac{hm_\mu}{\mu!} \geqq \binom{n}{\mu} h_n$$

oder

$$(4.)\quad hm_\mu \geqq n(n-1)\dots(n-\mu+1).$$

Ist $\mathfrak{G}_\mu$ die Gruppe der $(n-\mu)!$ Substitutionen, welche die Symbole x_1, $x_2, \dots x_\mu$ ungeändert lassen, so ist $\mathfrak{G}_{\mu+1}$ ein Divisor von $\mathfrak{G}_\mu$. Da nun $m_\mu = (\mathfrak{S} : \mathfrak{G}_\mu, \mathfrak{H})$ und $m_{\mu+1} = (\mathfrak{S} : \mathfrak{G}_{\mu+1}, \mathfrak{H})$ ist, so ist nach Formel (5.) und (13.), § 1

$$(5.)\quad m_\mu \leqq m_{\mu+1}, \quad (n-\mu)m_\mu \geqq m_{\mu+1}.$$

Ist $\mathfrak{H}'$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$, deren Ordnung h' ist, und für welche die Zeichen h'_λ und m'_μ dieselbe Bedeutung haben, wie die Zeichen h_λ und m_μ für $\mathfrak{H}$, so ist offenbar $h'_\lambda \leqq h_\lambda$, und weil $m'_\mu = (\mathfrak{S} : \mathfrak{G}_\mu, \mathfrak{H}')$ ist, nach Formel (13.) § 1

$$(6.)\quad m'_\mu \geqq m_\mu, \quad h'm'_\mu \leqq hm_\mu, \quad h'_\lambda \leqq h_\lambda.$$

*) Ist $m = 1$, so lässt sich die obige Deduction noch weiter vereinfachen. Für diesen speciellen Fall $m_\mu = 1$ hat schon *Cauchy* die Formel (6.) gefunden. (*C.* pag. 986.)

Ist $m_1 = 1$, so heisst die Gruppe $\mathfrak{H}$ *transitiv;* ist $m_\varkappa = 1$, also auch $m_{\varkappa-1} = \cdots = m_1 = 1$, so heisst sie *$\varkappa$-fach transitiv.* In diesem Falle bilden die Substitutionen von $\mathfrak{H}$, die $x_1, x_2, \dots x_\varkappa$ ungeändert lassen, eine Gruppe $\mathfrak{H}'$, deren Ordnung h' durch die Gleichung

$$(7.) \qquad h = n(n-1)\dots(n-\varkappa+1)h'$$

bestimmt ist. Betrachtet man $\mathfrak{H}'$ als eine Gruppe von Vertauschungen der $n-\varkappa$ Symbole $x_{\varkappa+1}, \dots x_n$ allein, so sei h'_λ die Anzahl der Substitutionen von $\mathfrak{H}'$, welche (ausser $x_1 \dots x_\varkappa$) genau λ Symbole ungeändert lassen, und sei m'_1 die Anzahl der Systeme conjugirter Symbole, in welche $x_{\varkappa+1}, \dots x_n$ in Bezug auf $\mathfrak{H}'$ zerfallen, m'_2 die Anzahl der Systeme conjugirter Paare u. s. w. Die Gruppe derjenigen Substitutionen von $\mathfrak{H}$, welche irgend $\varkappa$ bestimmte Symbole ungeändert lassen, ist der Gruppe $\mathfrak{H}'$ ähnlich (d. h. von der Form $H^{-1}\mathfrak{H}'H$), und enthält daher ebenfalls h'_λ Substitutionen, die genau λ Symbole ungeändert lassen. Solcher Untergruppen von $\mathfrak{H}$ giebt es $\binom{n}{\varkappa}$, und daher enthalten sie insgesammt $\binom{n}{\varkappa}h'_\lambda$ Substitutionen, die genau λ Symbole ungeändert lassen. Dies sind alle Substitutionen von $\mathfrak{H}$, die genau $\varkappa+\lambda$ Symbole ungeändert lassen, jede $\binom{\varkappa+\lambda}{\varkappa}$ Mal gezählt. Folglich ist (Vgl. *Mathieu, Liouville* Journal 1861, pag. 304)

$$(8.) \qquad \binom{n}{\varkappa}h'_\lambda = \binom{\varkappa+\lambda}{\varkappa}h_{\varkappa+\lambda}, \qquad \frac{\lambda!\,h'_\lambda}{h'} = \frac{(\varkappa+\lambda)!\,h_{\varkappa+\lambda}}{h}.$$

Nach Formel (7.) § 4 ist aber

$$m'_\mu = \sum_\lambda^{n-\varkappa}{}_\mu \frac{\lambda!}{(\lambda-\mu)!}\,\frac{h'_\lambda}{h'} = \sum_\lambda^{n-\varkappa}{}_\mu \frac{(\varkappa+\lambda)!}{(\lambda-\mu)!}\,\frac{h_{\varkappa+\lambda}}{h} = m_{\varkappa+\mu},$$

also

$$(9.) \qquad m'_\mu = m_{\varkappa+\mu}.$$

Ist also $m'_\lambda = 1$, so ist auch $m_{\varkappa+\lambda} = 1$:

I. *Wenn die Gruppe $(n-\varkappa)$ten Grades, die von allen denjenigen Substitutionen einer $\varkappa$-fach transitiven Gruppe $n$ten Grades gebildet wird, welche $\varkappa$ bestimmte Symbole ungeändert lassen, noch λ-fach transitiv ist, so ist die Gruppe $n$ten Grades $(\varkappa+\lambda)$-fach transitiv.*

Wir haben oben erwähnt, dass für eine beliebige Gruppe $\mathfrak{H}$ $m_{\mu-1} \leqq m_\mu$ ist, weil zwei Substitutionen, welche (modd. $\mathfrak{G}_\mu$, $\mathfrak{H}$) congruent sind, es auch (modd. $\mathfrak{G}_{\mu-1}$, $\mathfrak{H}$) sind. Daher kann nur dann $m_{\mu-1} = m_\mu$ sein, wenn je zwei Substitutionen, welche (modd. $\mathfrak{G}_{\mu-1}$, $\mathfrak{H}$) congruent sind, es auch (modd. $\mathfrak{G}_\mu$, $\mathfrak{H}$) sind. Ist dann $G_{\mu-1}$ eine Substitution, welche $x_1, \dots x_{\mu-1}$

ungeändert lässt und x_μ in x_λ $(\lambda \geqq \mu)$ überführt, so ist $G_{\mu-1} \backsim E$ (modd. $\mathfrak{G}_{\mu-1}$, $\mathfrak{H}$) und folglich auch $G_{\mu-1} \backsim E$ (modd. $\mathfrak{G}_\mu$, $\mathfrak{H}$). Es giebt also in $\mathfrak{G}_\mu$ und $\mathfrak{H}$ zwei Substitutionen G_μ und H, welche der Bedingung $G_{\mu-1} = G_\mu H$ oder $H = G_\mu^{-1} G_{\mu-1}$ genügen. Daher enthält $\mathfrak{H}$ eine Substitution H, welche $x_1, \dots x_{\mu-1}$ ungeändert lässt und x_μ in x_λ überführt.

Sind $x'_1, \dots x'_n$ die Symbole $x_1, \dots x_n$ in einer willkürlichen Anordnung, ist $\mathfrak{G}'_\mu$ die Gruppe aller Substitutionen, welche $x'_1, \dots x'_\mu$ ungeändert lassen, und P eine Substitution, welche $x_1, \dots x_\mu$ in $x'_1, \dots x'_\mu$ überführt, so ist $\mathfrak{G}'_\mu = P^{-1}\mathfrak{G}_\mu P$ und folglich nach Formel (3.) § 1 $m_\mu = (\mathfrak{S} : \mathfrak{G}'_\mu, \mathfrak{H})$. Der obigen Deduction zufolge enthält daher $\mathfrak{H}$ eine Substitution $\mathfrak{H}$, welche $\mu-1$ willkürliche Symbole ungeändert lässt und irgend eins der übrigen in ein vorgeschriebenes anderes überführt. Ist $\mu < n$, so folgt daraus, dass $\mathfrak{H}$ μ-fach transitiv ist. Denn $\mathfrak{H}$ enthält dann eine Substitution, welche irgend ein Symbol in ein vorgeschriebenes anderes überführt, und ist daher einfach transitiv. Alle Substitutionen von $\mathfrak{H}$, welche x_1 ungeändert lassen, bilden eine Untergruppe $(n-1)$ten Grades $\mathfrak{H}_1$. Diese enthält eine Substitution, welche (ausser x_1 noch) $\mu-2$ willkürliche Symbole ungeändert lässt und irgend eins der übrigen in ein vorgeschriebenes anderes überführt. Setzen wir also voraus, dass die obige Behauptung richtig ist, falls darin μ durch $\mu-1$ und n durch $n-1$ ersetzt wird, so ist $\mathfrak{H}_1$ $(\mu-1)$-fach transitiv. Nach Satz I. ist folglich $\mathfrak{H}$ μ-fach transitiv.

II. *Ist* $m_\mu = 1$, *so ist auch* $m_{\mu-1} = 1$. *Ist* $m_\mu > 1$ *und* $\mu < n$, *so ist* $m_\mu > m_{\mu-1}$.

Allgemeiner kann man zeigen, dass die zweiten Differenzen der Zahlen $m_0, m_1, \dots m_{n-1}$ positiv sind, $m_{\mu+2} - 2m_{\mu+1} + m_\mu \geqq 0$, und auch dieser Satz lässt sich noch nach verschiedenen Richtungen hin verallgemeinern.

§ 6.

Ist $\mathfrak{H}$ die symmetrische Gruppe, so sind, da dieselbe n-fach transitiv ist, die Zahlen m_μ sämmtlich gleich 1. Aus der Formel (9.), § 4 ergiebt sich daher für die Anzahl $\psi(n)$ derjenigen Substitutionen von n Symbolen, die kein Symbol ungeändert lassen, der Ausdruck

$$(1.)\qquad \psi(n) = n!\left(1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Da

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}\varepsilon}{n!}$$

ist, wo ε zwischen $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{1}{n+2}$ liegt, so ist

$$(2.)\quad \psi(n) = \frac{n!}{e} + (-1)^n \varepsilon.$$

I. *Die Anzahl der Substitutionen nten Grades, die kein Symbol ungeändert lassen, ist gleich derjenigen ganzen Zahl, die am wenigsten von $\frac{n!}{e}$ abweicht.*

II. *Das Verhältniss zwischen der Anzahl aller Substitutionen nten Grades und der Anzahl derjenigen, welche kein Symbol ungeändert lassen, nähert sich bei wachsendem n der Grenze e.*

Ist $\mathfrak{H}$ die *alternirende Gruppe,* die aus den $h = \frac{1}{2}n!$ eigentlichen Substitutionen besteht, so ist den Formeln (2.) und (3.), § 5 zufolge $m_n = m_{n-1} = 2$ und $m_{n-2} = 1$, also auch, falls $\lambda < n-1$ ist, $m_\lambda = 1$. Diese Gruppe ist folglich $(n-2)$-fach transitiv. Die Anzahl $\chi(n)$ der eigentlichen Substitutionen, die kein Symbol ungeändert lassen, ist demnach (*C.* pag. 1033.)

$$(3.)\quad \chi(n) = \tfrac{1}{2}n!\left(1-1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}2}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n 2}{n!}\right).$$

Die Differenz $\vartheta(n) = \chi(n)-(\psi(n)-\chi(n)) = 2\chi(n)-\psi(n)$ zwischen der Anzahl der eigentlichen und der der uneigentlichen Substitutionen, die kein Symbol ungeändert lassen, ist daher

$$(4.)\quad \vartheta(n) = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Die oben entwickelten Formeln lassen sich auf mannigfache Art beweisen. Ueber die Formel (1.) findet man ausführliche Literaturnachweise in einer Arbeit des Herrn *Schröder, Grunerts* Archiv, Theil 68, S. 353. Um zu den bisher gegebenen Beweisen noch einen weiteren hinzuzufügen, gehe ich von folgendem Satze aus (*C.* pag. 604): Sind $a, b, c, d, \ldots$ nicht negative ganze Zahlen, zwischen denen die Beziehung

$$(5.)\quad a+2b+3c+4d+\cdots = n$$

besteht, so ist die Anzahl der Substitutionen $n$ten Grades, welche aus a Cyklen von einem, b Cyklen von 2, c Cyklen von 3, u. s. w. Symbolen bestehen, gleich

$$(6.)\quad s_{a,b,c,d,\ldots} = \frac{n!}{1^a.a!\,2^b.b!\,3^c.c!\,4^d.d!\ldots}.$$

Wie *Cauchy* bemerkt hat, folgt daraus die merkwürdige Relation

$$(7.)\quad \Sigma\frac{1}{1^a.a!\,2^b.b!\,3^c.c!\ldots} = 1,$$

wo $a, b, c, \dots$ alle nicht negativen ganzen Zahlen durchlaufen, welche der Bedingung (5.) genügen. Beiläufig will ich hier einen anderen Beweis für diese Gleichung angeben: Ist x eine reelle positive Zahl, die < 1 ist, so ist

$$\Sigma x^n = \frac{1}{1-x} = e^{-l(1-x)} = e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots} = e^x e^{\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^3}{3}} \cdots$$
$$= \left(\Sigma \frac{x^a}{a!}\right)\left(\Sigma \frac{x^{2b}}{2^b.b!}\right)\left(\Sigma \frac{x^{3c}}{3^c.c!}\right)\cdots = \Sigma \frac{x^{a+2b+3c+\cdots}}{1^a.a!2^b.b!3^c.c!\dots},$$

und daraus ergiebt sich die *Cauchy*sche Relation durch Coefficientenvergleichung.

Die Anzahl der Substitutionen $n$ten Grades, welche keinen Cyklus von einem Symbole enthalten, ist gleich

$$\psi(n) = \Sigma \frac{n!}{2^b.b!3^c.c!4^d.d!\dots},$$

wo die Summe über alle Lösungen der Gleichung

$$2b+3c+4d+\cdots = n$$

zu erstrecken ist. Da $\psi(n) < n!$ ist, so ist folglich, falls $x < 1$ ist und $\psi(0) = 1$ gesetzt wird,

$$\Sigma_n{}_0^\infty \frac{\psi(n)}{n!} x^n = \Sigma \frac{x^{2b+3c+4d+\cdots}}{2^b.b!3^c.c!4^d.d!\dots} = \left(\Sigma \frac{x^{2b}}{2^b.b!}\right)\left(\Sigma \frac{x^{3c}}{3^c.c!}\right)\left(\Sigma \frac{x^{4d}}{4^d.d!}\right)\cdots$$
$$= e^{\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^3}{3}} e^{\frac{x^4}{4}} \cdots = e^{-x-l(1-x)}$$
$$= \frac{e^{-x}}{1-x} = \Sigma\left(1-1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n,$$

und daraus ergiebt sich die Formel (1.) durch Coefficientenvergleichung.

Eine Substitution, die aus a Cyklen von 1, b von 2, c von 3, u. s. w. Symbolen besteht, ist eine eigentliche oder uneigentliche, je nachdem $b+2c+3d+\cdots$ gerade oder ungerade ist. Daher ist

$$\Sigma \frac{\vartheta(n)}{n!} x^n = \Sigma \frac{(-1)^{b+d+\cdots} x^{2b+3c+4d+\cdots}}{2^b.b!3^c.c!4^d.d!\dots} = e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots}$$
$$= e^{-x+l(1+x)} = (1+x)e^{-x} = \Sigma \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n!} x^n$$

und folglich $\vartheta(n) = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Mit Hülfe der Formel (6.) kann man auch leicht erkennen, dass die Gleichung (7.) § 4 nur ein specieller Fall der Gleichung (8.) § 2 ist. Damit zwei Substitutionen ähnlich seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die Zahlen $a, b, c, \dots$ für beide die nämlichen Werthe haben; man kann daher

diese Zahlen die Invarianten einer Klasse ähnlicher Substitutionen nennen. Sind von den $s_{a,b,c,\dots}$ Substitutionen der durch die Invarianten $a, b, c, \dots$ charakterisirten Klasse $h_{a,b,c,\dots}$ in $\mathfrak{H}$ und $g_{a,b,c,\dots}$ in $\mathfrak{G}_\mu$ enthalten, so ist nach Formel (8.) § 2

$$\frac{gh}{s} m_\mu = \Sigma \frac{g_{a,b,c,\dots} h_{a,b,c,\dots}}{s_{a,b,c,\dots}}.$$

Ist $\mu > a$, so ist $g_{a,b,c,\dots} = 0$; ist aber $\mu \leqq a$, so ist nach Formel (6.)

$$g_{a,b,c,\dots} = \frac{(n-\mu)!}{(a-\mu)!2^b.b!3^c.c!\dots}$$

und folglich

$$\frac{s g_{a,b,c,\dots}}{\mu! g s_{a,b,c,\dots}} = \frac{a!}{\mu!(a-\mu)!} = \binom{a}{\mu}$$

oder Null, je nachdem $a \geqq \mu$ oder $a < \mu$ ist. Mithin ist

$$\frac{h m_\mu}{\mu!} = \sum_{a,b,c,\dots} \binom{a}{\mu} h_{a,b,c,\dots} = \sum_a \binom{a}{\mu} \Big(\sum_{b,c,\dots} h_{a,b,c,\dots} \Big).$$

Da aber $\sum_{b,c,\dots} h_{a,b,c,\dots} = h_a$ die Anzahl der Substitutionen ist, die genau a Elemente ungeändert lassen, so ist

$$\frac{h m_\mu}{\mu!} = \sum_\lambda \binom{\lambda}{\mu} h_\lambda.$$

§ 7.

Mit Hülfe der in § 4 entwickelten Formeln lassen sich einige interessante Ergebnisse des Herrn *Netto* (dieses Journal, Bd. 83; vgl. auch *Mathieu, Liouville* Journal 1861, pag. 314) einfach beweisen:

Durch Subtraction der Formeln (2.) und (3.) § 4 erhält man

$$(1.) \qquad h(m_1 - 1) + h_0 = \sum_\lambda{}_2^n (\lambda - 1) h_\lambda.$$

Ist die Gruppe $\mathfrak{H}$ transitiv, also $m_1 = 1$, so ist daher

$$(2.) \qquad h_0 = \sum_\lambda{}_2^n (\lambda - 1) h_\lambda.$$

Da $h_n = 1$ ist, so ist folglich $h_0 \geqq n-1$.

I. *Jede transitive Gruppe enthält mindestens $n-1$ Substitutionen, die kein Symbol ungeändert lassen. Enthält eine solche Gruppe mehr als $n-1$ derartige Substitutionen, so enthält sie auch Substitutionen, die einige der Symbole, aber nicht alle, ungeändert lassen.*

In ähnlicher Weise zeigt man, dass $h_{\mu-1}$ von Null verschieden ist, wenn $m_\mu = 1$ ist *).

Bildet man aus den h_0 Substitutionen von $\mathfrak{H}$, die kein Symbol ungeändert lassen, sämmtliche Combinationen, so erhält man eine Gruppe $\mathfrak{H}'$, die ein Divisor von $\mathfrak{H}$ ist, und deren Ordnung h' sei. Enthält dieselbe h'_λ Substitutionen, die genau λ Symbole ungeändert lassen, so ist $h'_0 = h_0$ und $h'_\lambda \leqq h_\lambda$. Subtrahirt man nun von der Formel (1.) die analoge Formel

$$h'(m'_1-1)+h'_0 = \Sigma(\lambda-1)h'_\lambda,$$

so erhält man

$$h'(m'_1-1)-h(m_1-1)+\Sigma_\lambda{}_2^n(\lambda-1)(h_\lambda-h'_\lambda) = 0.$$

Ist $m_1 = 1$, so sind alle Glieder dieser verschwindenden Summe positiv, und folglich ist $m'_1 = 1$ und $h_\lambda = h'_\lambda (\lambda > 1)$. Daraus folgt:

II. *Stimmen zwei Gruppen in den Substitutionen überein, die alle Symbole versetzen, und ist die eine transitiv, so ist es auch die andere, und beide können sich nur in den Substitutionen unterscheiden, welche genau ein Symbol ungeändert lassen.*

Da $h_\lambda = h'_\lambda$ ist, so ist nach Gleichung (6.) § 4 auch $hm_\mu = h'm'_\mu (\mu > 1)$. Ist nun $m_3 = 1$, also $m_3 = m_2$, so ist auch $m'_3 = m'_2$. Nach Satz II § 5 ist folglich, falls $n > 3$ ist, $m'_3 = 1$ und mithin $h = h'$. Ist aber $\mathfrak{H}$ die symmetrische und $\mathfrak{H}'$ die alternirende Gruppe vom Grade 3, so ist $h = 2h'$. Es ergiebt sich also der Satz:

II. *Stimmt eine mehr als zweifach transitive Gruppe, deren Grad grösser als 3 ist, mit einer andern Gruppe in den Substitutionen überein, welche alle Symbole versetzen, so sind beide identisch.*

Sei allgemeiner $m_2 = 1$ und die Gruppe $\mathfrak{H}_1$, welche von allen das Symbol x_1 nicht versetzenden Substitutionen von $\mathfrak{H}$ gebildet wird, primitiv. Die Gruppe $\mathfrak{H}'$ ist, wie leicht zu sehen, mit jeder Substitution von $\mathfrak{H}$ vertauschbar. Folglich ist auch die Gruppe $\mathfrak{H}'_1$, welche von allen das Symbol x_1 nicht versetzenden Substitutionen von $\mathfrak{H}'$ gebildet wird, mit jeder Substitution von $\mathfrak{H}_1$ vertauschbar. Da $\mathfrak{H}_1$ primitiv ist, so ist nach einem Satze des Herrn *Jordan* (Traité des subst. 53) die Gruppe $\mathfrak{H}'_1$, falls sie nicht die Hauptgruppe ist, transitiv. Nach Satz I § 5 ist demnach $m'_2 = 1$ und mithin,

*) Diese Folgerungen sind auf demselben Wege schon von *Cauchy* (*C.* pag. 1030) entwickelt. Dies scheint Herrn *Jordan* entgangen zu sein, der den obigen Satz (*Liouville* Journal tom. XVII pag. 353) etwas anders hergeleitet hat. (Vgl. Formel (8.), § 5.)

da $hm_2 = h'm'_2$ ist, $h = h'$. Wenn aber $\mathfrak{H}'_1$ die Hauptgruppe ist, so ist nach Formel (8.) § 5 $h'_1 = h'_2 = \cdots = h'_{n-1} = 0$ und folglich auch $h_2 = h_3 = \cdots = h_{n-1} = 0$. Der Gleichung $\Sigma\lambda(\lambda-1)h_\lambda = hm_2$ zufolge ist daher $h = n(n-1)$. Die Ordnung der transitiven Gruppe $\mathfrak{H}_1$ ist also ihrem Grade $n-1$ gleich. Eine solche Gruppe kann aber nur dann primitiv sein, wenn sie keine von sich selbst und der Hauptgruppe verschiedene Untergruppe hat, und dies kann nach dem *Sylow*schen Satze nur dann eintreten, wenn $n-1$ eine Primzahl ist (vgl. *Dyck*, Math. Ann. Bd. 22, S. 89). Umgekehrt ist eine transitive Gruppe $\mathfrak{H}_1$, deren Ordnung $n-1$ eine Primzahl ist, stets primitiv. Die zweifach transitiven Gruppen vom Grade n und der Ordnung $h = n(n-1)$ hat Herr *Jordan* (*Liouville* Journal 1872) untersucht. Ist $n-1$ eine ungerade Primzahl, so ist, wie er gezeigt hat, $n = 2^\nu$ und $\mathfrak{H}$ der linearen Gruppe $|z, az+\alpha|$ (mod. 2) isomorph, wo a und α ganze Functionen einer Wurzel einer (mod. 2) irreductibeln Congruenz νten Grades sind. Es ergiebt sich also der Satz:

III. *Wenn diejenigen Substitutionen einer zweifach transitiven Gruppe $\mathfrak{H}$, welche ein bestimmtes Symbol ungeändert lassen, eine primitive Gruppe bilden, und wenn diese Untergruppe nicht von den Potenzen einer cyklischen Substitution gebildet wird, deren Ordnung gleich* 2 *oder eine Primzahl von der Form $2^\nu-1$ ist, so kann keine von $\mathfrak{H}$ verschiedene Gruppe mit $\mathfrak{H}$ in allen Substitutionen übereinstimmen, die jedes Symbol versetzen.*

§ 8.

Zum Schluss will ich kurz einige der Resultate reproduciren, welche *Cauchy, Bertrand, Serret, Mathieu, Jordan, Netto* über die oben mit h_λ und m_μ bezeichneten Zahlen gefunden haben.

Ist $m_n > 2$ und $m_2 = 1$, so ist $h_{n-2} = h_{n-3} = 0$.

Mit dem Zeichen $(1, 2, 3, \dots \varkappa)$ bezeichne ich diejenige cyklische Substitution, welche x_1 in x_2, x_2 in x_3, ... $x_\varkappa$ in x_1 überführt, und die übrigen Symbole ungeändert lässt. Wäre nun $h_{n-3} > 0$, so würde $\mathfrak{H}$ eine Substitution von der Form $A = (1, 2, 3)$ enthalten. Da ferner $m_2 = 1$ ist, so giebt es in $\mathfrak{H}$ eine Substitution H, welche x_3 ungeändert lässt und x_1 durch x_4 ersetzt. Führt diese x_2 in x_α über, so ist $B = H^{-1}AH = (4, \alpha, 3)$. Ist α von 1 und 2 verschieden, so ist $B^{-1}AB = (1, 2, 4)$. Ist $\alpha = 1$, so ist $AB = (1, 2, 3)(4, 1, 3) = (1, 2, 4)$. Ist $\alpha = 2$, so ist $B^2A = (4, 3, 2)(1, 2, 3) = (1, 2, 4)$. Die Gruppe $\mathfrak{H}$ enthält also eine Substitution, welche sich von

A dadurch unterscheidet, dass an Stelle eines beliebigen der drei Indices 1, 2, 3 ein beliebiger neuer Index getreten ist. Durch wiederholte Anwendung der obigen Schlüsse erkennt man, dass $\mathfrak{H}$ alle Substitutionen von der Form (α, β, γ) und folglich auch alle eigentlichen Substitutionen enthält. Mithin ist $m_n = 2$ oder 1. (Vgl. *Netto,* Substitutionentheorie, § 35 und 68.) In derselben Weise zeigt man, dass, wenn $h_{n-2} > 0$ ist, $m_n = 1$ sein muss.

II. *Ist* $m_n > 2$ *und* $m_\varkappa = 1$ *und* $\varkappa > 2$, *so ist* $h_{n-2} = h_{n-3} = \cdots$ $\cdots = h_{n-2\varkappa+3} = 0$.

Sei A eine von E verschiedene Substitution, welche möglichst wenige Symbole umsetzt, nämlich $x_1, x_2, \dots x_\lambda$. Da $m_\varkappa = 1$ ist, so ist $h_{\varkappa-1}$ von Null verschieden, es giebt also Substitutionen, welche $n-\varkappa+1$ Symbole umsetzen. Mithin ist $\lambda \leqq n-\varkappa+1 < n$, und folglich giebt es ein Symbol $x_{\lambda+1}$, das durch A nicht umgesetzt wird.

Wäre $\lambda \leqq \varkappa$, so gäbe es in $\mathfrak{H}$ eine Substitution H, welche $x_1, \dots x_{\lambda-1}$ ungeändert lässt und x_λ durch $x_{\lambda+1}$ ersetzt. Ist

$$A = (1,\ 2,\ \dots\ \alpha)(\alpha+1,\ \dots\ \beta)\dots(\vartheta,\ \dots\ \lambda-1,\ \lambda),$$

so wäre

$$B = H^{-1}AH = (1,\ 2,\ \dots\ \alpha)(\alpha+1,\ \dots\ \beta)\dots(\vartheta,\ \dots\ \lambda-1,\ \lambda+1)$$

und mithin $BA^{-1} = (\lambda-1, \lambda+1, \lambda)$. Nach Satz I kann es aber eine solche Substitution in $\mathfrak{H}$ nicht geben. (*Mathieu, Liouville* Journal Sér. II, tom. 5, pag. 17).

Folglich ist $\lambda > \varkappa$. Nun unterscheide ich zwei Fälle. Ist *erstens* $\varkappa$ das erste Symbol*) eines Cyklus von A, so ist

$$A = (1,\ \dots\ \alpha)(\alpha+1,\ \dots\ \beta)\dots(\gamma,\ \dots\ \varkappa-1)(\varkappa,\ \varkappa+1,\ \dots\ \delta)\dots(\vartheta,\ \dots\ \lambda).$$

Da $m_\varkappa = 1$ ist, so giebt es in $\mathfrak{H}$ eine Substitution H, welche $x_1, \dots x_{\varkappa-1}$ ungeändert lässt und $x_\varkappa$ durch $x_{\lambda+1}$ ersetzt. Dann ist

$$B = H^{-1}AH = (1,\ \dots\ \alpha)(\alpha+1,\ \dots\ \beta)\dots(\gamma,\ \dots\ \varkappa-1)(\lambda+1,\ \varrho,\ \dots\ \sigma)\dots(\xi,\ \dots\ \eta).$$

Da B das Symbol $x_{\lambda+1}$ versetzt, welches A ungeändert lässt, so ist B von A verschieden, also ist $C = BA^{-1}$ nicht gleich E. In dieser Substitution heben sich die Cyklen $(1, \dots \alpha)(\alpha+1, \dots \beta)\dots(\gamma, \dots \varkappa-1)$, und daher

*) Alle Cyklen von A bestehen aus gleich vielen Symbolen, weil sonst eine Potenz von A weniger als λ Symbole versetzen würde. (*C.* pag. 1237.) Ist p die Anzahl der Symbole in einem Cyklus von A, so ist die obige Annahme identisch mit der Voraussetzung $\varkappa \equiv 1 \pmod{p}$.

versetzt sie höchstens $2(\lambda-\varkappa+1)$ Symbole. Nach der Bedeutung von λ ist folglich $2(\lambda-\varkappa+1) \geqq \lambda$ oder $\lambda \geqq 2\varkappa-2$. (*Jordan,* Traité des subst. § 83.)

Ist *zweitens* $\varkappa$ nicht das erste Element eines Cyklus, so wähle man in $\mathfrak{H}$ eine Substitution H, welche $x_1, \dots x_{\varkappa-1}$ ungeändert lässt und $x_\varkappa$ durch $x_{\varkappa+1}$ ersetzt. Ist dann

$$A = (1, \dots \alpha)(\alpha+1, \dots \beta)\dots(\gamma, \dots \varkappa-1, \varkappa, \dots \delta)\dots(\vartheta, \dots \lambda),$$

so ist

$$B = H^{-1}AH = (1, \dots \alpha)(\alpha+1, \dots \beta)\dots(\gamma, \dots \varkappa-1, \varkappa+1, \dots \varrho)\dots(\xi, \dots \eta).$$

Da $x_{\varkappa-1}$ in A durch $x_\varkappa$ und in B durch $x_{\varkappa+1}$ ersetzt wird, so ist A von B verschieden, also ist $C = BA^{-1}$ nicht gleich E. In C kommen ferner die Symbole $x_1, \dots x_{\varkappa-2}$ nicht mehr vor. Ausser diesen Symbolen enthalten die Substitutionen A und B noch die Symbole $x_{\varkappa-1}$, $x_{\varkappa+1}$ und ferner noch jede $\lambda-\varkappa$ weitere Symbole. Daher versetzt C höchstens $2(\lambda-\varkappa)+2$ Symbole und folglich ist $2\lambda-2\varkappa+2 \geqq \lambda$ oder $\lambda \geqq 2\varkappa-2$. (*Netto,* Substitutionentheorie, § 67.) Mithin giebt es in $\mathfrak{H}$ ausser E keine Substitution, welche weniger als $2\varkappa-2$ Symbole versetzt, oder es ist $h_{n-2} = h_{n-3} = \dots = h_{n-2\varkappa+3} = 0$. Den Formeln (6.) § 4 zufolge kann man die obigen Sätze *) auch so aussprechen:

III. *Ist* $m_n > 2$ *und* $m_2 = 1$, *so ist* $m_n = 1.m_{n-1} = 1.2.m_{n-2} = 1.2.3.m_{n-3}$.

IV. *Ist* $m_n > 2$ *und* $m_\varkappa = 1$ *und* $\varkappa > 2$, *so ist*

$$m_n = 1!m_{n-1} = 2!m_{n-2} = 3!m_{n-3} = \dots = (2\varkappa-3)!m_{n-2\varkappa+3}.$$

Durch ähnliche Betrachtungen lässt sich zeigen, dass, wenn unter den in Satz II gemachten Voraussetzungen $h_{n-2\varkappa+2}$ von Null verschieden ist, immer $h_\varkappa = 0$ sein muss.

Ausser den in § 5 entwickelten und den in den obigen Sätzen enthaltenen Beschränkungen unterliegen die Zahlen m_μ (oder was auf dasselbe hinauskommt, die Zahlen h_λ) noch mancherlei anderen. m_n kann nicht zwischen 2 und n liegen, ausser für $n = 4$, wo $m_n = 3$ sein kann. Ist $m_n = n$, so ist $m_\mu = \mu+1$ $(\mu < n)$, und in allen Substitutionen der Gruppe bleibt ein bestimmtes Symbol ungeändert. In Bezug auf die übrigen ist die Gruppe die symmetrische vom Grade $n-1$; ausgenommen ist der Fall $n = 6$. Zwischen n und $2n$ kann m_n nicht liegen, wenn $n > 6$ ist; zwischen $2n$ und $\frac{n(n-1)}{2}$ kann m_n nie liegen, zwischen $\frac{n(n-1)}{2}$ und $n(n-1)$ nicht, wenn

*) Während des Drucks dieser Arbeit erschien im 29. Bande der Math. Ann. eine Abhandlung des Herrn *Bochert,* in der jene Sätze in der nämlichen Art bewiesen sind.

$n > 8$ ist. Ist $m_n = 2n$, so ist $m_\mu = \mu+1$ $(\mu < n-2)$, $m_{n-2} = n$, $m_{n-1} = 2n$, und in allen Substitutionen bleibt ein bestimmtes Symbol ungeändert. In Bezug auf die übrigen ist die Gruppe die alternirende vom Grade $n-1$. Ausgenommen ist der Fall $n = 6$. Wenn ferner $m_2 = 1$, und allgemeiner wenn $\mathfrak{H}$ primitiv ist, so ist m_n durch jede Primzahl theilbar, die kleiner als $n-2$ ist.

Ist $m_2 = 1$, so ist h_0 durch $n-1$ theilbar, und der Quotient gleich der Anzahl derjenigen Substitutionen von $\mathfrak{H}$, welche kein Element ungeändert lassen und x_1 durch x_2 ersetzen. (*Netto,* dieses Journal Bd. 83, S. 52.)

Ist $m_n > 2$, und λ der kleinste von Null verschiedene Werth, für den $h_{n-\lambda}$ von Null verschieden ist, so kann λ keine Primzahl sein, ausser wenn $\lambda \geqq n-2$ ist.

Alle diese Sätze, namentlich also die Untersuchungen über die Beziehungen zwischen dem Transitivitätsgrade und der kleinsten Anzahl von Symbolen, welche durch eine Substitution der Gruppe versetzt werden, die über die obere Grenze des Transitivitätsgrades, die über die Anzahl der Werthe einer Function mehrerer Unbestimmten, beschäftigen sich sämmtlich mit der Lösung specieller Fälle der Aufgabe, die allgemeiner gefasst lautet: Die Beschränkungen zu finden, denen die Zahlen m_μ unterworfen sind.

Zürich, December 1886.

Ueber die rationale ebene Curve vierter Ordnung.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

In der Theorie der rationalen Curven spielen gewisse Involutionen auf denselben eine hervorragende Rolle. In einem Raume von $p-1$ Dimensionen ist die auf einer rationalen Curve $n$ter Ordnung ($n \geqq p$) sich ergebende Involution von $n$ter Ordnung und der $(n-p)$ten Stufe dadurch bestimmt, dass jede Punktgruppe derselben apolar oder conjugirt ist zu allen Punktgruppen der Curve, welche auf einem linearen Raume $(p-2)$ter Dimension liegen. Alle projectiven Eigenschaften der Curve müssen sich durch Eigenschaften dieser Involution ergeben. Dieser Satz ist von der fundamentalsten Bedeutung für die Behandlung der rationalen Curven und von Herrn *Brill* zuerst aufgestellt worden *). Die Herleitung der Involution kann auf einem mehr geometrischen Wege erzielt werden durch Betrachtung gewisser zu der gegebenen Curve covarianter Curvensysteme niederer Ordnung. Für die Raumcurve vierter Ordnung habe ich auf synthetischem Wege diese Curvensysteme dritter und zweiter Ordnung abgeleitet **). Die Herren *Study* und *Jolles* ***) haben sie in allgemeiner Weise analytisch behandelt und letzterer hat ihnen den bezeichnenden Namen „Osculanten" beigelegt.

Durch Projection der Raumcurve ϱ_4 auf eine Ebene erhalten wir die rationale ebene Curve vierter Ordnung R_4 und aus den Osculanten von ϱ_4 diejenigen von R_4. Herr *Study* zeigte nun, dass jedem Punkte des Raumes eine gewisse Involution vierter Ordnung erster Stufe entspricht,

*) *Brill*, über binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades. Math. Ann. Bd. 20 S. 335.

**) Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art etc. dieses Journal Bd. 101, S. 73.

***) *Study*, über die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art. Sitzungsber. der Kgl. sächs. Ges. d. W. 1886. *Jolles*, Theorie der Osculanten etc. Habilitationsschrift, Aachen 1886.

welche durch Projection auch auf R_4 übertragen werden kann. Diese wichtige Fundamentalinvolution kann nach Herrn *Meyer* auch direct in der Ebene mit Hülfe einer gewissen Kegelschnittschaar gefunden werden*); oder, wie mir scheint, auf dem besten und natürlichsten Wege mit Hülfe der Osculanten. Die Behandlungsweise der Curve R_4 in diesem Aufsatze ist eine analytische, doch beruhen die Operationen meist auf synthetischen Ueberlegungen. Ich werde deshalb, wo es mir nothwendig oder interessant erscheint, den analytischen Operationen synthetische Betrachtungen vorausschicken. —

§ 1.

Allgemeine Betrachtung.

Jede ebene rationale Curve R_4 vierter Ordnung kann als das perspective Bild von unendlich vielen rationalen Raumcurven ϱ_4 vierter Ordnung angesehen werden. Die Tangenten von ϱ_4 verbinden die entsprechenden Punkte von einfach unendlich vielen projectiven kubischen Raumcurven ϱ_3, welche auf der Tangentenfläche von ϱ_4 liegen und deren Schmiegungsebenen eine *Steiner*sche Fläche Φ_3 dritter Klasse vierter Ordnung umhüllen. Für letztere ist ϱ_4 eine Haupttangentencurve, und alle Tangentialebenen von Φ_3 treffen ϱ_4 in vier harmonischen Punkten. Je zwei der Curven ϱ_3 haben eine gemeinsame Schmiegungsebene, welche der einen ϱ_3 in dem Punkte sich anschmiegt, der dem Berührungspunkte der andern mit ϱ_4 entspricht. Auf der *Steiner*schen Fläche Φ_3 giebt es einfach unendlich viele Kegelschnitte ϱ_2,. welche ϱ_4 einhüllen. Ihre Ebenen sind Schmiegungsebenen von ϱ_4. Jede ϱ_2 liegt auf der Tangentenfläche derjenigen ϱ_3, welche mit ϱ_2 die ϱ_4 in demselben Punkte berührt. Die Axen aller ϱ_3 bilden einen *Reye*schen Complex, dessen Tetraeder von den vier stationären Ebenen der ϱ_4 gebildet wird. Die ϱ_4 doppelt berührenden Ebenen sind Tangentialebenen einer Fläche zweiten Grades, auf welcher die Tangenten von ϱ_4 in den stationären Ebenen liegen. Alle Ebenen, welche ϱ_4 in äquianharmonischen Punkten schneiden, umhüllen eine Fläche zweiten Grades, welche auch von den Schmiegungsebenen von ϱ_4 berührt wird**).

Für die ebene rationale Curve R_4 vierter Ordnung erhalten wir hier-

---

*) *Fr. Meyer,* Apolarität und rat. Curven S. 238. Tübingen 1883.

**) Vergl. die angegebenen Abh. und *Cremona,* Annali di Mat. Bd. 4.

nach folgende Sätze. Die Tangenten von R_4 in solchen vier Punkten, welche als Bilder derjenigen Punkte von ϱ_4 angesehen werden dürfen, in welchen stationäre Ebenen osculiren, umhüllen mit den vier Doppeltangenten von R_4 denselben Kegelschnitt *). Es giebt somit unendlich viele Gruppen solcher vier Punkte auf R_4, welche die fundamentale biquadratische Involution I_4, bilden. Hierdurch sind die R_3 und R_2, die Bilder der ϱ_3 und ϱ_2, ebenfalls in Gruppen von je vieren geordnet. Je zwei solcher R_3 haben eine gemeinschaftliche Wendetangente, sodass im Ganzen die vier R_3 sechs Wendetangenten haben, welche die Seiten eines vollständigen Vierecks bilden. Letzteres ist das Bild des von den stationären Ebenen der zugehörigen ϱ_4 gebildeten Tetraeders. Die vier R_2 einer Gruppe sind die Bilder der in den singulären Ebenen von Φ_3 liegenden Kegelschnitte dieser Fläche und sind den vier aus den Seiten des Vierecks gebildeten Dreiecken einbeschrieben. Je zwei derselben berühren sich in einem Punkte der gemeinsamen Seite. Die Ecken dieser vollständigen Vierecke liegen auf einem Kegelschnitte K, dem Schnitt des *Reye*schen Complexkegels für das Projectionscentrum mit der Bildebene; ihre Seiten umhüllen eine Curve F_3 dritter Klasse, die scheinbare Grenze von Φ_3, und schneiden R_4 in je vier harmonischen Punkten. Die Kegelschnitte R_2 berühren F_3 in den drei Punkten, in welchen sie auch die Wendetangenten der zugehörigen R_3 berühren. Alle die Curve R_4 in vier äquianharmonischen Punkten schneidenden Geraden umhüllen einen Kegelschnitt S, welcher durch die sechs Wendetangenten von R_4 bestimmt ist. Letztere sind die gemeinsamen Tangenten von S und F_3. In einem Wendepunkte von R_4 hat die berührende R_3 ebenfalls einen Wendepunkt und die R_2 reducirt sich auf die Wendetangente. R_4 wird in seinen sechs Wendepunkten von F_3 berührt. In jedem Wendepunkte von R_4 vereinigen sich zwei Punkte eines zu I_4 gehörenden Quadrupels.

§ 2.

Ueber die ebene rationale Curve dritter Ordnung.

Wir schicken folgende Bemerkungen über die ebene rationale Curve R_3 dritter Ordnung voraus.

---

*) Vergl. *Meyer*, Apolarität.

Für $i=1, 2, 3$ seien die Coordinaten einer R_3 dargestellt durch *):

$$\varrho x_i = a_i + 3b_i\lambda + 3c_i\lambda^2 + d_i\lambda^3,$$

wobei ϱ ein beliebiger Factor und λ ein veränderlicher Parameter ist. Homogen schreiben wir:

$$\varrho x_i = a_i\mu^3 + 3b_i\mu^2\lambda + 3c_i\mu\lambda^2 + d_i\lambda^3 = f_i(\lambda, \mu).$$

Die erste Osculante von R_3 im Punkte λ_1, d. h. der Kegelschnitt, welcher R_3 in dem Punkte λ_1 berührt und dem Dreiecke der Wendetangenten von R_3 einbeschrieben ist, wird dann dargestellt durch:

$$\varrho x_i' = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \mu}\mu_1 + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda}\lambda_1\right)$$

oder:

$$\varrho x_i' = (a_i + b_i\lambda_1) + 2(b_i + c_i\lambda_1)\lambda + (c_i + d_i\lambda_1)\lambda^2.$$

Ist λ_1 der Parameter eines Wendepunktes von R_3, so reducirt sich dieser Kegelschnitt auf die Wendetangente, und es folgt daher für λ_1 die Gleichung:

$$\text{(I.)}\qquad 0 = \begin{vmatrix} a_1 + b_1\lambda_1 & b_1 + c_1\lambda_1 & c_1 + d_1\lambda_1 \\ a_2 + b_2\lambda_1 & b_2 + c_2\lambda_1 & c_2 + d_2\lambda_1 \\ a_3 + b_3\lambda_1 & b_3 + c_3\lambda_1 & c_3 + d_3\lambda_1 \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung der Wendetangente ist dann aber:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & a_1 + 2b_1\lambda_1 + c_1\lambda_1^2 & b_1 + 2c_1\lambda_1 + d_1\lambda_1^2 \\ x_2 & a_2 + 2b_2\lambda_1 + c_2\lambda_1^2 & b_2 + 2c_2\lambda_1 + d_2\lambda_1^2 \\ x_3 & a_3 + 2b_3\lambda_1 + c_3\lambda_1^2 & b_3 + 2c_3\lambda_1 + d_3\lambda_1^2 \end{vmatrix}.$$

Sind u_1, u_2, u_3 die Coordinaten der Wendetangente, so gelten für sie deshalb die Beziehungen:

$$\text{(II.)}\qquad \Sigma_i a_i u_i + \lambda_1 \Sigma_i b_i u_i = 0;\quad \Sigma_i b_i u_i + \lambda_1 \Sigma_i c_i u_i = 0;\quad \Sigma_i c_i u_i + \lambda_1 \Sigma_i d_i u_i = 0.$$

Sind λ_2 und λ_3 die übrigen Wurzeln der Gleichung (I.), so folgt aus (II.)

$$\Sigma a_i u_i + (\lambda_1 + \lambda_2)\Sigma b_i u_i + \lambda_1\lambda_2 \Sigma c_i u_i = 0,$$

$$\Sigma b_i u_i + (\lambda_1 + \lambda_2)\Sigma c_i u_i + \lambda_1\lambda_2 \Sigma d_i u_i = 0$$

und endlich:

$$\Sigma a_i u_i + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\Sigma b_i u_i + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\Sigma c_i u_i + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Sigma d_i u_i = 0.$$

Diese Gleichung muss identisch erfüllt sein, weil die drei Wendetangenten von R_3 nicht durch einen Punkt gehen. Schreibt man Gleichung (I.) daher

*) Vergl. die Arbeiten der Herren *Study* und *Jolles* über diese Bildungen.

in der Form:

$$A\lambda_1^3 + B\lambda_1^2 + C\lambda_1 + D = 0,$$

so gelten die drei Beziehungen:

$$a_i A - b_i B + c_i C - d_i D = 0.$$

Bekanntlich liegen die drei Wendepunkte von R_3 auf einer Geraden, deren Gleichung wir schreiben:

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0.$$

Dann folgt:

$$\Sigma a_i v_i = D; \quad 3\Sigma b_i v_i = C; \quad 3\Sigma c_i v_i = B; \quad \Sigma d_i v_i = A;$$

weshalb:

$$\text{(III.)} \quad v_1 = [a_2 d_3] - 3[c_2 b_3]; \quad v_2 = [a_3 d_1] - 3[c_3 b_1]; \quad v_3 = [a_1 d_2] - 3[c_1 b_2];$$

wobei $[a_2 d_3] = a_2 d_3 - a_3 d_2$ etc. ist.

§ 3.

Die Curve R_4 und ihre eindeutige Beziehung auf K.

Für $i = 1, 2, 3$ seien die Coordinaten von R_4 gegeben durch

$$\text{(1.)} \quad \varrho x_i = a_i + 4b_i\lambda + 6c_i\lambda^2 + 4d_i\lambda^3 + e_i\lambda^4$$

oder homogen:

$$\varrho x_i = a_i\mu^4 + 4b_i\mu^3\lambda + 6c_i\mu^2\lambda^2 + 4d_i\mu\lambda^3 + e_i\lambda^4 = f_i(\lambda, \mu).$$

Für die erste Osculante in dem Punkte λ_1 ergiebt sich dann die Darstellung:

$$\varrho x_i' = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \mu}\mu_1 + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda}\lambda_1\right).$$

Oder:

$$\text{(2.)} \quad \varrho x_i' = (a_i + b_i\lambda_1) + 3(b_i + c_i\lambda_1)\lambda + 3(c_i + d_i\lambda_1)\lambda^2 + (d_i + e_i\lambda_1)\lambda^3.$$

Ist nun λ_2 der Parameter eines Wendepunktes von R_3, so ergiebt sich nach (I.) für ihn die Gleichung:

$$\text{(3.)} \quad 0 = \begin{vmatrix} a_1 + b_1(\lambda_1+\lambda_2) + c_1\lambda_1\lambda_2 & b_1 + c_1(\lambda_1+\lambda_2) + d_1\lambda_1\lambda_2 & c_1 + d_1(\lambda_1+\lambda_2) + e_1\lambda_1\lambda_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3 + b_3(\lambda_1+\lambda_2) + c_3\lambda_1\lambda_2 & \cdots & c_3 + d_3(\lambda_1+\lambda_2) + e_3\lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt die Gleichung für die Parameter der Wendepunkte von R_4, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ gesetzt wird (§ 1). Sind u_1, u_2, u_3 die Coordinaten der Wendetangenten von R_3 und setzen wir

$$\Sigma_i a_i u_i = a, \quad \Sigma_i b_i u_i = b, \quad \text{etc.,}$$

so folgt nach (II.):

$$(4.)\quad \begin{cases} a+b(\lambda_1+\lambda_2)+c\lambda_1\lambda_2 = 0, \\ b+c(\lambda_1+\lambda_2)+d\lambda_1\lambda_2 = 0, \\ c+d(\lambda_1+\lambda_2)+e\lambda_1\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

und hieraus:

$$(5.)\quad F_3 = 0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

die Gleichung der Curve F_3, welche von den Wendetangenten aller R_3 umhüllt wird. Sie ist die Invariante J_3 der in λ biquadratischen Form:

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 = 0,$$

und (5.) sagt aus, dass alle Tangenten von F_3 die Curve R_4 in vier harmonischen Punkten schneiden.

Sind λ_3 und λ_4 die beiden andern Wurzeln der in λ_2 kubischen Gleichung (3.), so leiten wir aus (4.) folgende Gleichungen ab:

$$(6.)\quad \begin{cases} a+b(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+c(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)+d\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0, \\ b+c(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+d(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)+e\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

und endlich die Identität:

$$(7.)\quad a+b\sum_1^4{}_\alpha\lambda_\alpha+c\sum_1^4{}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta+d\sum_1^4{}_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma+e\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0.$$

Sind deshalb λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 Wurzeln der Gleichung:

$$(8.)\quad A\lambda^4+B\lambda^3+C\lambda^2+D\lambda+E = 0,$$

so bestehen zwischen den Coefficienten die drei Beziehungen

$$(9.)\quad a_iA-b_iB+c_iC-d_iD+e_iE = 0.$$

Je vier Werthe λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, welche der Gleichung (8.) genügen, bilden ein Quadrupel der fundamentalen biquadratischen Involution I_4 auf R_4. Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad [abc] \quad \text{etc.}$$

und ist τ eine veränderliche Grösse, so kann, wenn $[bcd]$ nicht gleich Null ist, gesetzt werden:

$$A = [dcb];\quad B = [dca]+\tau[edc];\quad C = [dba]+\tau[edb];$$
$$D = [cba]+\tau[ecb];\quad E = \tau[dcb].$$

Die Gleichungen (4.) sagen aus, dass die zu zweien Wurzeln von (8.) gehörenden R_3 eine gemeinsame Wendetangente haben. Die Gleichungen (6.) sagen aus, dass die zu dreien Wurzeln von (8.) gehörenden R_3 drei je zweien gemeinsame Wendetangenten besitzen, welche durch einen Punkt gehen. Wir wollen den Ort dieses Punktes X bestimmen. Seine Coordinaten können in doppelter Art dargestellt werden:

$$(10.)\quad \begin{cases} \varrho X_i = a_i+b_i(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+c_i(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)+d_i\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \\ \sigma X_i = b_i+c_i(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+d_i(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)+e_i\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \end{cases}$$

wobei:

$$\varrho+\lambda_4\sigma = 0.$$

X_i ist symmetrisch ausgedrückt durch λ_1, λ_2, λ_3 und kann deshalb mit Hülfe von (3.) als Function von λ_4 dargestellt werden. Wir entwickeln (3.), nachdem wir λ_4 an Stelle von λ_1 gesetzt haben, in:

$$M_0(\lambda_4)+M_1(\lambda_4).\lambda_2+M_2(\lambda_4).\lambda_2^2+M_3(\lambda_4).\lambda_2^3 = 0,$$

wobei:

$$\begin{aligned} M_0(\lambda_4) &= [cba]+[dba].\lambda_4+[dca].\lambda_4^2+[dcb].\lambda_4^3, \\ M_1(\lambda_4) &= [dba]+\{[eba]+[dca]\}.\lambda_4+\{[eca]+[dcb]\}.\lambda_4^2+[ecb].\lambda_4^3, \\ M_2(\lambda_4) &= [dca]+\{[eca]+[dcb]\}.\lambda_4+\{[eda]+[ecb]\}.\lambda_4^2+[edb].\lambda_4^3, \\ M_3(\lambda_4) &= [dcb]+[ecb].\lambda_4+[edb].\lambda_4^2+[edc].\lambda_4^3, \end{aligned}$$

und finden dann unter Berücksichtigung von Identitäten der Form:

$$-e_i[dcb]+d_i[ecb]-c_i[edb]+b_i[edc] = 0, \quad \text{etc.}$$

$$(11^a.)\quad M_3(\lambda_4).\sigma.X_i = \alpha_i+2\beta_i.\lambda_4+\gamma_i.\lambda_4^2,$$

wobei:

$$(11^b.)\quad \begin{cases} \alpha_i = -e_i[cba]+d_i[dba]-c_i[dca]+b_i[dcb], \\ 2\beta_i = -e_i[dba]+d_i\{[eba]+[dca]\}-c_i\{[eca]+[dcb]\}+b_i[ecb], \\ \gamma_i = d_i[dcb]-c_i[ecb]+b_i[edb]-a_i[edc]. \end{cases}$$

Der Ort des Punktes X ist der Kegelschnitt K, welchem die Wendedreiecke aller R_3 und die in § 1 gefundenen vollständigen Vierecke einbeschrieben sind. K ist durch den Parameter λ projectiv der Art auf R_4 bezogen, dass die drei mit X in einem Quadrupel von I_4 liegenden Punkte von K das Wendedreieck der in x die Curve R_4 berührenden R_3 bilden.

Aus (10.) folgt für die Gleichung des Kegelschnittes K

$$\begin{vmatrix} x_1, & 0, & a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ x_2, & 0, & a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ x_3, & 0, & a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ 0, & x_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1 \\ 0, & x_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2 \\ 0, & x_3, & b_3, & c_3, & d_3, & e_3 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 4.

Der Wendekegelschnitt.

Die Herren *Brill* und *Grassmann* *) haben zuerst gezeigt, dass die sechs Wendepunkte von R_4 auf einem Kegelschnitte w, dem sogenannten Wendekegelschnitte, liegen. Wir wollen dies auf synthetischem Wege nachweisen und die Anhaltspunkte zur Gewinnung einer Darstellung von w suchen.

Bekanntlich ist die *Steiner*sche Fläche Φ_3 in Verbindung mit dem Ebenenbündel, dessen Mittelpunkt $\varDelta$ der Schnittpunkt der drei Doppelgeraden von Φ_3 ist, Singularitätenfläche von unendlich vielen quadratischen Strahlencomplexen. Zu jedem dieser Complexe gehört eine Haupttangentencurve von Φ_3 der Art, dass alle durch einen beliebigen Punkt dieser Curve in seiner Schmiegungsebene gezogenen Geraden Complexstrahlen sind **). Jeder Complexkegel enthält den Punkt $\varDelta$ und projicirt einen auf Φ_3 liegenden Kegelschnitt ***).

Zu unserer Curve ϱ_4 gehört nun auch ein solcher Complex. Derjenige seiner Kegel, welcher das Projectionscentrum zur Spitze hat, schneidet die Bildebene in einem Kegelschnitte w, auf welchem die sechs Wendepunkte von R_4 liegen.

w schneidet R_4 ausserdem in zwei Punkten, welche als Bilder wirklicher Schnittpunkte von ϱ_4 mit dem betreffenden Kegelschnitte auf Φ_3 anzusehen sind. Die Curve F_3 wird von w in drei Punkten berührt. Auf w

*) *Brill,* Ueber rat. Curven vierter Ordnung. Math. Ann. Bd. 12 S. 104. *Grassmann,* (Dissertat. Berlin 1875).

**) Vergl. *Klein* u. *Lie,* Ueber die Haupttangentencurven der *Kummer*schen Fläche. Math. Ann. Bd. 23, S. 579.

***) Vergl. *Weiler,* Einfache Erzeugung einiger Complexe zweiten Grades. Dieses Journal, Bd. 95, S. 140.

befindet sich nun auch das Bild L des Punktes $\varDelta$. Greifen wir auf R_4 ein Quadrupel von I_4 heraus, dann besteht das entsprechende Quadrupel auf K aus den Bildern der Ecken des von den singulären Ebenen der Φ_3 gebildeten Tetraeders. Die Berührungspunkte gegenüberstehender Seiten des Vierecks mit F_3 oder den Kegelschnitten R_2 des Quadrupels werden durch die Bilder der Doppelgeraden von Φ_3 verbunden. Diese drei Verbindungsgeraden treffen einander somit in L. Wird das Quadrupel von I_4 verändert, so bewegt sich L auf dem Wendekegelschnitte w. Hieraus ergiebt sich die Parameterdarstellung für die Punkte von w.

Um die zweite Osculante R_2 von R_4 in dem Punkte λ_1 zu erhalten, bilden wir:

$$\varrho x_i'' = \frac{1}{4.3}\left\{\frac{\partial^2 f_i}{\partial \mu^2}\mu_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_i}{\partial\mu\partial\lambda}\mu_1\lambda_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}\lambda_1^2\right\}.$$

Setzt man hier $\lambda = \lambda_2$, so hat man den Berührungspunkt der zweiten Osculanten $R_2^{(\lambda_1)}$ und $R_2^{(\lambda_2)}$ mit F_3 oder auch mit der gemeinsamen Wendetangente von $R_3^{(\lambda_1)}$ und $R_3^{(\lambda_2)}$ in der Form:

$$\begin{aligned}\varrho x_i'' &= a_i + b_i(\lambda_1+\lambda_2) + c_i\lambda_1\lambda_2 \\ &\quad + (\lambda_1+\lambda_2)(b_i + c_i(\lambda_1+\lambda_2) + d_i\lambda_1\lambda_2) \\ &\quad + \quad \lambda_1\lambda_2(c_i + d_i(\lambda_1+\lambda_2) + e_i\lambda_1\lambda_2).\end{aligned}$$

Die gemeinsame Wendetangente von $R_3^{(\lambda_1)}$ und $R_3^{(\lambda_2)}$ ist aber die Verbindungslinie der Punkte X''' und X^{IV} auf K, welche den Parameterwerthen λ_3 und λ_4 entsprechen. Wir können deshalb x_i'' linear und homogen durch X_i''' und X_i^{IV} ausdrücken. Da nun nach (10.):

$$\begin{aligned}\varrho X_i''' &= a_i + b_i(\lambda_1+\lambda_2) + c_i\lambda_1\lambda_2 + \lambda_4(b_i + c_i(\lambda_1+\lambda_2) + d_i\lambda_1\lambda_2), \\ \sigma X_i''' &= b_i + c_i(\lambda_1+\lambda_2) + c_i\lambda_1\lambda_2 + \lambda_4(c_i + d_i(\lambda_1+\lambda_2) + e_i\lambda_1\lambda_2)\end{aligned}$$

und $\varrho' X_i^{IV}$, $\sigma' X_i^{IV}$ sich hieraus durch Vertauschung von λ_4 mit λ_3 ergeben und

$$\sigma = \sigma'; \quad \varrho = -\lambda_3\sigma; \quad \varrho' = -\lambda_4\sigma'; \quad \varrho\lambda_4 = \varrho'\lambda_3$$

ist, so findet man leicht:

$$\nu x_i'' = \{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)X_i''' + (\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)X_i^{IV}\},$$

wobei:

$$\nu = \frac{\varrho}{\sigma}(\lambda_3-\lambda_4) = -\lambda_3(\lambda_3-\lambda_4).$$

Führt man jetzt folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{1}{M_3(\lambda)}\{\Sigma\alpha_i u_i + 2\lambda\Sigma\beta_i u_i + \lambda^2\Sigma\gamma_i u_i\} = \psi(\lambda)$$

und setzt

$$\frac{\psi(\lambda_\alpha)\psi(\lambda_\beta)\psi(\lambda_\gamma)}{(\lambda_\delta-\lambda_\alpha)(\lambda_\delta-\lambda_\beta)(\lambda_\delta-\lambda_\gamma)} = \Psi(\lambda_\delta),$$

so lautet die Gleichung von F_3:

$$(12.)\qquad \Psi(\lambda_1)+\Psi(\lambda_2)+\Psi(\lambda_3)+\Psi(\lambda_4) = 0.$$

In der That, diese Gleichung stellt eine Curve dritter Klasse dar, welche die sechs Seiten des K einbeschriebenen, zu den Parametern λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 gehörenden Viereckes der Punkte X', X'', X''', X^{IV} berührt und zwar in denselben Punkten wie F_3. Nach *Cayley* *) findet man dann als Gleichung des Punktes z, in welchem die Verbindungslinien der Berührungspunkte gegenüberstehender Seiten des Vierecks zusammentreffen:

$$\Sigma_\alpha\psi(\lambda_\alpha)(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)(\lambda_\alpha-\lambda_\gamma)(\lambda_\alpha-\lambda_\delta) = 0,$$

was man auch direct aus der obigen Darstellung von x_i'' hätte schliessen können. Um die Coordinaten z_i zu finden, schreiben wir die letzte Gleichung in der Form:

$$u_1z_1+u_2z_2+u_3z_3 = 0$$

und setzen wieder:

$$\psi(\lambda_\delta) = \sum_1^3{}_i\,(e_i\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma+d_i(\lambda_\alpha\lambda_\beta+\lambda_\beta\lambda_\gamma+\lambda_\gamma\lambda_\alpha)+c_i(\lambda_\alpha+\lambda_\beta+\lambda_\gamma)+b_i)u_i;$$

dann ergiebt sich:

$$\varkappa z_i = \sum_1^4{}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)(\lambda_\alpha-\lambda_\gamma)(\lambda_\alpha-\lambda_\delta)(e_i\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta+d_i\sum_1^3{}_{\beta\gamma}\,\lambda_\beta\lambda_\gamma+c_i\sum_1^3{}_\beta\,\lambda_\beta+b_i)$$

oder unter Benutzung der Identitäten (7.):

$$(13^a.)\qquad \begin{cases}\varkappa z_i = a_i\{2\Sigma\lambda_\alpha\lambda_\beta-\Sigma\lambda_\alpha^2\}^2+8b_i\Sigma\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma+c_i\{2\Sigma\lambda_\alpha^2\lambda_\beta\lambda_\gamma+24\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta\} \\ \qquad +8d_i\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta\Sigma\lambda_\alpha+e_i\{2\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta\Sigma\lambda_\alpha\lambda_\beta-\Sigma\lambda_\alpha^2\lambda_\beta^2\lambda_\gamma^2\},\end{cases}$$

wobei die Summen über die vier Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 der Gleichung

$$(8.)\qquad A\lambda^4+B\lambda^3+C\lambda^2+D\lambda+E = 0$$

auszudehnen sind. Es folgt:

$$(13^b.)\qquad \begin{cases}A^2\varkappa z_i = a_i(4AC-B^2)-8b_iAD+c_i(2BD-16AE) \\ \qquad -8d_iBE+e_i(4CE-D^2).\end{cases}$$

---

*) *Cayley*, Mém. sur les courbes du trois. ordre. Journal de Math. Tome IX 1844.

Aus diesen und den drei Gleichungen:

$$a_iA-b_iB+c_iC-d_iD+e_iE = 0$$

erhält man durch Elimination der Grössen A, B, C, D, E die Gleichung des Wendekegelschnittes w. Andrerseits sind die Gleichungen (13.) eine Parameterdarstellung für die Punkte von w, da die Grössen A, B, C, D, E lineare ganze Functionen einer Veränderlichen τ sind. Wir können auch B und D als homogene Parameter auffassen und setzen:

$$[ace]A=[bce]B+[dce]D;\quad [ace]C=[abe]B+[ade]D;$$
$$[ace]E=[acb]B+[acd]D.$$

Man überzeugt sich nachträglich leicht, dass der durch (13.) dargestellte Kegelschnitt die sechs Wendepunkte von R_4 enthält. Setzen wir nämlich $\lambda_1=\lambda_2$, so erhalten wir einen Wendepunkt, und für z_i folgt:

$$\varkappa z_i = (\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_1)^2(e_i\lambda_1^2\lambda_3+d_i(\lambda_1^2+2\lambda_3\lambda_1)+c_i(2\lambda_1+\lambda_3)+b_i)$$
$$+(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_1)^2(e_i\lambda_1^2\lambda_4+d_i(\lambda_1^2+2\lambda_4\lambda_1)+c_i(2\lambda_1+\lambda_4)+b_i)$$

oder:

$$\varkappa z_i = -(\lambda_3-\lambda_4)^2(a_i+4b_i\lambda_1+6c_i\lambda_1^2+4d_i\lambda_1^3+e_i\lambda_1^4);$$

w enthält demnach diesen Wendepunkt.

§ 5.

Die Doppeltangenten von R_4 und zwei kubische Involutionen.

Die biquadratische Involution I_4 auf R_4 hängt, wie in § 1 gezeigt worden ist, auf das Engste mit den Eigenschaften der Doppeltangenten zusammen. Die vier Doppeltangenten von R_4 sind die Grundtangenten einer Kegelschnittschaar Δ, deren Curven noch je vier Tangenten mit R_4 gemein haben. Letztere berühren R_4 in vier Punkten eines Quadrupels von I_4. Der Theorie der Raumcurve ϱ_4 entnehmen wir nun folgenden Satz: Die Tangente von ϱ_4 in einer stationären Ebene liegt noch mit einer zweiten Tangente von ϱ_4 in einer Ebene, welche den Schnittpunkt der drei anderen stationären Ebenen enthält. Liegt daher ein Punkt x von R_4 in einem Berührungspunkte einer Doppeltangente von R_4, so enthält diese Doppeltangente den dem Punkte x entsprechenden Punkt X von K. Diese Beziehung wird aber analytisch ausgedrückt durch:

$$(14.)\quad 0=\begin{vmatrix} \alpha_1+2\beta_1\lambda+\gamma_1\lambda^2 & a_1+3b_1\lambda+3c_1\lambda^2+d_1\lambda^3 & b_1+3c_1\lambda+3d_1\lambda^2+e_1\lambda^3 \\ \alpha_2+2\beta_2\lambda+\gamma_2\lambda^2 & \cdots & \cdots \\ \alpha_3+2\beta_3\lambda+\gamma_3\lambda^2 & a_3+3b_3\lambda+3c_3\lambda^2+d_3\lambda^3 & b_3+3c_3\lambda+3d_3\lambda^2+e_3\lambda^3 \end{vmatrix}$$

Diese Gleichung achten Grades in λ stellt die Parameter der acht Berührungspunkte der Doppeltangenten dar. Jede Doppeltangente von R_4 schneidet K in den beiden Punkten, welche den Berührungspunkten der Doppeltangente mit R_4 entsprechen. Wir wollen jetzt folgenden Satz beweisen: „Jede Curve der Schaar Δ hat mit R_4 und K je vier gemeinsame Tangenten, deren Berührungspunkte entsprechende Quadrupel der Involution I_4 bilden".

Bezeichnen wir die vier Doppeltangenten mit d_1, d_2, d_3, d_4 und nehmen wir an, die Curve ϱ_4 habe einen wirklichen Doppelpunkt, dessen Bild einer der Doppelpunkte von R_4 ist, so liegt ϱ_4 auf zwei Kegelflächen zweiten Grades, deren Spitzen sich in die Schnittpunkte von d_1 mit d_2 und d_3 mit d_4 abbilden. Die einfachen Tangenten von R_4 aus den Punkten $(d_1 \cdot d_2)$ und $(d_3 \cdot d_4)$ berühren R_4 in zwei Paaren harmonischer Punkte, welche zusammen ein Quadrupel von I_4 bilden. Das von $(d_1 \cdot d_2)$ herrührende Punktpaar auf R_4 trennt nun die Punktpaare harmonisch, in welchen d_1 und d_2 die R_4 berühren. Wir finden daher, dass diesem zu $(d_1 \cdot d_2)$ gehörenden Punktpaare von R_4 auf K auch die Berührungspunkte der aus $(d_1 \cdot d_2)$ an K gelegten Tangenten entsprechen und schliessen daher: „Das von den Geraden $d_1 \ldots d_4$ gebildete Vierseit ist ein Polvierseit für K, d. h. gegenüberstehende Ecken desselben sind bezüglich K conjugirt, und die Seiten seines Diagonaldreiseits treffen K in Punktpaaren, welche den Doppelpunkten von R_4 entsprechen" *). Jede zerfallende Curve der Schaar Δ hat mit R_4 und K je vier Tangenten gemein, deren Berührungspunkte auf R_4 und K entsprechende Quadrupel von I_4 bilden. Es muss deshalb dieser Satz auch für alle Curven der Schaar Δ gelten.

Wir wollen die Gleichung der Curvenschaar Δ aufstellen. Der Schnittpunkt ξ zweier Tangenten von K in den Punkten λ_1 und λ_2 hat die Coordinaten:

$$\nu \xi_i = \alpha_i + \beta_i(\lambda_1 + \lambda_2) + \gamma_i \lambda_1 \lambda_2.$$

Ein Kegelschnitt, welcher mit K die vier Tangenten eines Quadrupels von I_4 gemein hat, besitzt daher, wenn wir

$$\alpha = \Sigma \alpha_i u_i; \quad \beta = \Sigma \beta_i u_i; \quad \gamma = \Sigma \gamma_i u_i$$

setzen, die in λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 symmetrische Gleichung:

$$\Delta = \Sigma(\alpha + \beta(\lambda_\mu + \lambda_\nu) + \gamma \lambda_\mu \lambda_\nu)(\alpha + \beta(\lambda_\varrho + \lambda_\sigma) + \gamma \lambda_\varrho \lambda_\sigma) = 0.$$

---

*) Vergl. auch die Abbildung der R_4 auf einen beliebigen Kegelschnitt. *Meyer*, Apolarität.

Letztere geht unter Berücksichtigung von (8.) in

$$(15.)\quad 3A\alpha^2-3B\alpha\beta+C(\alpha\gamma+2\beta^2)-3D\beta\gamma+3E\gamma^2 = 0$$

über, die Gleichung von $\varDelta$ in Liniencoordinaten.

Die Tangenten einer Curve der Schaar $\varDelta$ schneiden K in einem symmetrischen Punktsysteme zweiten Grades. Sind λ' und λ'' zwei auf einer Tangente der Curve liegende Punkte von K, so ergiebt sich die Relation zwischen λ' und λ'' durch Einsetzen von:

$$\Sigma\alpha_i u_i = -2\lambda'\lambda''; \quad \Sigma\beta_i u_i = \lambda'+\lambda''; \quad \Sigma\gamma_i u_i = -2$$

in die Gleichung (15.), und es folgt:

$$(16.)\quad 6A\lambda'^2\lambda''^2+3B\lambda'\lambda''(\lambda'+\lambda'')+C(\lambda'^2+\lambda''^2+4\lambda'\lambda'')+3D(\lambda'+\lambda'')+6E = 0.$$

Dieser Gleichung genügen die Parameter von je zwei Punkten der R_4, welche auf einer Doppeltangente liegen. Man kann (16.) auch leicht direct durch bekannte Methoden ableiten; sie ist, da $A, \dots E$ nicht völlig bestimmt sind, gleichwerthig mit zwei Gleichungen. Bemerkenswerth ist, dass durch Polarbildung die Gleichung (16.) aus (8.) erhalten wird.

Setzt man nämlich:

$$U = A\lambda'^4+B\lambda'^3\mu'+C\lambda'^2\mu'^2+D\lambda'\mu'^3+E\mu'^3,$$

so ist (16.) identisch mit

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda'^2}\lambda''^2+2\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda'\partial\mu'}\lambda''\mu''+\frac{\partial^2 U}{\partial\mu'^2}\mu''^2 = 0.$$

Das symmetrische Punktsystem, welches durch (16.) definirt ist, würde auf ϱ_4 solche Punkte einander zuordnen, deren Tangenten sich schneiden. Haben die vier Osculationspunkte der stationären Ebenen ein äquianharmonisches Doppelverhältniss, so besitzt die Tangentenfläche von ϱ_4 einen dreifachen Kegelschnitt σ, dessen Bild der von den sechs Wendetangenten der R_4 berührte Kegelschnitt S ist. Die vier Punkte von ϱ_4, welche stationäre Ebenen besitzen, liegen dann in der Ebene von σ. In jedem Punkte von σ treffen drei Tangenten von ϱ_4 zusammen, deren Berührungspunkte auf ϱ_4 die Tripelpunkte einer kubischen Involution bilden *). Wir schliessen hieraus Folgendes. Der Kegelschnitt S schneidet R_4 in zwei Gruppen von je vier äquianharmonischen Punkten. Es giebt auf R_4 zwei kubische Involutionen von der Beschaffenheit, dass je drei Tangenten eines

*) Vergl. *Alb. Brambilla,* Sopra alcuni casi particolari della curva gobba raz. del 4°. ordine. Rendic. della R. Accad. di Napoli 1885.

Tripels in einem Punkte von S zusammenstossen. Für die Punkte von S ist die Gleichung sechsten Grades, von welcher die durch sie gehenden Tangenten der R_4 abhängen, algebraisch lösbar. Der Kegelschnitt S wird in Liniencoordinaten durch die Invariante zweiten Grades von $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3$ dargestellt. Also:

$$(17.)\quad ae-4bd+3c^2 = 0.$$

Die Gleichung einer der kubischen Involutionen erhält man aus (16.), indem man die Bedingung hinzufügt, dass zwischen je zweien der drei Werthe $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ die Gleichung (16.) bestehe. Dann folgt zunächst:

$$(18^a.)\quad C^2-3BD+12EA = 0.$$

Dies ist die Invariante zweiten Grades von U, und (18^a.) sagt aus, dass die vier Punkte des Quadrupels von I_4 ein äquianharmonisches Doppelverhältniss haben. Ist ferner ϑ eine Veränderliche, so ist die kubische Involution gegeben durch:

$$(18^b.)\quad C\lambda^3+3(D+2A\vartheta)\lambda^2+3(2E+B\vartheta)\lambda+\vartheta C = 0.$$

§ 6.

Die Doppelpunkte von R_4.

Die Berechnung der Parameterwerthe für die Doppelpunkte von R ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Die Curve ϱ_4 hat einen wirklichen Doppelpunkt, wenn das Doppelverhältniss seiner vier stationären Ebenen ein harmonisches ist *). Die in dem Doppelpunkte vereinigten Punkte von ϱ_4 trennen dann die beiden Paare der in stationären Ebenen liegenden Punkte von ϱ_4 ebenfalls harmonisch.

Es muss also zunächst die kubische Invariante der Form U verschwinden. D. h.

$$(19^a.)\quad 72ACE-27AD^2+9BCD-27B^2E-2C^3 = 0.$$

Diese Gleichung liefert drei Werthsysteme für die Coefficienten von U. Jedes bestimmt einen Doppelpunkt von R_4, dessen Parameter durch Nullsetzen der *Hesse*schen Form von U:

$$H = (8AC-3B^2)\lambda^4+4(6AD-BC)\lambda^3+2(24AE-2C^2+3BD)\lambda^2 \\ +4(6BE-CD)\lambda+(8EC-3D^2)$$

gefunden werden. Letztere ist, wenn die Gleichung (19.) erfüllt ist, bis

*) Vergl. *Brambilla* a. a. O.

auf einen von λ freien Factor das Quadrat von:

$$(19^b.)\quad \begin{cases} f(\lambda) = (8AC-3B^2)(6BE-CD)\lambda^2+2(6BE-CD)(6AD-BE)\lambda \\ \qquad\qquad +(8EC-3D^2)(6AD-BC); \end{cases}$$

$f(\lambda)=0$ liefert dann die beiden Parameter für einen Doppelpunkt.

Von besonderer Wichtigkeit für eine Gleichungsform der R_4 ist die Curve dritter Ordnung C_3, welche durch die Doppel- und Wendepunkte von R_4 geht. Wir gelangen zu ihrer Gleichung durch folgende Erwägung. Jede der ersten Osculanten ϱ_3 von ϱ_4 ist Ordnungscurve eines durch sie bestimmten Nullsystems. Diese einfach unendlich vielen Nullsysteme liegen in einem Bündel, und alle einem beliebigen Punkte in den Nullsystemen zugeordneten Ebenen bilden einen Büschel zweiter Ordnung. Ist dieser beliebige Punkt unser Projectionscentrum, so schneidet der Ebenenbüschel die Bildebene in einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung N_2. Er besteht aus den Wendegeraden der R_3 und ist projectiv auf R_4 bezogen.

Diejenigen Punkte der R_4, welche auf den ihnen entsprechenden Strahlen von N_2 liegen, sind die Wendepunkte von R_4. R_4 kann nun erzeugt werden durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen unendlich vieler projectiver Strahlenbüschel zweiter Ordnung P_2. Zwei derselben und N_2 bestimmen durch ihre Projectivität drei collineare ebene Systeme. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen derselben ist die gesuchte C_3.

Nach § 1 ist die Wendegerade einer $R_3^{(\lambda)}$ gegeben durch die Gleichung:

$$(20^a.)\qquad v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3 = 0,$$

wobei:

$$(20^b.)\quad \begin{cases} v_1 = [a_2d_3]+3[c_2b_3]+\lambda\{[a_2e_3]-2[b_2d_3]\}+\lambda^2\{[b_2e_3]+3[d_2c_3]\}, \\ v_2 = [a_3d_1]+3[c_3b_1]+\lambda\{[a_3e_1]-2[b_3d_1]\}+\lambda^2\{[b_3e_1]+3[d_3c_1]\}, \\ v_3 = [a_1d_2]+3[c_1b_2]+\lambda\{[a_1e_2]-2[b_1d_2]\}+\lambda^2\{[b_1e_2]+3[d_1c_2]\}. \end{cases}$$

Die nach Potenzen von λ geordnete Gleichung (20^a.) sei dann

$$M+2N\lambda+P\lambda^2 = 0.$$

Die Gleichung eines der Büschel P_2 schreiben wir:

$$\sum_1^3{}_i\, x_i(m_i+2n_i\lambda+p_i\lambda^2) = 0.$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (1.) für die x_i ergeben sich für die neun

Grössen m, n, p sieben lineare homogene Gleichungen. Sind dann zwei Werthsysteme der m, n, p in m', n', p' und m'', n'', p'' berechnet, so ist die Gleichung von C_3:

$$(21.)\quad C_3 = \begin{vmatrix} \Sigma m'_i x_i & \Sigma n'_i x_i & \Sigma p'_i x_i \\ \Sigma m''_i x_i & \Sigma n''_i x_i & \Sigma p''_i x_i \\ M & N & P \end{vmatrix} = 0.$$

Die Doppelpunkte von R_4 haben für C_3 eine besondere Lage. Es giebt nämlich einen Kegelschnitt δ, welcher C_3 in diesen drei Punkten berührt. δ schneidet R_4 noch in zwei Punkten, welche mit den beiden nicht in die Wendepunkte fallenden Schnittpunkten von w und R_4 auf einer Geraden l liegen. Die Gleichung von R_4 kann deshalb die Form annehmen:

$$C_3.l = w.\delta.$$

Sie lässt sich, wenn die Doppelpunkte bekannt sind, mit Hülfe der von Herrn *Brill* benutzten Parameterdarstellung leicht aufstellen.

§ 7.

Einige besondere Formen von R_4.

Viele specielle Curven R_4 lassen sich aus einer ϱ_4 durch specielle Lagen des Projectionscentrums ableiten. Nur einige Fälle will ich hier hervorheben. Hat R_4 einen Undulationspunkt, so muss das Centrum in einer stationären Ebene von ϱ_4 liegen, und der *Reye*sche Complexkegel zerfällt in diese Ebene und eine zweite den Schnittpunkt der drei anderen stationären Ebenen enthaltende. Die Bedingung für einen Undulationspunkt ist demnach: $[\alpha\beta\gamma] = 0$. Es löst sich dann in der Gleichung $A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + D\lambda + E = 0$ ein linearer Factor ab, so dass die Fundamentalinvolution nur dritten Grades bleibt. Hat R_4 zwei Undulationspunkte, so sind sie harmonisch durch die Wendepunkte getrennt.

Liegt das Projectionscentrum auf der *Steiner*schen Fläche Φ_3, so zerfällt der Wendekegelschnitt w in zwei Gerade, von welchen die eine vier Wendepunkte enthält*). Die Gleichung: $A\lambda^4 + B\lambda^3 + \cdots = 0$ kann dann für einen Werth von τ das Quadrat einer Form zweiten Grades von λ werden, deren Factoren die beiden übrigen Wendepunkte liefern. In diesen Punkten wird R_4 von einem Kegelschnitte der Schaar Δ berührt. Man darf

*) Vergl. *Brill*, Math. Ann. Bd. 12.

diese R_4 auch als das Bild derjenigen ϱ_4 ansehen, welche Haupttangentencurve einer Regelfläche dritter Ordnung ist und für welche bekanntlich die stationären Ebenen paarweise vereinigt liegen. Die Curve F_3 erhält eine Doppeltangente.

§ 8.

Beziehung von R_4 zu einem Kegelschnittgewebe zweiter Stufe.

Die Theorie der rationalen ebenen Curve vierter Ordnung hängt auf das innigste zusammen mit der Theorie eines linearen Kegelschnittgewebes zweiter Stufe und einer Curve dritter Klasse, in Bezug auf welche ersteres aus den Polaren aller Geraden der Ebene besteht. Die Curve F_3 ist *Hesse*sche Curve von dreien Curven dritter Klasse, von welchen *eine* von besonderer Wichtigkeit ist. Eigenschaften der Raumcurve ϱ_4, deren perspectives Bild R_4 ist, führen zunächst auf einfach unendlich viele Kegelschnitte einer Schaarschaar. Durch einen Punkt im Raume ist auf ϱ_4 eine biquadratische Involution gegeben *), welche auf alle zu den Tangenten von ϱ_4 perspectiven Osculanten ϱ_3 übertragen wird. Die Schmiegungsebenen einer ϱ_3 sind somit zu Tetraedern geordnet, welche alle Poltetraeder einer bestimmten Fläche zweiten Grades sind **). Die Tetraeder, zu welchen auch dasjenige der vier stationären Ebenen von ϱ_4 gehört, sind *einer* zweiten kubischen Raumcurve einbeschrieben, welche das Projectionscentrum enthält und von ihm aus durch einen Kegel des *Reye*schen Complexes, dem die Tangenten von ϱ_4 angehören, projicirt wird. Die Gesammtheit der ersten Osculanten ϱ_3 liefert so einfach unendlich viele Flächen zweiten Grades, welche eine desmische Fläche vierter Klasse zwölfter Ordnung umhüllen ***). Diese Flächen zweiten Grades sind auch dadurch definirt, dass das Tetraeder der stationären Ebenen von ϱ_4 für sie Poltetraeder ist und dem Projectionscentrum als Polarebenen die Schmiegungsebenen von ϱ_4 zugewiesen sind. Die scheinbaren Grenzen f_2 dieser Flächen in der Ebene von R_4 sind die gesuchten Kegelschnitte.

Die Osculante R_3 von R_4 möge R_4 in dem Punkte x berühren, welchem auf dem Kegelschnitte K der Punkt X zugewiesen sei. Das Dreieck

---

*) Vergl. *Study*, a. a. O.

**) Vergl. *Hurwitz*, Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung, Math. Ann. Bd. 20 S. 135.

***) Vergl. Dieses Journal Bd. 101 S. 90.

der Wendetangenten von R_3 ist dann Poldreieck eines Kegelschnittes f_2, bezüglich dessen dem Punkte X die Tangente von R_4 in x als Polare zugeordnet ist. Ebenso ist x der Pol der Tangente von K im Punkte X. Alle der Curve K einbeschriebenen Quadrupelvierecke sind Polvierecke von f_2. K trägt oder stützt deshalb nach der Bezeichnung des Herrn ***Reye*** alle Kegelschnitte f_2.

Die Gleichung der f_2, welche zu dem Parameterwerthe λ_1 gehört, ist folglich, wenn k_δ Constante sind:

$$f_2 = 0 = \sum_{\delta=2,3,4} k_\delta((\alpha u)^2 + 2(\beta u)\lambda_\delta + (\gamma u)\lambda_\delta^2)^2 = 0 \text{ *)}.$$

Da die Tangente von R_4 im Punkte λ_1 Polare ist des Punktes λ_1 auf K, so ist identisch:

$$\sum_{\delta=2,3,4} k_\delta[a+3b\lambda_1+3c\lambda_1^2+d\lambda_1^3,\ b+3c\lambda_1+3d\lambda_1^2+e\lambda_1^3,\ \alpha+2\beta\lambda_\delta+\gamma\lambda_\delta^2]$$
$$\times((\alpha u)+2(\beta u)\lambda_\delta+(\gamma u)\lambda_\delta^2) = \chi((\alpha u)+2(\beta u)\lambda_1+(\gamma u)\lambda_1^2).$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$a_i+b_i\lambda_1 = \mathfrak{A}_i;\quad b_i+c_i\lambda_1 = \mathfrak{B}_i;\quad c_i+d_i\lambda_1 = \mathfrak{C}_i;\quad d_i+e_i\lambda_1 = \mathfrak{D}_i$$

und bezeichnen wir die Determinante

$$[\mathfrak{A}+2\lambda_1\mathfrak{B}+\lambda_1^2\mathfrak{C},\ \mathfrak{B}+2\lambda_1\mathfrak{C}+\lambda_1^2\mathfrak{D},\ \alpha+2\beta\lambda_\delta+\gamma\lambda_\delta^2] \quad \text{mit} \quad \Delta_\delta,$$

so ergiebt sich:

$$\sum_{\delta=2,3,4} k_\delta\Delta_\delta(\lambda_\delta-\lambda_1) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\delta=2,3,4} k_\delta\Delta_\delta(\lambda_\delta^2-\lambda_1^2) = 0$$

oder:

$$k_2\Delta_2 = (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4);\quad k_3\Delta_3 = (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2);$$
$$k_4\Delta_4 = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3).$$

Nun ist aber:

$$\alpha_i+2\beta_i\lambda_2+\gamma_i\lambda_2^2 = M_3(\lambda_2)\{\mathfrak{B}_i+\mathfrak{C}_i(\lambda_3+\lambda_4)+\mathfrak{D}_i\lambda_3\lambda_4\}$$

und:

$$\mathfrak{A}_i+\mathfrak{B}_i(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+\mathfrak{C}_i(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_4+\lambda_4\lambda_2)+\mathfrak{D}_i\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = 0.$$

Daher:

$$\Delta_2 = M_3(\lambda_2)[\mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D}](\lambda_1-\lambda_4)^2(\lambda_1-\lambda_3)^2 \quad \text{etc.}$$

Also:

$$\varrho k_2 = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_4)\frac{1}{M_3(\lambda_2)};\quad \varrho k_3 = (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)\frac{1}{M_3(\lambda_3)};$$
$$\varrho k_4 = (\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)\frac{1}{M_3(\lambda_4)}.$$

---

*) Es ist hier $(\alpha u) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ etc.

Für die Gleichung von f_2 ergiebt sich folglich:

$$f_2 = \sum_{\delta=2,3,4}(\lambda_1-\lambda_\delta)(\lambda_\gamma-\lambda_\beta)\big((\mathfrak{B}u)+(\mathfrak{C}u)(\lambda_\gamma+\lambda_\beta)+(\mathfrak{D}u)\lambda_\gamma\lambda_\beta\big)$$
$$\times\big((\alpha u)+2(\beta u)\lambda_\delta+(\gamma u)\lambda_\delta^2\big) = 0$$

oder nach Weghebung des Factors $(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_4-\lambda_3)$

$$f_2 = (\alpha u)\big((\mathfrak{C}u)+\lambda_1(\mathfrak{D}u)\big)-2(\beta u)\big((\mathfrak{B}u)+\lambda_1(\mathfrak{C}u)\big)+(\gamma u)\big((\mathfrak{A}u)+\lambda_1(\mathfrak{B}u)\big)$$

und endlich, wenn wir statt λ_1 stets λ setzen:

$$(22.)\quad \begin{cases} 0 = f_2 = \{(\alpha u)(cu)-2(\beta u)(bu)+(\gamma u)(au)\}+2\lambda\{(\alpha u)(du) \\ -2(\beta u)(cu)+(\gamma u)(bu)\}+\lambda^2\{(\alpha u)(eu)-2(\beta u)(du)+(\gamma u)(cu)\}. \end{cases}$$

Die Kegelschnitte f_2 gehören somit einem linearen Gewebe zweiter Stufe an, dessen *Hesse*sche Curve mit F_3 übereinstimmt, wie sich sogleich ergiebt. Vorerst notiren wir einige Relationen, welche zwischen den Grössen a_i, b_i, ... und α_i, β_i, γ_i bestehen und leicht verificirt werden können.

$$(23.)\quad \begin{cases} [\alpha_\mu c_\nu]-2[\beta_\mu b_\nu]+[\gamma_\mu a_\nu] = 0, \\ [\alpha_\mu d_\nu]-2[\beta_\mu c_\nu]+[\gamma_\mu b_\nu] = 0, \\ [\alpha_\mu e_\nu]-2[\beta_\mu d_\nu]+[\gamma_\mu c_\nu] = 0. \end{cases}$$

Nun führen wir in (22.) an Stelle von u_1, u_2, u_3 die Liniencoordinaten (αu), (βu), (γu) ein und finden mit Rücksicht auf die Beziehungen:

$$[\alpha\beta\gamma]\frac{\partial(au)}{\partial(\alpha u)} = [a\beta\gamma] \quad \text{etc.:}$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial(\alpha u)} = (cu)+2\lambda(du)+\lambda^2(eu);\quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial(\beta u)} = -2\big((bu)+2\lambda(cu)+\lambda^2(du)\big);$$
$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial(\gamma u)} = (au)+2\lambda(bu)+\lambda^2(cu).$$

Werden diese Ausdrücke gleich Null gesetzt und dann λ und λ^2 eliminirt, so folgt die Gleichung von F_3 als *Hesse*sche Curve. Werden aber u_1, u_2, u_3 eliminirt, so findet sich als Resultat die Gleichung der Parameterwerthe für die Wendepunkte von R_4.

§ 9.

Fortsetzung.

Die Kegelschnitte f_2 gehören einem linearen Gewebe zweiter Stufe an, welches aus den ersten Polaren aller Geraden der Ebene in Bezug auf eine bestimmte Curve Ψ_3 dritter Klasse besteht. Die Gleichung von Ψ_3

kann sofort niedergeschrieben werden in:

$$(24.)\quad \begin{cases} \Psi_3 = (\gamma u)\{(\alpha u)(cu)-2(\beta u)(bu)+(\gamma u)(au)\}-2(\beta u)\{(\alpha u)(du) \\ -2(\beta u)(cu)+(\gamma u)(bu)\}+(\alpha u)\{(\alpha u)(eu)-2(\beta u)(du)+(\gamma u)(cu)\} = 0. \end{cases}$$

Denn bilden wir unter Berücksichtigung von (23.) die erste Polare von u' bezüglich Ψ_3, so findet sich:

$$(\gamma u')\{(\alpha u)(cu)-2(\beta u)(bu)+(\gamma u)(au)\}-2(\beta u')\{(\alpha u)(du)-2(\beta u)(cu)+(\gamma u)(bu)\}$$
$$+(\alpha u')\{(\alpha u)(eu)-2(\beta u)(du)+(\gamma u)(cu)\} = 0.$$

Für $(\gamma u') = 1$; $(\beta u') = -\lambda$; $(\alpha u') = \lambda^2$ erhält man die Gleichung der f_2. Es sind aber nun die Geraden u' Tangenten des Kegelschnittes K.

Die zweite Polare von u' bezüglich Ψ_3 ist ein Strahlenbüschel, dessen Gleichung lautet:

$$(25.)\quad \begin{cases} (au)(\gamma u')^2-4(bu)(\beta u')(\gamma u')+(cu)\{2(\gamma u')(\alpha u')+4(\beta u')^2\} \\ -4(du)(\beta u')(\alpha u')+(eu)(\alpha u')^2 = 0. \end{cases}$$

Sind die Geraden u' insbesondere Tangenten von K, so hat der Mittelpunkt des Strahlenbüschels die Coordinaten:

$$\varrho x_i = a_i+4b_i\lambda+6c_i\lambda^2+4d_i\lambda^3+e_i\lambda^4,$$

d. h.: ***Die zweiten Polaren der Tangenten von K in Bezug auf die Curve dritter Klasse Ψ_3 sind Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte auf R_4 liegen.*** Aus der Herleitung der Kegelschnitte f_2 folgt noch, dass die zweiten gemischten Polaren der einander entsprechenden Tangenten von K und R_4 die Berührungspunkte der ersteren mit K sind. ***Die ersten Polaren der Tangenten von R_4 in Bezug auf Ψ_3 umhüllen den Kegelschnitt K.***

Sind λ' und λ'' die Parameter der beiden Punkte, in welchen K von u' geschnitten wird, so ist:

$$\mu(\alpha u') = \lambda'\lambda''; \quad -2\mu(\beta u') = \lambda'+\lambda''; \quad \mu(\gamma u') = 1.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (25.) ein, so folgt für den Mittelpunkt der zweiten Polare von u':

$$\varrho x_i = (a_i+2b_i\lambda'+c_i\lambda'^2)+2(b_i+2c_i\lambda'+d_i\lambda'^2)\lambda''+(c_i+2d_i\lambda'+e_i\lambda'^2)\lambda''^2.$$

Dieser Punkt gehört den beiden zweiten Osculanten von R_4 in den Punkten λ' und λ'' von R_4 an, und kann als Bild eines Punktes der *Steiner*schen Fläche Φ_3 angesehen werden, in welchem sich zwei Kegelschnitte derselben treffen. Die *Steiner*sche Fläche Φ_3 ist somit eindeutig auf das Geradenfeld der Ebene von R_4 abgebildet. Jeder Geraden entspricht bezüglich Ψ_3

eine zweite Polare, deren Mittelpunkt das perspective Bild eines Punktes der *Steiner*schen Fläche ist. Ein Punkt unserer Ebene ist hingegen das perspective Bild von vier verschiedenen Punkten von Φ_3 und hat vier ihm entsprechende Geraden. Diese sind die Grundtangenten einer Kegelschnittschaar, deren Individuen die ersten Polaren aller durch den Punkt gelegten Geraden bezüglich Ψ_3 sind. Das Vierseit der einem Punkte entsprechenden Geraden ist Polvierseit für ein Kegelschnittsystem zweiter Stufe *), welches das Gewebe der f_2 stützt, und ist der *Hesse*schen Curve des Systems einbeschrieben. Es wird gebildet aus allen Kegelschnitten, welche K in den Quadrupeln der Fundamentalinvolution schneiden. Die *Hesse*sche Curve H^3 des Systems ist zugleich *Cayley*sche Curve des Gewebes. Ihre Gleichung kann in folgender Weise gefunden werden.

Für die Punkte von K haben wir:

$$\tau x_i = \alpha_i + 2\beta_i\lambda + \gamma_i\lambda^2.$$

Setzen wir:

$$\tau[\alpha\beta x] = [\alpha\beta\gamma]\lambda^2 = \xi_1, \quad \tau[\alpha\gamma x] = -2[\alpha\beta\gamma]\lambda = -2\xi_2$$

und

$$\tau[\beta\gamma x] = [\alpha\beta\gamma] = \xi_3,$$

so ist die Gleichung von K:

$$\xi_1\xi_3 - \xi_2^2 = 0.$$

Die Kegelschnitte des Systems haben daher Gleichungen von der Form:

$$\varphi = A\xi_1^2 + B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2 + D\xi_2\xi_3 + E\xi_3^2 + \mu(\xi_1\xi_3 - \xi_2^2) = 0.$$

Wir bilden nun:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} &= 2A\xi_1 + B\xi_2 + \mu\xi_3 = 0,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2} &= \qquad B\xi_1 + 2C\xi_2 + D\xi_3 - 2\mu\xi_2 = 0,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3} &= \qquad\qquad D\xi_2 + 2E\xi_3 + \mu\xi_1 = 0
\end{aligned}$$

und fügen die drei Gleichungen hinzu:

$$a_iA - b_iB + c_iC - d_iD + e_iE = 0.$$

Durch Elimination der $A, B, \ldots \mu$ folgt dann als Gleichung von H^3:

---

*) Vergl. *Reye*, Geometrie der Lage I. Theil S. 194.

$$(26^a.)\qquad H^3 = \begin{vmatrix} 2\xi_1, & \xi_2, & 0, & 0, & 0, & \xi_3 \\ 0, & \xi_1, & 2\xi_2, & \xi_3, & 0, & -2\xi_2 \\ 0, & 0, & 0, & \xi_2, & 2\xi_3, & \xi_1 \\ a_1, & -b_1, & c_1, & -d_1, & e_1, & 0 \\ a_2, & -b_2, & c_2, & -d_2, & e_2, & 0 \\ a_3, & -b_3, & c_3, & -d_3, & e_3, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man hier wieder für ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Werthe λ^2, λ, 1, so ergiebt sich die Parametergleichung der Wendepunkte von R_4.

Wir können der Gleichung von H^3 noch eine andere Form geben, wenn zwei Quadrupel der Fundamentalinvolution durch die Grössenreihen A, B, C, D, E und A', B', C', D', E' bekannt sind.

Dann findet man:

$$(26^b.)\qquad H^3 = \begin{vmatrix} 2A\xi_1+B\xi_2, & 2A'\xi_1+B'\xi_2, & \xi_3 \\ B\xi_1+2C\xi_2+D\xi_3, & B'\xi_1+2C'\xi_2+D'\xi_3, & -2\xi_2 \\ D\xi_2+2E\xi_3, & D'\xi_2+2E'\xi_3, & \xi_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man für ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Werthe λ^2, λ, 1, so ergiebt sich eine Combinante und zwar die Functionaldeterminante der beiden Formen vierten Grades, welche die Quadrupel bestimmen.

§ 10.

Eine zweite Darstellung des Wendekegelschnittes w.

Wir gehen zurück auf die im vorigen § gefundene Abbildung der *Steiner*schen Fläche Φ_3 auf das Geradenfeld unserer Ebene. Beschreibt u' einen Strahlenbüschel, so beschreibt der Mittelpunkt z der zweiten Polaren von u' in Bezug auf Ψ_3 einen Kegelschnitt, welcher F_3 dreimal berührt und Bild eines Kegelschnittes von Φ_3 ist. Liegt der Mittelpunkt des Büschels der Geraden u' auf K, so beschreibt z eine zweite Osculante von R_4. Da der Wendekegelschnitt (vergl. § 4) auch das Bild eines Kegelschnittes von Φ_3 ist, so ist ihm in unserer Ebene ein Strahlenbüschel zugeordnet, welchen wir aufsuchen wollen. Wir knüpfen an die Parameterdarstellung von w durch die Gleichung ((13^a.), § 4) an:

$$\begin{aligned} kz_i \;=\; & a_i(2\Sigma\lambda_\alpha\lambda_\beta-\Sigma\lambda_\alpha^2)+8b_i\Sigma\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma+c_i(2\Sigma\lambda_\alpha^2\lambda_\beta\lambda_\gamma+24\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta) \\ & +8d_i\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta\Sigma\lambda_\alpha+e_i(2\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta\Sigma\lambda_\alpha\lambda_\beta-\Sigma\lambda_\alpha^2\lambda_\beta^2\lambda_\gamma^2). \end{aligned}$$

Soll dieser Punkt z die zweite Polare einer Geraden u' sein, welche den Kegelschnitt K in den Punkten λ' und λ'' schneidet, so muss man nach § 9 haben:

$$\varrho z_i = a_i + 2b_i(\lambda'+\lambda'') + c_i(\lambda'^2 + 4\lambda'\lambda'' + \lambda''^2) + 2d_i\lambda'\lambda''(\lambda'+\lambda'') + e_i\lambda'^2\lambda''^2.$$

Unter Berücksichtigung der Identität (7.):

$$a_i + b_i\Sigma\lambda_\alpha + c_i\Sigma\lambda_\alpha\lambda_\beta + d_i\Sigma\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma + e_i\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma\lambda_\delta = 0$$

kann die Uebereinstimmung beider Darstellungen von z_i erzielt werden, wenn wir diese Identität nach Multiplication mit $4(\lambda_\gamma\lambda_\delta + \lambda_\alpha\lambda_\beta)$ zu kz_i addiren. Wir haben dann nur zu setzen:

$$\tau(\lambda_\gamma + \lambda_\delta - (\lambda_\alpha + \lambda_\beta)) = 1; \quad 2\tau(\lambda_\gamma\lambda_\delta - \lambda_\alpha\lambda_\beta) = \lambda' + \lambda'';$$
$$\tau(\lambda_\gamma\lambda_\delta(\lambda_\alpha + \lambda_\beta) - \lambda_\alpha\lambda_\beta(\lambda_\gamma + \lambda_\delta)) = \lambda'\lambda''.$$

Durch Permutation der λ ist das auf drei Arten möglich, und zwar sind die zugehörigen Werthe von λ' und λ'' die Wurzeln der drei quadratischen Factoren der Covariante T unserer Form vierten Grades $A\lambda^4 + \cdots = 0$. Die drei Geraden u' sind die Seiten des durch das Quadrupel bestimmten Poldreiecks von K. Es fehlt somit noch eine vierte Linie, welche zu z gehört und mit den drei bestimmten die Grundtangenten einer dem Gewebe der f_2 angehörenden Schaar bildet. Die Ecken des Poldreiecks liegen auf H^3, und seine Seiten treffen H^3 je noch einmal in den Punkten einer Geraden, welche die gesuchte vierte Linie u' ist. Wir bestimmen jedoch die zu dem Quadrupel $A\lambda^4 + \cdots = 0$ gehörende Linie u' besser auf folgendem Wege. Ist ein zweites Quadrupel gegeben durch: $A'\lambda^4 + B'\lambda^3 + \cdots = 0$, so können die Ecken der zu beiden Quadrupeln gehörenden Poldreiecke durch einen Kegelschnitt verbunden werden. Letzterem ist hinsichtlich des Curvenbüschels, dessen Grundpunkte das zweite Quadrupel bildet, eine Gerade conjugirt, welche dem ersten Quadrupel zugeordnet und die gesuchte Linie ist. Zwei Curven des Büschels sind durch die Gleichungen gegeben:

$$A'\xi_1^2 + B'\xi_1\xi_2 + C'\xi_2^2 + D'\xi_2\xi_3 + E'\xi_3^2 = 0$$

und

$$\xi_1\xi_3 - \xi_2^2 = 0.$$

Sind η und ξ zwei bezüglich derselben conjugirte Punkte, so ist:

$$(2A'\eta_1 + B'\eta_2)\xi_1 + (B'\eta_1 + 2C'\eta_2 + D'\eta_3)\xi_2 + (D'\eta_2 + 2E'\eta_3)\xi_3 = 0$$

und

$$\eta_3\xi_1 - 2\eta_2\xi_2 + \eta_1\xi_3 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
\varrho\xi_1 &= \qquad B'\eta_1^2+2C'\eta_1\eta_2+D'\eta_1\eta_3+4E'\eta_2\eta_3 \qquad +2D'\eta_2^2,\\
\varrho\xi_2 &= -2A'\eta_1^2-\;B'\eta_1\eta_2 \qquad +\;D'\eta_2\eta_3+2E'\eta_3^2,\\
\varrho\xi_3 &= \qquad -4A'\eta_1\eta_2-B'\eta_1\eta_3-2C'\eta_2\eta_3-\;D'\eta_3^2-2B'\eta_2^2.
\end{aligned}$$

Werden in die Gleichung $m_1\xi_1+m_2\xi_2+m_3\xi_3=0$ obige Werthe der ξ eingesetzt, so ergiebt sich die Gleichung eines dem Poldreieck des zweiten Quadrupels umschriebenen Kegelschnittes. Soll derselbe aber auch dem Poldreieck des ersten Quadrupels umschrieben sein, so müssen fünf Relationen wie:

$$m_1B'-2m_2A'+m_1'B-2m_2'A \;=\; 0 \quad \text{etc.}$$

bestehen. Die dem ersten Quadrupel zugeordnete Gerade hat deshalb die Gleichung:

$$(27.)\quad \begin{vmatrix}
0, & \xi_1, & 0, & \xi_2, & 0, & \xi_3\\
B, & B', & -2A, & -2A', & 0, & 0\\
2C, & 2C', & -B, & -B', & -4A, & -4A'\\
D, & D', & 0, & 0, & -B, & -B'\\
4E, & 4E', & D, & D', & -2C, & -2C'\\
0, & 0, & 2E, & 2E', & -D, & -D'
\end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe ändert sich nicht, wenn das zweite Quadrupel mit irgend einem anderen der Fundamentalinvolution vertauscht wird. Setzt man hier wieder für ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Werthe λ^2, λ, 1, so ist (27.) eine simultane Covariante der beiden Formen vierten Grades. Die in λ quadratische Gleichung liefert, wenn das erste Quadrupel verändert wird, eine Involution zweiten Grades auf K, welche zur Fundamentalinvolution projectiv ist. Der Mittelpunkt P der Involution zweiten Grades ist zugleich der Mittelpunkt des Strahlenbüschels, welcher dem Wendekegelschnitt zugeordnet ist. Letzterer schneidet R_4, abgesehen von den Wendepunkten von R_4, in zwei Punkten, welchen auf K die Doppelpunkte der Involution entsprechen. Wir finden diese durch folgende Operation.

In der Determinante (27.) setzen wir $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$ und nach Multiplication der fünf unteren Horizontalreihen resp. mit $4E$, $-D$, $2C$, $-B$, $4A$ addiren wir sie zur ersten Horizontalreihe. In derselben sind dann wieder gleich Null das erste, dritte und fünfte Glied. Die anderen sind resp. gleich:

$$-4[BE']+2[CD']; \quad 8[AE']-[BD']; \quad -4[AD']+2[BC'],$$

d. h. aber die Wurzeln der in λ quadratischen Gleichung:

$$(28.)\quad \{-4[BE']+2[CD']\}-2\lambda\{8[AE']-[BD']\}+\lambda^2\{-4[AD']+2[BC']\} = 0$$

sind einander conjugirt bezüglich aller Paare der Involution oder sind die Doppelelemente der letzteren. Die Form (28.) ist bekanntlich die einfachste quadratische Combinante der beiden Formen vierten Grades *).

Bemerkenswerth ist die einfache Beziehung zwischen dem Punkte P und dem Kegelschnitte K. Das Kegelschnittsystem zweiter Stufe besteht aus den ersten Polaren der Punkte der Ebene hinsichtlich einer bestimmten Curve dritter Ordnung, deren *Hesse*sche Curve H^3 und deren *Cayley*sche Curve F_3 ist. Die erste Polare von P in Bezug auf jene Curve ist K.

Aus dem Kegelschnitte K geht der von den sechs Wendetangenten der R_4 berührte Kegelschnitt S auf folgende Weise hervor. Den sechs gemeinschaftlichen Tangenten von K und F_3 sind hinsichtlich des Gewebes sechs Tangenten des Kegelschnittes S conjugirt. Die letzteren sechs Linien sind die Wendetangenten von R_4.

§ 11.

Bestimmung der R_4 aus der Fundamentalinvolution.

Die Curve R_4 ist abgesehen von collinearen Veränderungen vollständig bestimmt durch die Fundamentalinvolution oder zwei ihrer Quadrupel. In der That, wirft man diese Involution auf einen beliebigen Kegelschnitt K, so kann nach dem Vorhergehenden die Curve R_4 construirt werden. Um dies auch analytisch auszudrücken, stellen wir zunächst diejenige Relation auf, welche zwischen zwei Elementen eines Quadrupels der Fundamentalinvolution besteht. Die Coefficienten der beiden Formen vierten Grades, welche die Involution bestimmen, seien $A, \dots E$ und $A', \dots E'$. Sind dann λ und λ_1 zwei Elemente eines Quadrupels, so ist:

$$M_0(\lambda_1)+M_1(\lambda_1).\lambda+M_2(\lambda_1).\lambda^2+M_3(\lambda_1).\lambda^3 = 0,$$

wenn:

$$\begin{aligned}
M_0(\lambda) &= \lambda^3[AE']+\lambda^2[BE']+\lambda[CE']+[DE'],\\
M_1(\lambda) &= \lambda^3[AD']+\lambda^2([AE']+[BD'])+\lambda([BE']+[CD'])+[CE'],\\
M_2(\lambda) &= \lambda^3[AC']+\lambda^2([AD']+[BC'])+\lambda([AE']+[BD'])+[BE'],\\
M_3(\lambda) &= \lambda^3[AB']+\lambda^2[AC']+\lambda[AD']+[AE'].
\end{aligned}$$

---

*) Vergl. *Meyer*, Apolarität und rationale Curven S. 284.

Hieraus folgt nach § 3, (11^a.) als Parameterdarstellung des Kegelschnittes K:

$$M_3(\lambda)\sigma x_i = b_i M_3(\lambda) - c_i M_2(\lambda) + d_i M_1(\lambda) - e_i M_0(\lambda)$$

und

$$\tau x_i = \alpha_i + 2\beta_i\lambda + \gamma_i\lambda^2.$$

Also ist:

$$\begin{aligned}\mu\alpha_i &= b_i[AE'] - c_i[BE'] + d_i[CE'] - e_i[DE'],\\ 4\mu\beta_i &= -a_i[AC'] + b_i(2[AD'] + [BC']) - 2c_i([AE'] + [BD'])\\ &\quad + d_i(2[BE'] + [CD']) - e_i[CE'],\\ \mu\gamma_i &= a_i[BA'] - b_i[CA'] + c_i[DA'] - d_i[EA'];\end{aligned}$$

hierzu fügen wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}0 &= a_i A - b_i B + c_i C - d_i D + e_i E,\\ 0 &= a_i A' - b_i B' + c_i C' - d_i D' + e_i E',\\ \varrho x_i &= a_i + 4b_i\lambda + 6c_i\lambda^2 + 4d_i\lambda^3 + e_i\lambda^4\end{aligned}$$

und eliminiren nun aus den letzten sechs Gleichungen die Grössen 1, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, wodurch wir für die Coordinaten der Curve R_4 die Parameterdarstellung erhalten:

$$\frac{\varrho}{\mu}\Delta x_i = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 4\lambda, & 6\lambda^2, & 4\lambda^3, & \lambda^4 \\ \alpha_i, & 0, & [AE'], & -[BE'], & [CE'], & -[DE'] \\ 4\beta_i, & -[AC'], & 2[AD']+[BC'], & -2([AE']+[BD']), & 2[BE']+[CD'], & -[CE'] \\ \gamma_i, & -[AB'], & [AC'], & -[AD'], & [AE'], & 0 \\ 0, & A, & -B, & C, & -D, & E \\ 0, & A', & -B', & C', & -D', & E' \end{vmatrix}.$$

Hierbei ist Δ die fünfreihige Determinante, welche aus der obigen hervorgeht durch Streichen der ersten Horizontal- und der ersten Verticalreihe. Verschwindet Δ, so ist diese Darstellung nur möglich, wenn $[\alpha\beta\gamma]$ gleich Null ist. Δ ist die Resultante der beiden Formen vierten Grades; ihr Verschwinden sagt aus, dass die Fundamentalinvolution sich auf eine solche dritten Grades reducirt und dass R_4 einen Undulationspunkt hat. In allen anderen Fällen ist die obige Darstellung der Punkte von R_4 erlaubt. Die Grössen α_i, β_i, γ_i sind dabei ganz beliebig und wir haben daher eine Parameterdarstellung für alle unter einander collinearen Curven R_4 vor Augen. —

Aachen im März 1886.

Ueber Integrale zweiter Gattung.

(Von Herrn *J. Thomae* in Jena.)

Im 93. Bande dieses Journals habe ich den Ausdruck

$$\partial \lg \vartheta(\ldots,\ u_\nu(\sigma,\ \zeta) - \Sigma u_\nu(s_\mu,\ z_\mu),\ \ldots) : \partial \zeta,$$

in dem die Summation sich auf den Buchstaben μ bezieht, vollständig durch Integrale zweiter Gattung und durch algebraische Functionen sowohl in Bezug auf die Variabeln $s_1,\ z_1;\ s_2,\ z_2;\ \ldots;\ s_p,\ z_p,$ als auch in Bezug auf das hier als Parameter geltende Werthepaar $\sigma,\ \zeta$ dargestellt. Der algebraische Theil enthält eine Function q, deren Quadratwurzel in der zu Grunde liegenden *Riemann*schen Fläche T zweiwerthig, in der einfach zusammenhängenden Fläche T' aber einwerthig ist, und die in p gewissen von $\sigma,\ \zeta$ abhängenden Punkten unendlich klein zweiter Ordnung wird. Es ist q dieselbe Function, welche dazu dient, die Anfangswerthe der überall endlichen Integrale zu bestimmen, wenn diese Bestimmung in der *Clebsch-Gordan*schen Weise ausgeführt werden soll. Ist T eine nur zweiblättrige Fläche aber von beliebigem Geschlecht, so lässt sich die algebraische Function leicht herstellen, und es gelang deshalb, die Darstellung des obigen Differentialquotienten für diesen Fall vollständig explicit zu geben. Für den Fall dreiblättriger Flächen mit lauter doppelten Windungspunkten habe ich die analoge Darstellung in einer Monographie über diesen Gegenstand schon früher durchgeführt. Im allgemeinen Falle blieb noch die Construction jener algebraischen Function übrig. Im 94. Bande dieses Journals habe ich sodann versucht, für den Fall $p = 3$ das Resultat von jener algebraischen Function q zu befreien. Dabei wurde die Grundgleichung, durch welche die algebraische Function s und die wie diese verzweigte Fläche T bestimmt wird, in der üblichen Form vorausgesetzt:

$$F(s,\ z) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0, \quad a_0 = \mathfrak{a}_0, \quad a_1 = \mathfrak{a}_1 z + \mathfrak{b}_1,$$
$$a_2 = \mathfrak{a}_2 z^2 + \mathfrak{b}_2 z + \mathfrak{c}_2, \quad a_3 = \mathfrak{a}_3 z^3 + \mathfrak{b}_3 z^2 + \mathfrak{c}_3 z + \mathfrak{d}_3, \quad a_4 = \mathfrak{a}_4 z^4 + \mathfrak{b}_4 z^3 + \mathfrak{c}_4 z^2 + \mathfrak{d}_4 z + \mathfrak{e}_4.$$

Nun lag aber meinen Betrachtungen die Voraussetzung zu Grunde, dass die in der Fläche T über den Punkten $z = k_1$, $z = k_2$, $z = k_3$, ... liegenden Verzweigungsstellen von einander ***unabhängig*** sein sollten, eine Voraussetzung, welche bei obiger Annahme der Function F ***nicht*** zutrifft. — Ist nämlich eine beliebige vierblättrige Fläche vom Geschlecht $p = 3$ gegeben, so kann man allerdings immer eine Function s construiren, welche in vier beliebigen Punkten, also auch in den vier unendlich fernen Punkten von T unendlich gross erster Ordnung wird, und es enthält diese Function im Allgemeinen zwei willkürliche Constante. Die Gleichung vierten Grades, der sie genügt, ist daher im Allgemeinen die: $(s-az-b)^4 = 0$, und $s = az+b$ ist die Function; sie kann offenbar nicht umgekehrt zur Bestimmung von T dienen. Soll neben $az+b$ noch eine andere Function s existiren, die in den vier unendlich fernen Punkten unendlich gross erster Ordnung wird, so muss diese nach dem ***Riemann-Roch***schen Satze nicht zwei, sondern drei willkürliche Constanten enthalten, und ist, wenn s eine solche Function ist, in der Form $as+bz+c$ enthalten. Dies ist nicht möglich bei beliebiger Lage der Verzweigungspunkte. Die obige Gleichung enthält vierzehn wesentliche Constanten; über drei kann willkürlich verfügt werden, weil s drei Constanten enthält, ohne dass die Lage der Verzweigungspunkte sich ändert. Es können mithin nur noch elf Constanten zur Bestimmung der Lage der zwölf Windungspunkte dienen. Aus einem linearen Strahlenbüschel können zwölf Gerade nicht willkürlich herausgegriffen werden, wenn sie gleichzeitig Tangenten an eine Curve vierter Ordnung sein sollen.

Diese Abhängigkeit der Verzweigungspunkte von einander nöthigt mich, auf den im 94. Bande behandelten Gegenstand nochmals zurückzukommen; da aber auch im allgemeinen Falle einige Vereinfachungen möglich sind, und um nicht fortwährend auf meine früheren Abhandlungen verweisen zu müssen, will ich die Untersuchung für den Fall eines beliebigen p noch einmal kurz wieder aufnehmen, und schicke zunächst einiges über die Bezeichnung voraus.

Das Werthepaar s, z und die ***Riemann***sche wie s verzweigte Fläche T, in der nur einfache im Endlichen liegende, von einander unabhängige Verzweigungspunkte vorkommen sollen, wird durch die Gleichung definirt

$$F(s,\ z) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0,$$

in welcher die Coefficienten a_0, a_1, ... a_n oder $a_0(z)$, $a_1(z)$, ... $a_n(z)$ ganze

Functionen von z vom $m$ten Grade sind. $F_1(s, z)$ ist der partielle Differentialquotient von F nach s, F_2 der nach z, F_{11}, F_{12}, F_{22}, sind die zweiten Differentialquotienten. Bei jeder Function $\Phi(s, z)$ von s und z soll der totale Differentialquotient nach z durch einen Strich bezeichnet werden, so dass

$$\Phi'(s, z) = \frac{d\Phi(s, z)}{dz} = -\frac{\partial\Phi(s, z)}{\partial s}\frac{F_2(s, z)}{F_1(s, z)} + \frac{\partial\Phi(s, z)}{\partial z}$$

ist, und es soll diese Bezeichnung auch auf die logarithmische Differentiation ausgedehnt werden, so dass also

$$\lg'\Phi(s, z) = d\lg\Phi(s, z) : dz$$

ist. Steht für s, z ein anderes Werthepaar unter dem Functionszeichen z. B. $\lg'\Phi(\sigma, \zeta)$, $\Phi'(\sigma, \zeta)$, u. s. w., so ist σ, ζ erst nach der Differentiation für s, z zu setzen, wenn letzteres Werthepaar neben s, z schon selbst als Parameter in der Function vorkommen sollte. Die Fläche T wird durch ein canonisches Schnittnetz a_1, b_1; a_2, b_2; ...; a_p, b_p in eine einfach zusammenhängende Fläche T' zerschnitten. Die überall endlichen Integrale sind in der Form enthalten $\int(\varphi(s, z) : F_1(s, z))dz$, und es geht daraus hervor, was unter einer „Function φ" zu verstehen ist. Wird von den wesentlichen Nullstellen einer Function φ gesprochen, so sind allemal die sich aufhebenden Verzweigungsstellen, in denen die φ immer verschwinden, ***nicht*** mit gemeint. Unter $\varphi_1(s, z)$, $\varphi_2(s, z)$, ... $\varphi_p(s, z)$ sollen speciell diejenigen Functionen φ verstanden werden, welche zur Construction der Normalintegrale

$$u_\mu(s, z) = \int(\varphi_\mu(s, z) : F_1(s, z))dz,$$

wie sie in die Thetafunctionen eingesetzt werden, dienen; unter $\varphi_0(s, z)$ aber wollen wir eine willkürlich, aber fest und möglichst einfach zu bestimmende Function φ verstanden wissen, z. B. die Constante, wenn sich aufhebende Verzweigungspunkte nicht vorhanden sind. Diejenigen Functionen φ, deren Nullstellen paarweis zusammenfallen, die also in $p-1$ Punkten unendlich klein zweiter Ordnung werden, und deren Quadratwurzeln *) ***Abelsche Functionen*** genannt werden, sollen mit $ab(s, z)$, $ab_1(s, z)$, $ab_2(s, z)$, ... und die Doppelnullstellen der Function $ab_\nu(s, z)$ sollen mit $\varepsilon_\nu^{(1)}$, $\varepsilon_\nu^{(2)}$, ... $\varepsilon_\nu^{(p-1)}$ bezeichnet werden. In wie weit man einer *Abel*schen Function eine bestimmte

*) Genauer werden nur die Verhältnisse solcher Quadratwurzeln *Abel*sche Functionen genannt, der obige Gebrauch dient jedoch zur Bequemlichkeit.

Charakteristik und ein bestimmtes System halber Periodicitätsmoduln zuordnen könne, setze ich als bekannt voraus. Das Werthesystem $(v_1, v_2, \dots v_p)$ werde durch $((v))$ abgekürzt. — Die Function $t(\sigma, \zeta; s, z)$ ist ein Normalintegral zweiter Gattung, welches im Punkte σ, ζ wie $1:\zeta-z$ unendlich gross wird, und auf beiden Seiten der Querschnitte a dieselben Werthe besitzt. $\Sigma h_\mu \tau_\mu(\sigma, \zeta)$ oder $(\tau(\sigma, \zeta))$ sei ein System ganzer Periodicitätsmoduln dieses Integrales, überhaupt aber soll das Zeichen Σ, wenn hinter ihm der Buchstabe μ vorkommt, ohne Weiteres eine Summe fordern, in der die Posten dadurch entstehen, dass μ die Werthe 1 bis p annimmt. — Die zu einem z bez. zu einem s gehörenden Werthepaare seien

$$s, z; \quad s^{(1)}, z; \quad s^{(2)}, z; \quad \dots \quad s^{(n-1)}, z;$$
$$s, z; \quad s, z^{(1)}; \quad s, z^{(2)}; \quad \dots \quad s, z^{(m-1)}.$$

Die Verzweigungspunkte liegen über $k_1, k_2, k_3, \dots$; ist k eine beliebige dieser Stellen, so soll der zugehörige Verzweigungspunkt durch k allein fixirt werden. Endlich werde noch für die ganze Function $(F(s, \zeta)-F(\sigma, \zeta)):(s-\sigma)$, die oft vorkommen wird, $H(\sigma, \zeta; s)$ geschrieben.

Art. I. Das Normalintegral zweiter Gattung lässt sich bei unseren Voraussetzungen über die Verzweigungsstellen in die Form bringen

$$(1.)\qquad t(\sigma, \zeta; s, z) = \sum_{(k)} \frac{\partial u_\nu(s, z)}{\partial k} \frac{\chi(\sigma, \zeta; k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)} + \frac{\chi(\sigma, \zeta; s, z)}{(\zeta-z)F_1(s, z)},$$

worin das Zeichen Σ mit dem Index (k) eine Summe bedeutet, deren Posten dadurch entstehen, das k alle Verzweigungswerthe der Reihe nach annimmt, und worin

$$(2.)\qquad \chi(\sigma, \zeta; s, z) = H(\sigma, \zeta; s)+(a_0(z)-a_0(\zeta))s^{n-1}+(z-\zeta)J(s, z)$$

ist, und $J(s, z)$ eine ganze Function höchstens vom Grade $n-1$ in s und vom Grade $m-1$ in z bedeutet, die so zu bestimmen ist, dass $\chi(\sigma, \zeta; s, z)$ in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten verschwindet. Der Anfangswerth eines Integrales t ist durch die Gleichung (1.) bestimmt, wenn der Anfangswerth von $u_\nu(s, z)$ (ν ist willkürlich) gegeben ist. Es wird angenommen, dass die u die *Riemann*schen Anfangswerthe besitzen. Fällt s, z auf σ, ζ, so wird

$$\chi(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta) = H(\sigma, \zeta; \sigma) = F_1(\sigma, \zeta).$$

Sind $\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(2)}, \eta_0^{(3)}, \dots$ die Punkte in T, in denen eine einwerthige Function $\Omega(s, z)$ verschwindet, $\eta_\infty^{(1)}, \eta_\infty^{(2)}, \eta_\infty^{(3)}, \dots$ die Punkte, in denen sie unendlich gross wird, und bedeutet Σ mit dem Index (η_0) oder (η_∞) eine Summe,

deren Posten dadurch entstehen, dass der Punkt s, z der Reihe nach auf $\eta_0^{(1)}, \eta_0^{(2)}, \eta_0^{(3)}, \dots$ bez. $\eta_\infty^{(1)}, \eta_\infty^{(2)}, \dots$ fällt, so liefert der *Abel*sche Satz die Congruenz

$$(3.)\qquad \sum_{(\eta_0)} t(\sigma,\zeta;\, s,\, z)-\sum_{(\eta_\infty)} t(\sigma,\zeta;\, s,\, z)\equiv \lg'\Omega(\sigma,\zeta),$$

worin die Congruenz sich auf Periodicitätsmoduln $\tau(\sigma,\zeta)$ des Integrales $t(\sigma,\zeta;\, s,\, z)$ bezieht. Ist Ω eine in T zweiwerthige, in T' einwerthige Function, deren Quadrat in T einwerthig ist, so kommt dieser Function eine bestimmte Charakteristik zu. Beweist man den *Abel*schen Satz nach der Methode des Herrn *Weber* (Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht 3. Seite 114), so ergiebt sich, dass in diesem Falle der obigen Congruenz noch ein System halber Periodicitätsmoduln hinzugefügt werden muss, dessen Charakteristik die der Function Ω ist, in so weit nicht dadurch eine gewisse Willkür übrig bleibt, dass die Periodicitätsmoduln an den Querschnitten a Null sind.

Der Ausdruck (3.) nimmt eine unbestimmte Form an, wenn einer der Punkte η_∞ der Punkt σ, ζ ist. In diesem Falle lassen wir jenen Punkt η_∞ zunächst σ_1, ζ_1 sein, um ihn später nach σ, ζ rücken zu lassen, und verstehen unter dem Zeichen $\bar\Sigma$ mit dem Index (η_∞) diejenige Summe, welche über alle Punkte η_∞ mit Ausnahme von σ_1, ζ_1 erstreckt wird. Setzen wir noch $\bar\Omega(s,z)=(z-\zeta_1)\Omega(s,z)$, so ergiebt sich

$$\sum_{(\eta_0)} t(\sigma,\zeta;\, s,\, z)-\bar\sum_{(\eta_\infty)} t(\sigma,\zeta;\, s,\, z)\equiv t(\sigma,\zeta;\,\sigma_1,\zeta_1)+\lg'\bar\Omega(\sigma,\zeta)-\frac{1}{\zeta-\zeta_1}$$
$$\equiv \lg'\bar\Omega(\sigma,\zeta)+\sum_{(k)}\frac{\partial u_\nu(\sigma_1,\zeta_1)}{\partial k}\,\frac{\chi(\sigma,\zeta;k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)}+\frac{\chi(\sigma,\zeta;\sigma_1,\zeta_1)-F_1(\sigma_1,\zeta_1)}{(\zeta-\zeta_1)F_1(\sigma,\zeta)}.$$

Lassen wir jetzt den Punkt σ_1, ζ_1 auf σ, ζ fallen, so folgt

$$(4.)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(\eta_0)} t(\sigma,\zeta;\, s,\, z)-\sum_{(\eta_\infty)} t(\sigma,\zeta;\, s,\, z) \\ \displaystyle\equiv \lg'\Omega(\sigma,\zeta)-\frac{\chi'(\sigma,\zeta;\sigma,\zeta)}{F_1(\sigma,\zeta)}+\lg'F_1(\sigma,\zeta)+\sum_{(k)}\frac{\partial u_\nu(\sigma,\zeta)}{\partial k}\,\frac{\chi(\sigma,\zeta;k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)}.\end{cases}$$

Für Ω wählen wir nun eine in T' einwerthige Function $\sqrt{q(\sigma,\zeta;\, s,\, z)}$, deren Quadrat in T einwerthig ist, nämlich die Function

$$(5.)\quad \sqrt{q(\sigma,\zeta;\, s,\, z)}=\frac{\vartheta((u(\sigma,\zeta)-u(s,z)))e^{\chi}}{\vartheta((u(\sigma,\zeta)-u(s,z)-\varpi))}=\frac{\vartheta((\Sigma u(s_{\mu,\zeta},z_{\mu,\zeta})-u(s,z)))e^{\chi}}{\vartheta((\Sigma u(s_{\mu,\zeta},z_{\mu,\zeta})-u(s,z)))},$$

in welcher

$$\chi=\Sigma(u_\mu(s,z)-u_\mu(\sigma,\zeta))h_\mu$$

und

$$((\varpi))=(\tfrac{1}{2}\Sigma h_\mu a_{1\mu}+\tfrac{1}{2}g_1 i\pi,\ \tfrac{1}{2}\Sigma h_\mu a_{2\mu}+\tfrac{1}{2}g_2 i\pi,\ \dots\ \tfrac{1}{2}\Sigma h_\mu a_{p\mu}+\tfrac{1}{2}g_p i\pi)$$

ein System halber gleichzeitiger Periodicitätsmoduln der Integrale u ist, dessen *ungerade* Charakteristik, die auch der Function $\sqrt{q}$ zukommt, kurz mit ϖ bezeichnet wird. Das entsprechende System halber Periodicitätsmoduln des Normalintegrales zweiter Gattung ist dann $\frac{1}{2}\Sigma h_\mu \tau_\mu(\sigma, \zeta)$. Die *Abel*sche Function, welcher die Charakteristik ϖ zukommt, sei $ab(s, z)$ mit den Doppelnullstellen $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots \varepsilon^{(p-1)}$.

Rücken die Punkte $s_1, z_1; s_2, z_2; \dots s_p, z_p$ auf die Punkte $s_{1,\zeta}, z_{1,\zeta}; s_{2,\zeta}, z_{2,\zeta}; \dots s_{p,\zeta}, z_{p,\zeta}$, in denen $\sqrt{q}$ verschwindet, so wird

$$\partial \lg((u(\sigma, \zeta)-\Sigma u(s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}))) : \partial\zeta \equiv 0,$$

woraus die Gleichung fliesst,

$$(6.)\qquad \frac{\partial \lg \vartheta((u(\sigma, \zeta)-\Sigma u(s_\mu, z_\mu)))}{\partial \zeta} \equiv \Sigma t(\sigma, \zeta; s_\mu, z_\mu)-\Sigma t(\sigma, \zeta; s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}),$$

welche von den Punkten $s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}$ befreit werden soll. Hierzu schreiben wir $\bar{q}(\sigma, \zeta; s, z)$ für $(z-\zeta)^2 q(\sigma, \zeta; s, z)$. Da $\sqrt{q}$ im Punkte σ, ζ und den $p-1$ Punkten $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots \varepsilon^{(p-1)}$ unendlich gross erster Ordnung wird, so ist nach (4.)

$$(7.)\quad \begin{cases} \Sigma t(\sigma, \zeta; s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}) \equiv \frac{1}{2}\Sigma h_\mu \tau_\mu(\sigma, \zeta)+\sum\limits_{(\varepsilon)} t(\sigma, \zeta; s, z) \\ +\frac{1}{2}\lg'\bar{q}(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)+\lg' F_1(\sigma, \zeta)-\dfrac{\chi'(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)}{F_1(\sigma, \zeta)}+\sum\limits_{(k)} \dfrac{\partial u_\nu(\sigma, \zeta)}{\partial k} \dfrac{\chi(\sigma, \zeta; k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)}. \end{cases}$$

Bedeutet Σ mit dem Index $(\varphi_0 = 0)$ eine Summe, in welcher die Posten dadurch entstehen, dass der Punkt s, z die wesentlichen Nullwerthe der Function $\varphi_0(s, z)$ der Reihe nach annimmt, so ist noch

$$\sum_{(\varepsilon)} t(\sigma, \zeta; s, z) \equiv \frac{1}{2}\sum_{(\varphi_0=0)} t(\sigma, \zeta; s, z)+\frac{1}{2}\lg' ab(\sigma, \zeta)-\frac{1}{2}\lg'\varphi_0(\sigma, \zeta)+\frac{1}{2}(\tau(\sigma, \zeta)).$$

Hieraus fliesst das Resultat

$$(8.)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial \lg \vartheta((u(\sigma, \zeta)-\Sigma u(s_\mu, z_\mu)))}{\partial \zeta} \equiv 2\Sigma t(\sigma, \zeta; s_\mu, z_\mu)-\lg'\bar{q}(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta) \\ \quad -\lg' ab(\sigma, \zeta)+\lg'\varphi_0(\sigma, \zeta)-2\lg' F_1(\sigma, \zeta)+2\lg'\chi(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta) \\ \quad\quad -2\sum\limits_{(k)} \dfrac{\partial u_\nu(\sigma, \zeta)}{\partial k} \dfrac{\chi(\sigma, \zeta; k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)}-\sum\limits_{(\varphi_0=0)} t(\sigma, \zeta; s, z). \end{cases}$$

Hierin kommen die Nullpunkte der *Abel*schen Function $ab(s, z)$ und der Function $\sqrt{q}$ explicite nicht mehr vor, sondern nur diese Functionen selbst. Die letztere lässt sich mittels bestimmter Integrale ebenfalls noch entfernen, doch ist das Verfahren im Allgemeinen complicirt, und soll deshalb nur im Falle $p = 3$ erörtert werden.

Art. II. Ist die Fläche T dreiblättrig, und besitzt sie zehn Verzweigungspunkte (die alle im Endlichen liegen mögen), so ist sie vom Geschlecht *drei*. In einer Function s, die in drei unendlich fernen Punkten und noch einem vierten unendlich gross wird, ist dieser vierte Punkt nicht willkürlich. Da nämlich die Function $az+b$ in den drei unendlich fernen Punkten unendlich gross wird, so ist sie, weil sie eben nur drei Punkte Unendlich hat, der Quotient zweier Functionen φ, und es giebt deshalb eine Function φ, welche ausser in diesen drei Punkten noch in einem vierten unendlich gross wird. Der vierte Punkt Unendlich hängt von den Verzweigungspunkten ab, aber es giebt bei beliebiger Lage der k immer eine Function s, welche ausser in den drei unendlich fernen, noch in einem anderen allerdings aber von den k abhängenden Punkte $z = z_\infty$ unendlich gross wird, und die daher einer *nicht* in eine Potenz einer Gleichung von niederem Grade zerfallenden Gleichung vom dritten Grade in s genügt. Diese Gleichung hat die Form

$$F(s,\ z) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0, \quad a_0 = a_0(z) = \mathfrak{a}_0 z + \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0(z - z_\infty),$$
$$a_1 = \mathfrak{a}_1 z^2 + \mathfrak{b}_1 z + \mathfrak{c}_1, \quad a_2 = \mathfrak{a}_2 z^3 + \mathfrak{b}_2 z^2 + \mathfrak{c}_2 z + \mathfrak{d}_2, \quad a_3 = \mathfrak{a}_3 z^4 + \mathfrak{b}_3 z^3 + \mathfrak{c}_3 z^2 + \mathfrak{d}_3 z + \mathfrak{e}_3,$$

und enthält dreizehn willkürliche Constanten, von denen drei nicht zur Bestimmung der Lage der Verzweigungswerthe dienen können, weil s drei willkürliche Constanten enthält. Die verbleibenden zehn aber reichen aus, diese Lagen beliebig zu bestimmen. Die Discriminante der Gleichung $F = 0$

$$(a_0 a_3 - \tfrac{1}{9} a_1 a_2)^2 - (\tfrac{1}{9} a_1^2 - a_0 a_2)(\tfrac{1}{9} a_2^2 - a_1 a_3)$$

ist vom zehnten Grade. Die Functionen H und χ haben hier die Formen

$$H(\sigma,\ \zeta;\ s) = a_0(\zeta)(s^2 + s\sigma + \sigma^2) + a_1(\zeta)(s + \sigma) + a_2(\zeta),$$
$$\chi(\sigma,\ \zeta;\ s,\ z) = H(\sigma,\ \zeta;\ s) + (a_0(z) - a_0(\zeta))s^2,$$

$a_0(\zeta)\sigma + a_1(\zeta)$ ist Null für $\zeta = z_\infty$, also ist H an dieser Stelle endlich. Die drei Werthepaare s, z, die zu den unendlich fernen Punkten gehören, sollen $\infty, \infty;\ \infty^{(1)}, \infty;\ \infty^{(2)}, \infty$ sein. — Die Function φ_0 sollte möglichst einfach gewählt werden. Wird die Zahl Eins dafür genommen, so sind als die Nullpunkte dieser Function φ die drei unendlich fernen Punkte von T und die Stelle $s = \infty$, $z = z_\infty$ anzusehen. Die Summe der Werthe eines Integrales u in jenen Punkten ist congruent Null. Das Gleiche gilt aber nicht von den Integralen zweiter Gattung, weil in ihnen die Differentialquotienten der u nach den k vorkommen, und weil das eine z der Nullpunkte der Function φ_0, nämlich z_∞ von den k abhängig ist. Hieraus eben entspringt

der Unterschied der hier zu gewinnenden Formel von der im 94. Bande gegebenen; denn aus diesem Grunde gelingt es nicht, für die über die Punkte $\varphi_0 = 0$ erstreckte Summe einen ganz einfachen Ausdruck zu schreiben, wir wollen aber zur Abkürzung

$$t(\sigma,\zeta;\infty,z_\infty)+t(\sigma,\zeta;\infty,\infty)+t(\sigma,\zeta;\infty^{(1)},\infty)+t(\sigma,\zeta;\infty^{(2)},\infty) = T_0(\sigma,\zeta)$$

schreiben. Die Gleichung (8.) geht dann für den vorliegenden Fall in die Form über

$$(9.)\quad \begin{cases} 2\partial \lg \vartheta((u(\sigma,\zeta)-\Sigma u(s_\mu,z_\mu))):\partial\zeta \\ \equiv 2\Sigma t(\sigma,\zeta;s_\mu,z_\mu)-T_0(\sigma,\zeta)-\lg' \bar{q}(\sigma,\zeta;\sigma,\zeta)-\lg' ab(\sigma,\zeta) \\ -2\lg' F_1(\sigma,\zeta)+2\lg'\chi(\sigma,\zeta;\sigma,\zeta)-2\sum_{(k)}\frac{\partial u_\nu(\sigma,\zeta)}{\partial k}\frac{\chi(\sigma,\zeta;k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)}. \end{cases}$$

Diese Formel, welche den logarithmischen Differentialquotienten, der der Gegenstand dieser Untersuchung ist, bis auf ein System halber Periodicitätsmoduln darstellt (halber Periodicitätsmoduln, weil der Formel der Factor 2 gegeben ist), kann als genügend angesehen werden, weil sie nur die Kenntniss der *Abel*schen Functionen (Doppeltangenten) voraussetzt, was auch in anderen Untersuchungen geschieht, und weil die Function q durch diese sich darstellen lässt. Es lassen sich aber mittels bestimmter Integrale diese Function und auch das System halber Periodicitätsmoduln entfernen, was noch geschehen soll. — Hierzu stellen wir $\sqrt{\bar{q}}(\sigma,\zeta;s,z)$ in der Form dar

$$\sqrt{\bar{q}}(\sigma,\zeta;s,z) = f(\sigma,\zeta;s,z):ab(s,z)\sqrt{ab_1(s,z).ab_2(s,z)}.$$

Darin hat die Function $\sqrt{ab_1.ab_2}$ die Charakteristik ϖ und ist f eine ganze Function von s und z, vom Grade 3 in z, vom Grade 2 in s, die aber nur Glieder von der dritten Dimension, oder niedere enthält, und also neun Constanten besitzt. Diese sind so zu bestimmen, dass f in den Punkten

$$\sigma^{(1)},\ \zeta;\quad \sigma^{(2)},\ \zeta;\quad \varepsilon^{(1)},\ \varepsilon^{(2)},\ \varepsilon_1^{(1)},\ \varepsilon_1^{(2)},\ \varepsilon_2^{(1)},\ \varepsilon_2^{(2)}$$

verschwindet, wodurch f bis auf einen constanten Factor bestimmt ist. Wir geben aber f weiter die Form

$$f(\sigma,\zeta;s,z) = H(\sigma,\zeta;s)+(z-\zeta)G(\sigma,\zeta;s,z),$$

so dass

$$\lg'\bar{q}(\sigma,\zeta;\sigma,\zeta)+\lg' ab(\sigma,\zeta) = 2\frac{H'(\sigma,\zeta;\sigma)}{F_1(\sigma,\zeta)}+2\frac{G(\sigma,\zeta;\sigma,\zeta)}{F_1(\sigma,\zeta)}$$
$$-\lg' ab(\sigma,\zeta)ab_1(\sigma,\zeta)ab_2(\sigma,\zeta)$$

ist, und beweisen, dass

$$L(\sigma, \zeta) = 2G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta) - F_1(\sigma, \zeta)\lg' ab(\sigma, \zeta) ab_1(\sigma, \zeta) ab_2(\sigma, \zeta)$$

eine ganze Function von σ, ζ ist.

Die Punkte $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon_1^{(1)}$, $\varepsilon_1^{(2)}$, $\varepsilon_2^{(1)}$, $\varepsilon_2^{(2)}$ mögen der Reihe nach den Werthepaaren $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_1; \mathfrak{s}_2, \mathfrak{z}_2; \mathfrak{s}_3, \mathfrak{z}_3; \ldots \mathfrak{s}_6, \mathfrak{z}_6$ entsprechen, und die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & \mathfrak{z}_1, & \mathfrak{z}_1^2, & \mathfrak{s}_1, & \mathfrak{s}_1\mathfrak{z}_1, & \mathfrak{s}_1^2 \\ 1, & \mathfrak{z}_2, & \mathfrak{z}_2^2, & \mathfrak{s}_2, & \mathfrak{s}_2\mathfrak{z}_2, & \mathfrak{s}_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \mathfrak{z}_6, & \mathfrak{z}_6^2, & \mathfrak{s}_6, & \mathfrak{s}_6\mathfrak{z}_6, & \mathfrak{s}_6^2 \end{vmatrix}$$

möge mit E bezeichnet werden. Wird aber s, z für $\mathfrak{s}_\mu$, $\mathfrak{z}_\mu$ gesetzt, so soll E in $E^{(\mu)}(s, z)$ übergehen. Alsdann ist den Bedingungen gemäss, die f befriedigen muss:

$$G(\sigma, \zeta; s, z) = \Sigma \frac{H(\sigma, \zeta; \mathfrak{s}_\mu)}{\zeta - \mathfrak{z}_\mu} \cdot \frac{E^{(\mu)}(s, z)}{E},$$

aus welcher Darstellung hervorgeht, dass $G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)$ als Function von σ, ζ im Punkte $\mathfrak{s}_\mu$, $\mathfrak{z}_\mu$, wie $F_1(\sigma, \zeta):\zeta - \mathfrak{z}_\mu$ unendlich gross wird, so dass $L(\sigma, \zeta)$ in den Punkten $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon_1^{(1)}$, ... $\varepsilon_2^{(2)}$ endlich bleibt. Für alle andern Stellen, in denen σ, ζ endlich ist, bleibt diese Function endlich, weshalb sie entweder eine ganze Function von σ, ζ ist, oder doch nur einen Nenner hat, der eine Potenz von $a_0(\zeta)$ ist. — Für σ, ζ gleich ∞, z_∞ wird

$$F_1(\sigma, \zeta)\lg' ab(\sigma, \zeta) ab_1(\sigma, \zeta) ab_2(\sigma, \zeta)$$

unendlich gross in der zweiten Ordnung, und da $H(\sigma, \zeta; \mathfrak{s})$ für $a_0(\zeta) = 0$ endlich bleibt, so wird auch $G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)$ für $\zeta = z_\infty$, $s = \infty$ unendlich gross in der zweiten Ordnung. Wird eine Function $L(\sigma, \zeta)$ für $\sigma, \zeta = \infty$, z_∞ unendlich gross *zweiter* Ordnung und bleibt sie sonst endlich für endliche σ, ζ, so kann sie einen Nenner, der eine Potenz von $a_0(\zeta)$ ist, nicht enthalten, sondern ist eine *ganze* Function. — Denn wäre die Function gebrochen, so könnte man den Zähler nach Potenzen von $z - z_\infty$ ordnen, der von $z - z_\infty$ freie Theil müsste s mindestens im zweiten Grade enthalten, weil die Function in den übrigen über z_∞ liegenden Punkten endlich ist, und die Function müsste im Punkte ∞, z_∞ unendlich gross in der *dritten* Ordnung werden. Es ist nun der Grad dieser ganzen Function zu bestimmen. In der Untersuchung über das Anwachsen dieser Function mit ζ macht nur der Theil $G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)$ einige Mühe.

Wird in E die νte Verticalreihe durch $w(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_1)$, $w(\mathfrak{s}_2, \mathfrak{z}_2)$, ... $w(\mathfrak{s}_6, \mathfrak{z}_6)$ ersetzt, so soll das Resultat durch $E_\nu(w(\mathfrak{s}, \mathfrak{z}))$ wiedergegeben werden. Alsdann kann für $G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)$ geschrieben werden

$$\frac{1}{E}\Big\{E_1\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta-\mathfrak{z}}\Big)+\zeta E_2\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta-\mathfrak{z}}\Big)+\zeta^2 E_3\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta-\mathfrak{z}}\Big)$$
$$+\sigma E_4\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta-\mathfrak{z}}\Big)+\sigma\zeta E_5\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta-\mathfrak{z}}\Big)+\sigma^2 E_6\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta-\mathfrak{z}}\Big)\Big\}.$$

Nun setzen wir, nur Glieder berücksichtigend, die für unendlich grosse ζ nicht verschwinden, was wir durch $\underline{\underline{\backsim}}$ andeuten,

$$\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta-\mathfrak{z}} \underline{\underline{\backsim}} \frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta}+\mathfrak{z}\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta^2}+\mathfrak{z}^2\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta^3},$$

und somit

$$E_\nu\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta-\mathfrak{z}}\Big) \underline{\underline{\backsim}} E_\nu\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta}\Big)+E_\nu\Big(\mathfrak{z}\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta^2}\Big)+E_\nu\Big(\mathfrak{z}^2\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta^3}\Big).$$

Dann ist

$$E_1\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta}\Big)=\frac{a_0\sigma^2+a_1\sigma+a_2}{\zeta}\cdot E,\quad E_2\Big(\frac{H}{\zeta}\Big)=E_3\Big(\frac{H}{\zeta}\Big)=E_5\Big(\frac{H}{\zeta}\Big)=0,$$
$$E_4\Big(\frac{H}{\zeta}\Big)=\frac{a_0\sigma+a_1}{\zeta}\cdot E,\quad E_6\Big(\frac{H}{\zeta}\Big)=\frac{a_0}{\zeta}\cdot E,$$

und also ist der Beitrag, den diese Glieder zu $G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)$ liefern:

$$(3a_0\sigma^2+2a_1\sigma+a_2):\zeta = F_1(\sigma, \zeta):\zeta.$$

Weiter ist

$$E_1\Big(\frac{\mathfrak{z}H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})}{\zeta^2}\Big)=\frac{a_0}{\zeta^2}E_1(\mathfrak{s}^2\mathfrak{z}),\quad E_2\Big(\frac{\mathfrak{z}H}{\zeta^2}\Big)=\frac{a_0\sigma^2+a_1\sigma+a_2}{\zeta^2}\cdot E+E_2(\mathfrak{s}^2\mathfrak{z})\frac{a_0}{\zeta^2},$$
$$E_3\Big(\frac{\mathfrak{z}H}{\zeta^2}\Big)=E_3(\mathfrak{z}\mathfrak{s}^2)\cdot\frac{a_0}{\zeta^2},\quad E_4\Big(\frac{\mathfrak{z}H}{\zeta^2}\Big)=E_4(\mathfrak{s}^2\mathfrak{z})\frac{a_0}{\zeta^2},$$
$$E_5\Big(\frac{\mathfrak{z}H}{\zeta^2}\Big)=\frac{a_0\sigma+a_1}{\zeta^2}\cdot E+E_5(\mathfrak{s}^2\mathfrak{z})\frac{a_0}{\zeta^2},\quad E_6\Big(\frac{\mathfrak{z}H}{\zeta^2}\Big)=E_6(\mathfrak{s}^2\mathfrak{z})\frac{a_0}{\zeta^2}.$$

Der Beitrag den diese Glieder zu $G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)$ liefern, wenn wir nur das berücksichtigen, was mit ζ unendlich gross zweiter Ordnung wird, ist

$$\underline{\underline{\backsim}} \frac{a_0\sigma^2+a_1\sigma+a_2}{\zeta}+\frac{a_0\sigma^2+a_1\sigma}{\zeta}=\frac{2a_0\sigma^2+2a_1\sigma+a_2}{\zeta}=\frac{F_1(\sigma,\zeta)-a_0\sigma^2}{\zeta}.$$

Suchen wir den Beitrag den $E_\nu\Big(\frac{H(\sigma,\zeta;\mathfrak{s})\mathfrak{z}^2}{\zeta^3}\Big)$ zu $G(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)$ liefert, und zwar nur den Theil, der für wachsende ζ unendlich gross zweiter Ordnung wird, so dass aus den E_ν nur das berücksichtigt zu werden braucht, was

für wachsende ζ endlich bleibt, so ist

$$E_1\left(\frac{\mathfrak{z}^2 H}{\zeta^3}\right) \cong E_2\left(\frac{\mathfrak{z}^2 H}{\zeta^3}\right) \cong E_4\left(\frac{\mathfrak{z}^2 H}{\zeta^3}\right) \cong E_5\left(\frac{\mathfrak{z}^2 H}{\zeta^3}\right) \cong E_6\left(\frac{\mathfrak{z}^2 H}{\zeta^3}\right) \cong 0,$$

$$E_3\left(\frac{\mathfrak{z}^2 H}{\zeta^3}\right) \cong \frac{a_0\sigma^2+a_1\sigma+a_2}{\zeta^3}.$$

Der gesuchte Beitrag ist also $(a_0\sigma^2+a_1\sigma+a_2):\zeta$, und so finden wir als den Theil von G, der für wachsende ζ mindestens in der zweiten Ordnung unendlich gross wird,

$$(6a_0\sigma^2+5a_1\sigma+3a_2):\zeta,$$

und die Function $L(\sigma, \zeta)$ wird für wachsende ζ ebenfalls unendlich gross zweiter Ordnung, und zwar wie

$$(3a_0\sigma+4a_1\sigma+3a_2):\zeta \cong F_{12}(\sigma, \zeta).$$

Es ist mithin $L(\sigma, \zeta)$ eine ganze Function zweiten Grades von σ, ζ und kann in die Form

$$F_{12}(\sigma, \zeta)+4c_1\varphi_1(\sigma, \zeta)+4c_2\varphi_2(\sigma, \zeta)+4c_3\varphi_3(\sigma, \zeta)$$

gebracht werden, worin die c_1, c_2, c_3 von σ, ζ unabhängig sind. Beachten wir noch, dass $\chi'(\sigma, \zeta; \sigma, \zeta)-H'(\sigma, \zeta; \sigma) = \mathfrak{a}_0\sigma^2$ ist, so erhalten wir das, von dem früher im 94. Bande gegebenen nur wenig verschiedene Resultat

$$(10.)\quad \left\{\begin{aligned} &\partial \lg\vartheta((u(\sigma, \zeta)-\Sigma u(s_\mu, z_\mu))):\partial\zeta \equiv \Sigma t(\sigma, \zeta; s_\mu, z_\mu) \\ &-\tfrac{1}{2}T_0(\sigma, \zeta)-\lg' F_1(\sigma, \zeta)-\frac{\frac{1}{2}F_{12}(\sigma, \zeta)-\mathfrak{a}_0\sigma^2}{F_1(\sigma, \zeta)}-\sum_{(k)}\frac{\partial u_\nu(\sigma, \zeta)}{\partial k}\,\frac{\chi(\sigma, \zeta; k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)} \\ &-2c_1\frac{\partial u_1(\sigma, \zeta)}{\partial\zeta}-2c_2\frac{\partial u_2(\sigma, \zeta)}{\partial\zeta}-2c_3\frac{\partial u_3(\sigma, \zeta)}{\partial\zeta}.\end{aligned}\right.$$

Da die Coefficienten der c Periodicitätsmoduln von t sind, so darf das System halber Periodicitätsmoduln, welches noch unbestimmt blieb, in diese Grössen mit eingerechnet werden. Die c werden nun durch bestimmte Integrale genau so ausgedrückt, wie es im 94. Bande dieses Journals auf Seite 248 geschehen ist, was nicht wiederholt zu werden braucht.

Jena, im April 1887.

Ueber den Zahlbegriff*).

(Von *L. Kronecker.*)

Auf dem freien Plane philosophischer Vorarbeit, aus welchem man in die eingehegten Gebiete der verschiedenen Wissenschaften gelangt, sind auch die Begriffe der Zahl, des Raumes und der Zeit zu entwickeln, von welchen in der Mathematik Gebrauch gemacht wird. Und es erscheint zweckmässig, die Entwickelung dort so weit zu führen, dass die Begriffe schon mit ihren Grundeigenschaften ausgestattet sind, wenn die specialwissenschaftliche Behandlung beginnt.

So soll dies hier in Beziehung auf den Zahlbegriff geschehen, den einfachsten jener drei Begriffe, dessen dominirende Stellung *Jacobi* in einem seiner Briefe an *Alexander v. Humboldt* sehr schön hervorgehoben hat**).

„Ein Alter" — so beginnt einer dieser Briefe — „vergleicht die Mathematiker mit den Lotophagen. Wer einmal, sagt er, die Süssigkeit der mathematischen Ideen gekostet, kann nicht mehr davon ablassen. Schreiben Sie also meinen vorigen Brief***) der Raserei zu, in welche jene Lotosfresser versinken, wenn sie den Cultus jener Ideen vernachlässigt oder

*) Dieser Aufsatz ist durch theilweise Umarbeitung und Erweiterung desjenigen entstanden, welcher in den Herrn *Eduard Zeller* zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmeten philosophischen Aufsätzen unter No. VIII abgedruckt ist.

**) Die Briefe haben sich in *G. Lejeune Dirichlets* Nachlass vorgefunden.

***) Dieser „vorige Brief" trägt als Datum „Berlin d. 26. Dez. 1846" und füllt mit der *Jacobi*schen kleinen und engen Schrift drei Octavseiten vollständig aus. Auf der ersten Seite schreibt *Jacobi:* „Also das möchten Sie wissen, welche Gedankenentwickelung vorhergehen musste, damit 1846 *Leverrier* den transuranischen Planeten ausrechnen konnte?" Und auf der dritten Seite: „Unter diesen Umständen ist es also wirklich etwas Ausserordentliches, wenn *Leverrier* bei seiner Rechenfertigkeit die mathematische Umsicht hat, die erforderlich ist, um auf geschickte Art sich an ein weitläufiges gänzlich neues Problem zu wagen. Aber die Arbeit des Menschengeistes kann man nach der dazu nöthigen homöopathischen Dosis nicht ermessen."

sie nur ihrer zufälligen Anwendungen wegen geschätzt glauben. Und sagt nicht Aehnliches schon *Schiller* in den Xenien in seinem kleinen Gedicht

Archimedes und der Jüngling.

Zu Archimedes kam ein wissbegieriger Jüngling,
Weihe mich, sprach er zu ihm, ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
Hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.
Göttlich nennst Du die Kunst, sie ist's, versetzte der Weise,
Aber sie war es, bevor noch sie den Kosmos erforscht,
Ehe sie herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
Hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.
Was Du im Kosmos erblickst, ist nur der Göttlichen Abglanz,
In der Olympier Schaar thronet die ewige Zahl."

In dieser geistvollen Parodie des *Schiller*schen Gedichts „Archimedes und der Schüler" bezeichnet *Jacobi* die Stellung des Zahlbegriffs in der gesammten Mathematik echt poetisch aber auch genau zutreffend und ganz ähnlich wie *Gauss* in den Worten: „Die Mathematik sei die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik. Diese lasse sich dann öfter herab, der Astronomie und andern Naturwissenschaften einen Dienst zu erweisen, doch gebühre ihr unter allen Verhältnissen der erste Rang" *).

In der That steht die Arithmetik in ähnlicher Beziehung zu den anderen beiden mathematischen Disciplinen, der Geometrie und Mechanik, wie die gesammte Mathematik zur Astronomie und den andern Naturwissenschaften; auch die Arithmetik erweist der Geometrie und Mechanik mannigfache Dienste und empfängt dagegen von ihren Schwester-Disciplinen eine Fülle von Anregungen. Dabei ist aber das Wort „Arithmetik" nicht in dem üblichen beschränkten Sinne zu verstehen, sondern es sind alle mathematischen Disciplinen mit Ausnahme der Geometrie und Mechanik, also namentlich die Algebra und Analysis, mit darunter zu begreifen. Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den gesammten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen zu „arithmetisiren", d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die

*) Vgl. „*Gauss* zum Gedächtniss" von *W. Sartorius v. Waltershausen*, Leipzig 1856, S. 79. In derselben Schrift wird auf S. 97: „*Ὁ θεὸς ἀριθμητίζει*" als ein Ausspruch von *Gauss* angeführt, welcher als solcher durch einen in *G. Lejeune Dirichlets* Nachlass vorgefundenen, von *Gauss*' Arzte, *Baum*, an *Humboldt* gerichteten Briefe beglaubigt ist.

Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffs*) wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind. Der principielle Unterschied zwischen der Geometrie und Mechanik einerseits und zwischen den übrigen hier unter der Bezeichnung „Arithmetik" zusammengefassten mathematischen Disciplinen andererseits besteht nach *Gauss* darin, dass der Gegenstand der letzteren, die Zahl, *bloss* unseres Geistes Product ist, während der Raum ebenso wie die Zeit auch *ausser* unserem Geiste eine *Realität* hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können**).

§ 1.

Definition des Zahlbegriffs.

Den naturgemässen Ausgangspunkt für die Entwickelung des Zahlbegriffs finde ich in den *Ordnungszahlen*. In diesen besitzen wir einen Vorrath gewisser, nach einer festen Reihenfolge geordneter Bezeichnungen, welche wir einer Schaar verschiedener und zugleich für uns unterscheidbarer Objecte beilegen können***). *Die Gesammtheit der hierbei verwendeten Bezeichnungen* fassen wir in dem Begriffe der „Anzahl der Objecte", aus denen die Schaar besteht, zusammen, und wir knüpfen den Ausdruck für diesen Begriff unzweideutig an die *letzte* der verwendeten Bezeichnungen an, da deren Aufeinanderfolge fest bestimmt ist. So kann z. B. in der Schaar der Buchstaben (a, b, c, d, e) dem Buchstaben a die Bezeichnung als „erster", dem Buchstaben b die Bezeichnung als „zweiter" u. s. f. und endlich dem Buchstaben e die Bezeichnung als „fünfter" beigelegt werden. Die Ge-

*) Ich meine hier namentlich die Hinzunahme der irrationalen sowie der continuirlichen Grössen.

**) Die *Gauss*schen Worte (in einem Briefe an *Bessel* im Jahre 1829) lauten: „Nach meiner innigsten Ueberzeugung hat die Raumlehre zu unserm Wissen der selbstverständlichen Wahrheiten eine ganz andere Stellung, als die reine Grössenlehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus *diejenige* vollständige Ueberzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, welche der *letztern* eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, dass, wenn die Zahl *bloss* unsers Geistes Product ist, der Raum auch *ausser* unserm Geiste eine *Realität* hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können." Vgl. Herrn *Ernst Scherings* Festrede, vorgetragen in der öffentlichen Sitzung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 30. April 1877, S. 9.

***) Die Objecte können in gewissem Sinne einander gleich und nur räumlich, zeitlich oder gedanklich unterscheidbar sein, wie z. B. zwei gleiche Längen oder zwei gleiche Zeittheile.

sammtheit der dabei verwendeten Ordnungszahlen oder die „Anzahl" der Buchstaben *a, b, c, d, e* kann demgemäss in Anknüpfung an die letzte der verwendeten Ordnungszahlen durch die Zahl „Fünf" bezeichnet werden *).

Man kann aus den Ordnungszahlen selbst eine Schaar von Objecten bilden. Für diejenige Schaar, welche aus einer bestimmten (n^{ten}) Ordnungszahl und aus allen vorhergehenden Ordnungszahlen besteht, wird die „Anzahl" gemäss der oben gegebenen Definition durch die der n^{ten} Ordnungszahl entsprechende „Cardinalzahl" n ausgedrückt, und es sind diese Cardinalzahlen, welche auch schlechthin als „Zahlen" bezeichnet werden. Eine Zahl m heisst „kleiner" als eine andere Zahl n, wenn die zu m gehörige Ordnungszahl der zu n gehörigen vorangeht. Die sogenannte natürliche Reihenfolge der Zahlen ist nichts Anderes als die Reihenfolge der entsprechenden Ordnungszahlen.

*) Der Vorrath von Bezeichnungen, den wir in den Ordnungszahlen besitzen, ist deshalb immer ausreichend, weil es nicht sowohl ein wirklicher als vielmehr ein ideeller Vorrath ist. In den Gesetzen der *Bildung* unserer Wort- und Zifferbezeichnung der Zahlen besitzen wir recht eigentlich das „Vermögen", jeden Anspruch zu befriedigen. Freilich nur in *der* Weise, dass in dem Ausdrucke einer Zahl gewisse Bezeichnungen beliebig vielfach wiederholt werden. Sind aber Wiederholungen gestattet, so genügt schon ein einziges Zeichen, um jede Zahl auszudrücken, nämlich so, dass das eine Zeichen so oft wiederholt wird, als die Zahl angiebt. Indessen wäre eine solche primitive Darstellungsweise mittels eines einzigen Zeichens ganz unübersichtlich, und die andere ebenso primitive Darstellungsweise durch lauter verschiedene Zeichen wäre offenbar ganz unthunlich. Man ist deshalb bei den Wortbezeichnungen der Zahlen wohl darauf ausgegangen, mit Hülfe möglichst wenig specifisch verschiedener Stammworte möglichst viele Zahlen auszudrücken, und dies ist dadurch gelungen, dass man das Schema der Bezeichnungen wie eine Tabelle mit zweifachem Eingang einrichtete. So kann man durch Einzeichnung von Punkten in die 45 Felder einer durch fünf Colonnen und neun Zeilen gebildeten Tabelle alle Zahlen bis 99 999 genau so darstellen, wie es durch die griechische Wortbezeichnung geschieht. Werden dabei in die Colonne I die Einer, in die Colonne II die Zehner, in die Colonne III die Hunderter, in die Colonne IV die Tausender und in die Colonne V die Zehntausender eingezeichnet, so wird z. B. die Zahl 32 456 durch fünf Punkte dargestellt, welche beziehungsweise

in den Zeilen 3, 2, 4, 5, 6
und in den Colonnen V, IV, III, II, I

stehen. Die griechische Wortbezeichnung *τρισμύριοι δισχίλιοι τετρακόσιοι πεντήκοντα ἕξ* ergiebt sich aus einer solchen Tabelle unmittelbar, indem man aus der Zeilenbezeichnung den Anfang und aus der Colonnenbezeichnung die Endung jedes einzelnen der fünf Zahlwörter entnimmt. Demnach ist für den ersten Punkt, welcher in der Zeile 3 (*τρεῖς*) und in der Colonne V (*μύριοι*) steht, das Zahlwort *τρισμύριοι* zu bilden, für den zweiten Punkt, welcher in der Zeile 2 (*δύο*) und in der Colonne IV (*χίλιοι*) steht, das Zahlwort *δισχίλιοι* u. s. f., und für den fünften Punkt, welcher in der Zeile 6 (*ἕξ*) und in der Colonne I steht, bleibt das Zahlwort *ἕξ* selbst ohne Zusatz einer Endung. Die griechische Zahlwörterbildung ermöglicht es also, mit Hülfe von nur 13 verschiedenen Bezeichnungen, nämlich neun Anfangs- und vier Endungsbezeichnungen, alle Zahlen bis 99 999 deutlich unterscheidbar auszudrücken.

§ 2.

Die Unabhängigkeit der Zahl von der beim Zählen befolgten Anordnung.

Wenn man eine Schaar von Objecten „zählt", d. h. wenn man die Ordnungszahlen, ihrer Reihenfolge nach, den einzelnen Objecten als Bezeichnungen beilegt, so giebt man damit den Objecten selbst eine bestimmte Anordnung. Wenn nun diese Anordnung der Objecte beibehalten, aber eine neue Reihenfolge der als Bezeichnungen verwendeten Ordnungszahlen (durch irgend eine Permutation derselben) festgesetzt und alsdann dem ersten Objecte die in der neuen Reihenfolge erste Ordnungszahl, dem zweiten Objecte die zweite Ordnungszahl, und so der Reihe nach jedem folgenden Objecte die folgende Ordnungszahl als Bezeichnung beigelegt wird, so erhalten damit die Objecte wiederum eine durch die ihnen zugetheilten Ordnungszahlen bestimmte, von der früheren verschiedene Anordnung, und sie werden also in einer anderen Anordnung „gezählt" *). Dabei bleibt aber die „Gesammtheit" der als Bezeichnungen verwendeten Ordnungszahlen, welche nach der obigen Definition den Begriff der „Anzahl der Objecte" ergiebt, ungeändert, und diese Anzahl, d. h. das *Resultat* des Zählens, ist demnach von der beim Zählen befolgten oder durch das Zählen gegebenen Anordnung unabhängig. Die „Anzahl" der Objecte einer Schaar ist also eine Eigenschaft der Schaar als solcher, d. h. der unabhängig von irgend einer bestimmten Anordnung gedachten Gesammtheit der Objecte.

Fasst man irgend welche Elemente, die mit den Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ bezeichnet werden mögen, gedanklich zu einem System zusammen, aber so, dass auch die Reihenfolge der Elemente dabei fixirt wird, so sind z. B. die beiden Systeme (a, b, c) und (c, a, b) von einander verschieden. Und in der That sind auch, wenn man für a, b, c irgend welche von einander verschiedene Zahlen nimmt und dann einen Punkt im Raume, dessen drei rechtwinklige Coordinaten durch die Werthe $x = a$, $y = b$, $z = c$ bestimmt sind, durch das System (a, b, c) bezeichnet, die zwei Punkte (a, b, c) und (c, a, b) von einander verschieden. Wenn nun aber irgend zwei Systeme $(a, b, c, d, \ldots)$, $(a', b', c', d', \ldots)$ *„äquivalent"* genannt werden, sobald es möglich ist, das eine in das andere dadurch zu transformiren, dass man der

*) Für die Darlegung der Möglichkeit, Objecte in verschiedenen Anordnungen zu zählen, ist hier absichtlich nicht das Permutiren der Objecte selbst, sondern nur das der Zahlbezeichnungen benutzt worden. Es bedurfte auf diese Weise keiner weiteren Voraussetzung über die Objecte, als jener im § 1, wonach sie „unterscheidbar" sind.

Reihe nach jedes Element des ersten Systems durch je eines des zweiten Systems ersetzt, so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz zweier Systeme in der Gleichheit der Anzahl ihrer Elemente, und die Anzahl der Elemente eines Systems $(a, b, c, d, \ldots)$ charakterisirt sich hiernach als die einzige „*Invariante*“ aller untereinander äquivalenten Systeme *).

§ 3.

Die Addition der Zahlen.

Man kann die Zahlen selbst als Objecte des Zählens nehmen. Man kann also z. B. von der Zahl n_1+1 an um n_2 weiter zählen, d. h. genau so viele von den auf die Zahl n_1 zunächst folgenden Zahlen zu einer Schaar zusammenfassen, dass deren Anzahl n_2 beträgt. Dieses „weiter Zählen“ heisst: „*zur Zahl n_1 die Zahl n_2 addiren*“, und diejenige Zahl s, zu welcher man bei jenem weiter Zählen gelangt, heisst das „Resultat der Addition“ oder die „Summe von n_1 und n_2“ und wird durch n_1+n_2 dargestellt. Zu eben demselben Resultat s gelangt man aber auch, wenn man zur Zahl n_2 die Zahl n_1 addirt, d. h. wenn man von der Zahl n_2+1 anfangend um n_1 weiter zählt, und es ist daher: $n_1+n_2 = n_2+n_1$. Ebenso ist allgemein: $n_1+n_2+n_3+\cdots+n_r = n_\alpha+n_\beta+n_\gamma+\cdots+n_\varrho$, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$ die Zahlen $1, 2, 3, \ldots r$ in irgend einer Anordnung bedeuten. Denn, wenn man die ganze Schaar von Systemen zweier Zahlen (h, k) bildet, welche entsteht, indem man nach einander:

$$\begin{array}{lll} h=1 & \text{und} & k=1,\ 2,\ \ldots\ n_1, \\ h=2 & \text{und} & k=1,\ 2,\ \ldots\ n_2, \\ h=3 & \text{und} & k=1,\ 2,\ \ldots\ n_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h=r & \text{und} & k=1,\ 2,\ \ldots\ n_r \end{array}$$

setzt, so ergiebt sich die Zahl: $n_1+n_2+n_3+\cdots+n_r$, als Anzahl der Systeme der Schaar, sobald man sie in der Reihenfolge zählt, in welcher sie hier gebildet worden sind. Ordnet man sie aber dergestalt, dass diejenigen nach

---

*) Hierdurch wird, glaube ich, der Inhalt des Satzes näher präcisirt, mit welchem Herr *Lipschitz* sein Lehrbuch der Analysis beginnt. Dieser Satz lautet: „Wenn man bei der Betrachtung getrennter Dinge von den Merkmalen absieht, durch welche sich die Dinge unterscheiden, so bleibt der Begriff der *Anzahl* der betrachteten Dinge zurück.“

einander folgen, in denen:

$$
\begin{array}{llllll}
h=\alpha & \text{und} & k=1, & 2, & \ldots & n_\alpha, \\
h=\beta & \text{und} & k=1, & 2, & \ldots & n_\beta, \\
h=\gamma & \text{und} & k=1, & 2, & \ldots & n_\gamma, \\
\cdots & & & & & \\
\cdots & & & & & \\
h=\varrho & \text{und} & k=1, & 2, & \ldots & n_\varrho
\end{array}
$$

ist, so ergiebt sich die Zahl $n_\alpha+n_\beta+n_\gamma+\cdots+n_\varrho$, als Anzahl der Systeme der Schaar, und dieselbe Anzahl wird also einerseits durch die Summe: $n_1+n_2+n_3+\cdots+n_r$, andererseits durch die Summe: $n_\alpha+n_\beta+n_\gamma+\cdots+n_\varrho$ dargestellt.

§ 4.

Die Multiplication der Zahlen.

Sind die einzelnen Summanden n_1, n_2, n_3, ... n_r sämmtlich gleich einer und derselben Zahl n, so bezeichnet man die Addition als „Multiplication der Zahl n mit dem Multiplicator r“ und setzt:

$$n_1+n_2+n_3+\cdots+n_r = rn.$$

Das Resultat der so definirten Multiplication bezeichnet man als das Product der Zahlen r und n. Man erhält aber genau dasselbe Resultat, wenn man die Zahl r mit dem Multiplicator n multiplicirt, und es ist überhaupt das Product beliebig vieler Zahlen $n_1 n_2 n_3 \ldots n_r$ unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die Multiplicationen nach einander ausgeführt werden. Denn wenn man sich die sämmtlichen Systeme von r Zahlen $(h_1, h_2, h_3, \ldots h_r)$ gebildet denkt, welche entstehen, indem man

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{für} & h_1 & \text{alle Werthe} & 1, & 2, & 3, & \ldots & n_1, \\
\text{für} & h_2 & \text{alle Werthe} & 1, & 2, & 3, & \ldots & n_2, \\
\text{für} & h_3 & \text{alle Werthe} & 1, & 2, & 3, & \ldots & n_3, \\
\cdots & & & & & & & \\
\cdots & & & & & & & \\
\text{für} & h_r & \text{alle Werthe} & 1, & 2, & 3, & \ldots & n_r
\end{array}
$$

setzt, so können diese Systeme nach der Grösse der Werthe von

$$h_r+h_{r-1}g+h_{r-2}g^2+\cdots+h_1 g^{r-1}$$

geordnet werden, wenn g eine Zahl bedeutet, die grösser als jede der Zahlen n_1, n_2, n_3, ... n_r ist. Die Systeme folgen dann so auf einander, wie sie der Grösse nach auf einander folgen würden, wenn $h_1 h_2 h_3 \ldots h_r$ eine Zahl

mit den *Ziffern* h_1, h_2, h_3, ... h_r in dem Zahlensysteme mit der Grundzahl g darstellte. Das Princip einer solchen Anordnung ist übrigens kein anderes als das lexikographische für den Fall, dass an die Stelle der Zahlen 1, 2, 3, ... der Reihe nach die Buchstaben eines Alphabets treten.

Die verschiedenen Abtheilungen der Systeme $(h_1, h_2, h_3, \ldots h_r)$, welche durch die verschiedenen Werthe von h_1 charakterisirt werden, und deren Anzahl n_1 ist, folgen einander bei der angegebenen Anordnung nach der Grösse der Werthe von h_1; innerhalb jeder Abtheilung folgen die n_2 verschiedenen, durch die Werthe von h_2 charakterisirten Unterabtheilungen wiederum einander nach der Grösse *dieser* Werthe u. s. f. Bezeichnet man die Anzahl derjenigen Systeme, in denen $h_1 = 1$ ist, mit s_1, so ist s_1 auch die Anzahl der Systeme in *jeder* der n_1 Abtheilungen, welche durch die Werthe: $h_1 = 1, 2, 3, \ldots n_1$ charakterisirt werden. Die Gesammtanzahl aller Systeme wird hiernach durch das Product $n_1 s_1$ ausgedrückt. Bezeichnet man nun ferner die Anzahl derjenigen Systeme, in denen $h_1 = 1$ und $h_2 = 1$ ist, mit s_2, so ist s_2 auch die Anzahl der Systeme in jeder der n_2 Unterabtheilungen, welche bei Festhaltung des Werthes $h_1 = 1$ durch die n_2 Werthe: $h_2 = 1, 2, 3, \ldots n_2$ charakterisirt werden. Die mit s_1 bezeichnete Anzahl aller Systeme der Abtheilung, in welcher $h_1 = 1$ ist, wird also durch das Product $n_2 s_2$ ausgedrückt, und die Anzahl aller Systeme überhaupt wird gleich: $n_1 n_2 s_2$. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man das Product: $n_1 n_2 n_3 \ldots n_r$ als Ausdruck für die Anzahl der sämmtlichen Systeme $(h_1, h_2, h_3, \ldots h_r)$.

Bedeuten nun, wie oben, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varrho$ die Zahlen 1, 2, 3, ... r in irgend einer andern Anordnung, und ordnet man die sämmtlichen Systeme $(h_1, h_2, h_3, \ldots h_r)$ so, wie sie der Grösse nach auf einander folgen würden, wenn $h_\alpha h_\beta h_\gamma \ldots h_\varrho$ eine Zahl mit den Ziffern h_α, h_β, h_γ, ... h_ϱ in dem Zahlensysteme mit der Grundzahl g darstellte, so erhält man bei dem auseinandergesetzten Verfahren das Product: $n_\alpha n_\beta n_\gamma \ldots n_\varrho$ als Ausdruck für die Anzahl der sämmtlichen Systeme $(h_1, h_2, h_3, \ldots h_r)$, und es muss also in der That:

$$n_1 n_2 n_3 \ldots n_r = n_\alpha n_\beta n_\gamma \ldots n_\varrho$$

sein. Das Product beliebig vieler Zahlen ist demnach unabhängig von der Reihenfolge der Factoren, d. h. von der Reihenfolge, in welcher die Multiplicationen nach einander ausgeführt werden.

§ 5.

Die Buchstabenrechnung.

Die Gesetze der Addition und der Multiplication der Zahlen sind hiermit aus den Definitionen vollständig entwickelt. Dieselben Gesetze mussten für die sogenannte Buchstabenrechnung als maassgebend angenommen werden, sobald man anfing, die Buchstaben zur Bezeichnung von Zahlen zu verwenden, deren Bestimmung vorbehalten bleiben kann oder soll. Aber mit der *principiellen* Einführung der „Unbestimmten" (indeterminatae), welche von *Gauss* herrührt, hat sich die specielle Theorie der ganzen Zahlen zu der allgemeinen arithmetischen Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen von Unbestimmten erweitert. Diese allgemeine Theorie gestattet alle der eigentlichen Arithmetik fremden Begriffe, den der negativen, der gebrochenen, der reellen und der imaginären algebraischen Zahlen, auszuscheiden.

I. Der Begriff der *negativen* Zahlen kann vermieden werden, indem in den Formeln der Factor -1 durch eine Unbestimmte x und das Gleichheitszeichen durch das *Gauss*sche Congruenzzeichen *modulo* $(x+1)$ ersetzt wird. So wird die Gleichung:

$$7-9 = 3-5$$

in die Congruenz:

$$7+9x \equiv 3+5x \quad (\text{mod. } x+1)$$

transformirt; sie gewinnt dadurch auch an Inhalt, da die Congruenz für jede positive ganze Zahl x eine Bedeutung hat, nämlich die, dass $7+9x$ bei der Division durch $x+1$ denselben Rest lässt wie $3+5x$, und andererseits geht diese Congruenz unmittelbar in die Gleichung über, sobald man x nicht mehr als Unbestimmte, sondern als eine durch die Gleichung $x+1=0$ definirte „Grösse" auffasst und also die „negative Einheit" einführt. Dass übrigens die Bedeutung der Formel: $7-9=3-5$ selbst einer näheren Darlegung bedarf, und dass dabei „eigentlich ein neuer Gebrauch vom Gleichheitszeichen" gemacht wird, findet man in dem Lehrbuch des Herrn Dr. *Hermann Schubert* klar auseinandergesetzt *).

II. Der Begriff der *gebrochenen* Zahlen ist zu vermeiden, indem

*) System der Arithmetik und Algebra, als Leitfaden für den Unterricht in höheren Schulen. Von Dr. *Hermann Schubert,* Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Potsdam 1885. Verlag von Aug. Stein. S. 26. Von der im § 5 eben dieses Werkes enthaltenen Entwickelung des „Begriffs der Zahl" ist Manches bei den obigen Auseinandersetzungen benutzt worden.

man in den Formeln den Factor $\frac{1}{m}$ durch eine Unbestimmte x_m und das Gleichheitszeichen durch das *Gauss*sche Congruenzzeichen *modulo* $(mx_m - 1)$ ersetzt. Die drei Bruchrechnungsregeln, nämlich die der Addition:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an+bm}{mn},$$

die der Multiplication:

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn},$$

und die der Division:

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm},$$

werden alsdann vollständig durch die drei entsprechenden Congruenzen:

$$(1.)\quad ax_m + bx_n \equiv (an+bm)x_{mn} \quad (\text{modd. } mx_m - 1,\ nx_n - 1,\ mnx_{mn} - 1),$$

$$(2.)\quad ax_m \cdot bx_n \equiv abx_{mn} \quad (\text{modd. } mx_m - 1,\ nx_n - 1,\ mnx_{mn} - 1),$$

$$(3.)\quad ax_m \cdot x_{bx_n} \equiv anx_{bm} \quad (\text{modd. } mx_m - 1,\ nx_n - 1,\ bmx_{bm} - 1,\ bx_n x_{bx_n} - 1)$$

begründet. Diese drei Congruenzen selbst resultiren aber aus den drei folgenden Identitäten:

$$(\text{I.})\quad \begin{cases} ax_m + bx_n = (an+bm)x_{mn} + anx_{mn}(mx_m - 1) + bmx_{mn}(nx_n - 1) \\ \qquad\qquad - (ax_m + bx_n)(mnx_{mn} - 1), \end{cases}$$

$$(\text{II.})\quad \begin{cases} ax_m \cdot bx_n = abx_{mn} + abnx_n x_{mn}(mx_m - 1) + abx_{mn}(nx_n - 1) \\ \qquad\qquad - abx_m x_n(mnx_{mn} - 1), \end{cases}$$

$$(\text{III.})\quad \begin{cases} ax_m \cdot x_{bx_n} = anx_{bm} + anx_{bm}(mx_m - 1) - abmx_m x_{bm} x_{bx_n}(nx_n - 1) \\ \qquad\qquad - ax_m x_{bx_n}(bmx_{bm} - 1) + amnx_m x_{bm}(bx_n x_{bx_n} - 1). \end{cases}$$

Das „Grösser" und „Kleiner" der Brüche kann als durch die Additionsregel gegeben betrachtet werden, indem der durch Addition zweier Brüche entstandene Bruch für grösser als jeder der beiden Summanden erklärt wird. Auf diese Weise wird die Aufeinanderfolge der rationalen Brüche nicht bloss definirt, sondern auch begründet *).

---

*) In der Vorrede zu seinem Werke: „Introduction à la théorie des fonctions d'une variable" sagt Herr *Jules Tannery* S. VIII: „On peut constituer entièrement l'Analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers: il est inutile de faire appel à aucun autre postulat, à aucune autre donnée de l'expérience; .... une fraction, du point de vue que j'indique, ne peut pas être regardée comme la réunion de parties égales de l'unité: ces mots „parties de l'unité" n'ont plus de sens: une fraction est un ensemble de deux nombres entiers, rangés dans un ordre déterminé: sur cette nouvelle espèce de nombres, il y a lieu de reprendre les définitions de l'égalité, de l'inégalité et des opérations arithmétiques". Wie dies letztere in der That — wenn auch in anderer Reihenfolge — geschehen kann, ist oben dargelegt worden.

III. Dass die Einführung und Verwendung der *algebraischen* Zahlen überall da entbehrlich ist, wo nicht die Isolirung der unter einander conjugirten erfordert wird, habe ich in einem früheren Aufsatze gezeigt *); dass diese Isolirung selbst aber auch ohne Einführung neuer Begriffe geschehen kann und nur dann, wenn sie so geschieht, das Wesen der Sache klar hervortreten lässt, soll hier in derselben Weise, wie ich es seit zehn Jahren in meinen Universitätsvorlesungen zu thun pflege, dargelegt und damit zugleich jene „genauere Analyse des Begriffs der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen" gegeben werden, welche ich am Schlusse des ersten Theiles der „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" angekündigt habe **).

Ist $f(x)$ eine ganze ganzzahlige Function von x, welche mit ihrer Ableitung $f'(x)$ keinen Theiler gemein hat, so giebt es ganze ganzzahlige Functionen $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, für welche die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}.) \qquad \varphi(x)f(x)+\varphi_1(x)f'(x) = D$$

besteht. Hier bedeutet D den absoluten Werth der Discriminante von $f(x)$, also eine positive ganze Zahl. Es sei nun:

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

und a_g der absolut grösste der n Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$. Bezeichnet man alsdann den rationalen Bruch $\frac{|a_g|+|a_n|}{|a_n|}$ mit $\mathfrak{r}$, so ist:

$$\left|\frac{f(x)}{a_n}-x^n\right| < (\mathfrak{r}-1)\frac{|x|^n-1}{|x|-1},$$

also für jeden nicht zwischen $-\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}$ liegenden Werth von x:

$$|f(x)-a_nx^n| < |a_nx^n| \quad \text{und folglich:} \quad \operatorname{sgn.}f(x) = \operatorname{sgn.}a_nx^n.$$

Demnach kann $f(x)$ nur innerhalb des Intervalles $(-\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$ sein Vorzeichen ändern.

Setzt man zur Abkürzung:

$$f(x+\sigma)-f(x) = \sigma f_1(x, \sigma), \quad (f_1(x, \sigma)-f'(x))\varphi_1(x) = \sigma\psi(x, \sigma),$$

so sind $f_1(x, \sigma)$ und $\psi(x, \sigma)$ ganze ganzzahlige Functionen von x und σ,

---

*) „Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik" Bd. 100, S. 490 dieses Journals. Man vergleiche namentlich den Schluss dieses Aufsatzes a. a. O. S. 510. Dem dort Gesagten ist hinzuzufügen, dass in gewissen Gebieten der Algebra die Verwendung der Moduln und Modulsysteme an Stelle der algebraischen Zahlen nicht nur zulässig sondern sogar nothwendig ist. So kann die Frage, ob eine irreductible ganzzahlige Function $F(x)$ unter Adjunction einer Wurzel einer irreductibeln ganzzahligen Gleichung $\Phi(y) = 0$ reductibel wird, nur in *der* Form entschieden werden, ob $F(x)$ sich *modulo* $\Phi(y)$ als Product ganzer Functionen von x und y mit rationalen Coefficienten darstellen lässt.

**) Bd. 92, S. 44 dieses Journals.

und wenn man unter $\bar{f}_1(x, \sigma)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\varphi}_1(x)$, $\bar{\psi}(x, \sigma)$ beziehungsweise diejenigen Functionen versteht, welche aus $f_1(x, \sigma)$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi(x, \sigma)$ dadurch hervorgehen, dass man darin die Coefficienten durch ihre absoluten Werthe ersetzt, so bestehen offenbar die Ungleichheiten:

$|f_1(x, \sigma)| < \bar{f}_1(\mathfrak{r}, 1)$, $|\varphi(x)| < \bar{\varphi}(\mathfrak{r})$, $|\varphi_1(x)| < \bar{\varphi}_1(\mathfrak{r})$, $|\psi(x, \sigma)| < \bar{\psi}(\mathfrak{r}, 1)$,

sobald der Werth von x zwischen $-\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}$ und σ zwischen -1 und 1 liegt. Bedeutet nun s eine ganze Zahl, welche den grössten der vier rationalen Werthe:

$$\frac{\bar{f}_1(\mathfrak{r}, 1)}{D}, \quad \frac{\bar{\varphi}(\mathfrak{r})}{D}, \quad \frac{\bar{\varphi}_1(\mathfrak{r})}{D}, \quad \frac{\bar{\psi}(\mathfrak{r}, 1)}{D}$$

mindestens um eine Einheit übersteigt, und setzt man dann:

$$\varphi(x) = (s-1)D\theta(x), \quad \varphi_1(x) = (s-1)D\theta_1(x), \quad \psi(x, \sigma) = (s-1)DH(x, \sigma),$$

so geht die Gleichung ($\mathfrak{A}$.) in folgende über:

$$(\mathfrak{B}.) \qquad \theta(x)f(x) + \theta_1(x) \cdot \frac{f(x+\sigma)-f(x)}{\sigma} = \sigma H(x, \sigma) + \frac{1}{s-1},$$

und die Werthe der Functionen $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $H(x, \sigma)$ sind für die Werthe von x und σ, welche durch die Ungleichheiten:

$$-\mathfrak{r} < x < \mathfrak{r}, \quad -1 < \sigma < 1$$

beschränkt sind, absolut kleiner als Eins. Ist σ absolut kleiner als $\frac{1}{s}$, so folgt aus der Gleichung ($\mathfrak{B}$.) die Ungleichheit:

$$|f(x)| + \left|\frac{f(x+\sigma)-f(x)}{\sigma}\right| > \frac{1}{s(s-1)},$$

und es besteht daher für je zwei in dem Intervall $(-\mathfrak{r}, \mathfrak{r})$ liegende Werthe x', x'', deren Differenz, absolut genommen, kleiner als $\frac{1}{s}$ ist, die Ungleichheit:

$$(\mathfrak{C}.) \qquad |f(x')| + \left|\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}\right| > \frac{1}{s(s-1)}.$$

Es soll nunmehr gezeigt werden, dass die Function $f(x)$, während x in einem Intervalle von der Grösse $\frac{1}{s}$ bleibt, entweder gar nicht oder nur *ein* Mal ihr Zeichen wechselt, d. h. dass, wenn:

$$x' < x'' < x''' \quad \text{und} \quad x'''-x' \leqq \frac{1}{s}$$

ist, nicht:

$$\text{sgn.}f(x') = -\text{sgn.}f(x'') = \text{sgn.}f(x''')$$

sein kann.

Hat der Werth von $f(x)$ am Anfange eines Intervalls, welches nicht grösser als $\frac{1}{s}$ ist und mit (J) bezeichnet werden möge, das entgegenge-

setzte Vorzeichen desjenigen am Ende des Intervalls, so muss dasselbe auch wenigstens für eines der Theilintervalle der Fall sein, in welche das Intervall (J) getheilt werden kann. Es sei nun r eine beliebige ganze Zahl, und man denke sich das Intervall (J) in rD gleiche Theile getheilt. Alsdann sei (J') ein solches dieser Theilintervalle, in welchem Anfangs- und Endwerth von $f(x)$ entgegengesetztes Zeichen hat. Endlich seien x', x'' irgend zwei in dem Intervalle (J') liegende Werthe von x, wofür:

$$x' < x'', \quad \mathrm{sgn.} f(x') = -\mathrm{sgn.} f(x'')$$

ist. Da nun:

$$f(x'')-f(x') = (x''-x')f_1(x', x''-x')$$

und also:

$$(\mathfrak{D}.) \qquad |f(x'')-f(x')| < (x''-x')\bar{f}_1(\mathfrak{r}, 1) \leqq (x''-x')(s-1)D$$

ist, so folgt mit Berücksichtigung der Ungleichheit: $x''-x' \leqq \frac{1}{rsD}$, dass:

$$|f(x'')-f(x')| < \frac{1}{r},$$

und also, da $f(x')$ und $f(x'')$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, auch:

$$(\mathfrak{E}.) \qquad |f(x')| < \frac{1}{r}, \quad |f(x'')| < \frac{1}{r}$$

sein muss. *In jedem Intervalle von der Grösse* $\frac{1}{s}$, *an dessen Anfangs- und Endpunkt* $f(x)$ *entgegengesetztes Vorzeichen hat, kann also, wenn man eine ganze Zahl* r *beliebig wählt, mindestens ein Intervall von der Grösse* $\frac{1}{rsD}$ *gefunden werden, an dessen Anfangs- und Endpunkt ebenfalls* $f(x)$ *entgegengesetztes Vorzeichen hat, und in welchem alle Werthe von* $f(x)$ *absolut kleiner als* $\frac{1}{r}$ *sind.*

Wenn $f(x)$ am Anfange eines Intervalles, welches nicht grösser als $\frac{1}{s}$ ist, *dasselbe* Vorzeichen hat wie an dessen Endpunkt, so behält $f(x)$ eben dieses Vorzeichen innerhalb des ganzen Intervalles.

Bezeichnet man nämlich das Intervall mit (J^0), seinen Anfangspunkt mit x_0, seinen Endpunkt mit x_4, und nimmt man an, dass für einen zwischen x_0 und x_4 liegenden Werth x_2 die Function $f(x)$ ein anderes Vorzeichen hätte als $f(x_0)$ und $f(x_4)$, so liessen sich auch zwei zu beiden Seiten von x_2 und noch innerhalb des Intervalls (J^0) liegende Werthe x_1 und x_3 durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{F}.) \qquad x_1 = x_2 - \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}, \quad x_3 = x_2 + \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}$$

bestimmen, für welche:

$$\text{sgn.} f(x_0) = -\text{sgn.} f(x_1) = \text{sgn.} f(x_4) = -\text{sgn.} f(x_3)$$

wäre. Denn, dass erstens die Werthe x_1 und x_3 noch innerhalb des Intervalles (J') liegen, d. h. dass die Ungleichheiten:

$$x_2 - x_0 > \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}, \quad x_4 - x_2 > \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}$$

bestehen, erschliesst man aus den Ungleichheiten:

$$|f(x_2) - f(x_0)| < (x_2 - x_0)(s-1)D, \quad |f(x_4) - f(x_2)| < (x_4 - x_2)(s-1)D,$$

welche aus der obigen Ungleichheit ($\mathfrak{D}$.) hervorgehen, indem man überdies berücksichtigt, dass der Voraussetzung nach:

$$\text{sgn.} f(x_2) = -\text{sgn.} f(x_0) = -\text{sgn.} f(x_4)$$

ist. Es ist nun zweitens gemäss der obigen Ungleichheit ($\mathfrak{D}$.):

$$|f(x_2) - f(x_1)| < (x_2 - x_1)(s-1)D, \quad |f(x_3) - f(x_2)| < (x_3 - x_2)(s-1)D,$$

also in Folge der Gleichungen ($\mathfrak{F}$.):

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |f(x_2)|, \quad |f(x_3) - f(x_2)| < |f(x_2)|,$$

und diese Ungleichheiten erfordern, dass sowohl $f(x_1)$ als auch $f(x_3)$ dasselbe Vorzeichen habe wie $f(x_2)$, also das entgegengesetzte der Functionswerthe $f(x_0)$ und $f(x_4)$. Sowohl das Intervall (x_0, x_1) als auch das Intervall (x_3, x_4) wäre hiernach ein solches, in welchem $f(x)$ am Anfang und Ende entgegengesetztes Vorzeichen hat, und es könnten also nach dem, was oben bewiesen worden, Werthe x', x'' bestimmt werden, für welche:

$$x_0 < x' < x_1, \quad x_3 < x'' < x_4, \quad |f(x')| < \frac{1}{r}, \quad |f(x'')| < \frac{1}{r}$$

wäre, wenn r beliebig angenommen wird. Nun müsste aber gemäss der Ungleichheit ($\mathfrak{E}$.):

$$|f(x')| + \left| \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \right| > \frac{1}{s(s-1)}$$

sein, also, da:

$$|f(x')| < \frac{1}{r}, \quad |f(x'') - f(x')| < |f(x'')| + |f(x')| < \frac{2}{r}$$

ist, auch:

$$\frac{1}{r} + \frac{2}{r(x'' - x')} > \frac{1}{s(s-1)},$$

und endlich, da:

$$x'' - x' > x_3 - x_1 = \frac{2|f(x_2)|}{(s-1)D}$$

ist:

$$\frac{1}{r} + \frac{(s-1)D}{r|f(x_2)|} > \frac{1}{s(s-1)},$$

oder:

$$r < s(s-1)\left(1+\frac{(s-1)D}{|f(x_2)|}\right).$$

Da aber die Zahl r beliebig gross gewählt werden kann, so kann diese Ungleichheit nicht bestehen, und es ist also in der That zu erschliessen, dass in einem Intervalle, welches nicht grösser als $\frac{1}{s}$ ist, die Function $f(x)$ durchweg einerlei Vorzeichen hat, sobald man nur weiss, dass dies an den beiden Endpunkten der Fall ist.

Nunmehr folgt unmittelbar, dass $f(x)$ in einem Intervalle von der Grösse $\frac{1}{s}$ nicht *mehr* als ein Mal das Zeichen wechseln kann. Denn wäre für drei in dem Intervalle liegende Werthe x_0, x_1, x_2, wofür $x_0 < x_1 < x_2$ ist:

$$\text{sgn.} f(x_0) = -\text{sgn.} f(x_1) = \text{sgn.} f(x_2),$$

so würde ja das Intervall (x_0, x_2) ein solches sein, dessen Grösse kleiner als $\frac{1}{s}$ wäre, und an dessen Anfangs- und Endpunkt $f(x)$ dasselbe Vorzeichen hätte. In einem solchen Intervalle kann aber, wie so eben bewiesen worden, $f(x)$ sein Zeichen nicht wechseln; es kann also nicht:

$$\text{sgn.} f(x_0) = -\text{sgn.} f(x_1)$$

sein.

Das im Vorstehenden entwickelte Resultat kann folgendermaassen formulirt werden:

Erstens sei $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ eine ganzzahlige Function von x, die mit $f(x)$ bezeichnet werden möge; D sei der absolute Werth der Discriminante der Function $f(x)$ und $f'(x)$ ihre Ableitung.

Zweitens seien $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ ganzzahlige Functionen von x, beziehungsweise von den Graden $n-2$ und $n-1$, für welche die Gleichung:

$$\varphi(x) f(x) + \varphi_1(x) f'(x) = D$$

besteht, und es sei:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{k=n-2} \alpha_k x^k, \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha'_k x^k.$$

Drittens seien mittels der Gleichungen:

$$f(x+y) - f(x) = y f_1(x, y), \quad (f_1(x, y) - f'(x))\varphi(x) = y\psi(x, y)$$

die Functionen $f_1(x, y)$, $\psi(x, y)$ definirt, so dass also in den Ent-

wickelungen:

$$f_1(x,\ y) = \sum_{h,k} b_{h,k}\, x^h y^k \qquad (h,\ k = 0,\ 1,\ \dots\ n-1),$$
$$\psi(x,\ y) = \sum_{h,k} c_{h,k}\, x^h y^k \qquad (h,\ k = 0,\ 1,\ \dots\ 2n-4),$$

die Coefficienten b und c ganze Zahlen bedeuten.

Viertens sei $|a_g|$ der grösste der Werthe $|a_0|,\ |a_1|,\ \dots\ |a_{n-1}|$, und es sei s die kleinste positive ganze Zahl, welche den Ungleichheitsbedingungen:

$$(s-1)D|a_n|^{n-2} \geqq \sum_h |\alpha_h|(|a_g|+|a_n|)^h \qquad (h = 0,\ 1,\ \dots\ n-2),$$
$$(s-1)D|a_n|^{n-1} \geqq \sum_h |\alpha'_h|(|a_g|+|a_n|)^h \qquad (h = 0,\ 1,\ \dots\ n-1),$$
$$(s-1)D|a_n|^{n-1} \geqq \sum_{h,k} |b_{h,k}|(|a_g|+|a_n|)^h \qquad (h,\ k = 0,\ 1,\ \dots\ n-1),$$
$$(s-1)D|a_n|^{n-1} \geqq \sum_{h,k} |c_{h,k}|(|a_g|+|a_n|)^h \qquad (h,\ k = 0,\ 1,\ \dots\ 2n-4),$$

genügt.

Alsdann kann nicht $\operatorname{sgn.} f(x') = -\operatorname{sgn.} f(x'') = \operatorname{sgn.} f(x''')$ sein, wenn:

$$x' < x'' < x''' \quad \text{und} \quad x'''-x' \leqq \frac{1}{s}$$

ist: die Function $f(x)$ behält demnach ihr Vorzeichen in jedem Intervalle von der Grösse $\frac{1}{s}$, in welchem die Vorzeichen am Anfangs- und Endpunkt gleich sind, und sie wechselt ihr Vorzeichen nur ein einziges Mal in jedem Intervalle von der Grösse $\frac{1}{s}$, in welchem die Vorzeichen am Anfangs- und Endpunkt verschieden sind. In einem Intervalle der letzteren Art kann ferner, wenn r eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, ein Theilintervall von der Grösse $\frac{1}{rsD}$ so bestimmt werden, dass die Function $f(x)$ am Anfangs- und Endpunkt verschiedenes Vorzeichen hat und durchweg in dem Theilintervalle ihrem absoluten Werthe nach kleiner als $\frac{1}{r}$ bleibt. Endlich behält die Function $f(x)$ das Vorzeichen von $a_n x^n$, sobald x seinem absoluten Werthe nach grösser als $\frac{|a_g|+|a_n|}{|a_n|}$ wird.

Hiernach kann, wenn die ganze Zahl t durch die Ungleichheitsbedingung:

$$s(|a_g|+|a_n|) \leqq t|a_n| < |a_n|+s(|a_g|+|a_n|)$$

bestimmt wird, die Function $f(x)$ nur in einem Intervalle: $\left(\frac{k-1}{s},\ \frac{k}{s}\right)$ ihr Zeichen wechseln, in welchem k einen der Werthe: $-t+1,\ -t+2,\ \dots,\ t-1,\ t$

hat. Man braucht also nur die Vorzeichen der $2t$ Werthe:

$$f\left(\frac{k}{s}\right) \qquad (k=-t+1,\ -t+2,\ \ldots\ t-1,\ t)$$

zu bestimmen, um diejenigen der $2t-1$ Intervalle von der Grösse $\frac{1}{s}$ zu ermitteln, in welchen die Function $f(x)$ ihr Zeichen — und zwar nur ein Mal — wechselt. Die Anzahl dieser Intervalle ist zugleich diejenige, welche man als Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ bezeichnet, und es wird also durch das angegebene Verfahren dasjenige vollkommen ersetzt, welches der *Sturm*sche Satz liefert. Aber auch die sogenannte Berechnung der reellen Wurzeln selbst wird durch das angegebene Verfahren ersetzt; denn wenn sich für eine bestimmte Zahl k zeigt, dass:

$$\operatorname{sgn.} f\left(\frac{k-1}{s}\right) f\left(\frac{k}{s}\right) = -1$$

ist, so braucht man nur die Anfangs- und Endwerthe von $f(x)$ in den Theilintervallen von der Grösse $\frac{1}{rD}$, d. h. also die $rD+1$ Werthe:

$$f\left(\frac{k}{s}-\frac{h}{rsD}\right) \qquad (h=0,\ 1,\ \ldots\ rD)$$

zu berechnen und diejenige Zahl h zu bestimmen, wofür:

$$\operatorname{sgn.} f\left(\frac{k}{s}-\frac{h}{rsD}\right) f\left(\frac{k}{s}-\frac{h-1}{rsD}\right) = -1$$

ist, um daraus zu erschliessen, dass die Function $f(x)$ in dem Intervalle:

$$\frac{k}{s}-\frac{h}{rsD} \leqq x < \frac{k}{s}-\frac{h-1}{rsD}$$

ihr Zeichen wechselt und absolut durchweg kleiner als $\frac{1}{r}$ bleibt.

Die sogenannte Existenz der reellen irrationalen Wurzeln algebraischer Gleichungen ist einzig und allein in der Existenz von Intervallen der angegebenen Beschaffenheit begründet; die Zulässigkeit der Rechnung mit den einzelnen Wurzeln einer algebraischen Gleichung beruht ganz und gar auf der Möglichkeit sie zu isoliren, also auf der Möglichkeit eine Zahl, wie die oben mit s bezeichnete, zu bestimmen. Ist eine solche Zahl s bestimmt, welche die Eigenschaft hat, dass die Intervalle von der Grösse $\frac{1}{s}$ hinreichend klein sind, um die verschiedenen Wurzeln derselben Gleichung zu isoliren, so wird das „Grösser" und „Kleiner" der Wurzeln einfach durch die Aufeinanderfolge der bezüglichen Isolirungs-Intervalle definirt. Das „Grösser" und „Kleiner" irgend welcher irrationalen algebraischen Zahlen bestimmt sich hiernach auch, wenn man — wie es offenbar zulässig ist —

die beiden ihrer Grösse nach zu vergleichenden algebraischen Zahlen sich als zwei Wurzeln einer und derselben Gleichung denkt. Das eigentliche Wesen der Sache tritt aber erst dann in der obigen Deduction vollkommen scharf hervor, wenn man darin auch die Benutzung von Brüchen vermeidet und ausschliesslich von ganzen Zahlen Gebrauch macht.

Wird zu diesem Zwecke an Stelle von $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ die *homogene* ganze Function:

$$a_0y^n+a_1y^{n-1}z+a_2y^{n-2}z^2+\cdots+a_nz^n$$

eingeführt und mit $F(y,z)$ bezeichnet, so ist:

$$f\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{1}{y^n}F(y,\ z).$$

Es wird also:

$$\text{sgn.}F(rsD,\ krD-h).F(rsD,\ krD-h+1) = -1,$$

und wenn q eine unbestimmte ganze positive Zahl bedeutet, so wird für alle ganzzahligen Werthe von z die zwischen:

$$(krD-h)q \quad \text{und} \quad (krD-h+1)q$$

liegen:

$$|F(qrsD,\ z)| < r^{n-1}(qsD)^n,$$

während das *Vorzeichen* von $F(qrsD,z)$ für $z=(krD-h)q$ entgegengesetzt demjenigen für $z=(krD-h+1)q$ ist.

Die Zahl s bestimmt sich in der oben angegebenen Weise durch die Coefficienten der Function $F(x,y)$. Alsdann bestimmen sich die verschiedenen ganzzahligen Werthe von k, welche die verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ charakterisiren, durch die Bedingung:

$$\text{sgn.}F(s,\ k-1).F(s,\ k) = -1.$$

Wird nun noch eine Zahl r beliebig angenommen, so wird die zu einem bestimmten Werthe von k gehörige positive und rD nicht übersteigende Zahl h durch die Bedingung:

$$\text{sgn.}F(rsD,\ krD-h)F(rsD,\ krD-h+1) = -1$$

definirt, und es ist alsdann:

$$|F(rsD,\ krD-h)| < r^{n-1}(sD)^n,$$
$$|F(rsD,\ krD-h+1)| < r^{n-1}(sD)^n.$$

Jede der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ wird also durch je eine bestimmte Zahl k vollkommen charakterisirt; alsdann aber gehört zu jeder

beliebig angenommenen Zahl r noch je eine bestimmte Zahl h, und man kann also die Zahlen h als „Functionen der unbestimmten ganzen Zahlen r" auffassen, welche durch die ganzzahlige Function $F(y, z)$ definirt werden.

In den Resultaten der „allgemeinen Arithmetik" oder der „arithmetischen Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen von Unbestimmten" kann man nur eine Zusammenfassung aller derjenigen Resultate sehen, welche sich ergeben, wenn man den Unbestimmten ganzzahlige Werthe beilegt. Insofern gehören also auch die Resultate der *allgemeinen* Arithmetik eigentlich der speciellen gewöhnlichen Zahlentheorie an, und alle Ergebnisse der tiefsinnigsten mathematischen Forschung müssen schliesslich in jenen einfachen Formen der Eigenschaften ganzer Zahlen ausdrückbar sein. Aber um diese Formen einfach erscheinen zu lassen, bedurfte es vor Allem einer geeigneten übersichtlichen Ausdrucks- und Darstellungsweise für die Zahlen selbst, und hieran hat der Menschengeist gewiss seit grauer Vorzeit anhaltend und mühsam, bald mehr bald weniger erfolgreich, und je nach den verschiedenen Völkerschaften in ganz verschiedener Weise gearbeitet *). Die Frucht dieser Arbeit, unsere Wort- und Ziffer-Bezeichnung der Zahlen, war ebenso wohl die Vorbedingung für die Auffindung des Wissensschatzes, über den die heutige Arithmetik verfügt, wie für die Aufstellung jener „Gesetze", in welche wir unsere Kenntniss von der Bewegung der Himmelskörper fassen; sie war aber auch die Vorbedingung für die ganze jetzige Gestaltung des praktischen Lebens, für die ungeheure Ausbreitung und Ausbildung von Handel und Verkehr, welche die moderne Welt so wesentlich von der alten unterscheidet.

*) Vgl. die Abhandlung *Alexander von Humboldts*: Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen. (Vorgelesen in einer Klassen-Sitzung der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, den 2. März 1829; abgedruckt im 4. Bande dieses Journals S. 205 ff.)

In dieser Abhandlung wird eine Bemerkung von *Laplace* (in deutscher Uebertragung) citirt, welche im Originaltext *so* lautet: „C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres avec dix caractères, en leur donnant à la fois une valeur absolue et une valeur de position, idée fine et importante qui nous paraît maintenant si simple que nous en sentons à peine le mérite. Mais cette simplicité même et l'extrême facilité qui en résulte pour tous les calculs placent notre système d'arithmétique au premier rang des inventions utiles, et l'on appréciera la difficulté d'y parvenir, si l'on considère qu'il a échappé au génie d'Archimède et d'Apollonius, deux des plus grands hommes dont l'antiquité s'honore".

Druckfehler und Berichtigungen zu Band 100.

I. Abhandlung von Herrn *Lipschitz*: „Beitrag zu der Theorie der Bewegung einer elastischen Flüssigkeit". S. 89 ff.

In Artikel 6 ist überall statt ϱ_1 das neue Zeichen $\varrho^{(1)}$ zu lesen.

II. Abhandlung von Herrn *Sylvester*: „On the *Bring-Tschirnhausen* Transformation". S. 465 ff.

Seite 467, Zeile 3 statt „the conjunction" lese man „the hypothesis of the conjunction".
„ 467, „ 3 „ $m > \mu$, $\nu > n$ „ „ $m \leq \mu$, $\nu \leq n$.
„ 467, „ 19 „ $m > \mu$, $\nu > n$ „ „ $m < \mu$, $\nu < n$.
„ 467, „ 20 „ $n > \nu$, $\mu > m$ „ „ $n \leq \nu$, $\mu \leq m$.
„ 469, „ 1 der Fussnote statt $\frac{1}{5}S$ „ „ $\frac{1}{n}S$.
„ 477, „ 14 statt „first" „ „ „second".
„ 477, „ 17 „ „the latter" „ „ „that".
„ 479, „ 11 schiebe man vor „to discover" ein „the method in question serves".
„ 479, „ 7 v. u. statt „this definition" lese man „the definition of minimum founded on this restriction".
„ 485, „ 2 v. o. „ „408 695" lese man „408 692".
„ 485, „ 6 v. u. „ „so that" „ „ „that is to say".
„ 485, „ 3 „ „ „ „decrease" „ „ „*increase*".

Druckfehler und Berichtigungen zu Band 100.

I. Abhandlung von Herrn ***Lipschitz:*** „Beitrag zu der Theorie der Bewegung einer elastischen Flüssigkeit". S. 89 ff.

In Artikel 6 ist überall statt ϱ_1 das neue Zeichen $\varrho^{(1)}$ zu lesen.

II. Abhandlung von Herrn ***Sylvester:*** „On the ***Bring-Tschirnhausen*** Transformation". S. 465 ff.

Seite 467, Zeile 3 statt „the conjunction" lese man „the hypothesis of the conjunction".
„ 467, „ 3 „ $m > \mu,\ \nu > n$ „ „ $m < \mu,\ \nu < n$.
„ 467. „ 19 „ . $m > \mu,\ \nu > n$ „ „ $m < \mu,\ \nu < n$.
„ 467, „ 20 „ $n > \nu,\ \mu > m$ „ „ $n < \nu,\ \mu < m$.
„ 469, „ 1 der Fussnote statt $\frac{1}{3}S$ „ „ $\frac{1}{n}S$.
„ 477, „ 14 statt „first" „ „ „second".
„ 477, „ 17 „ „the latter" „ „ „that".
„ 479, „ 14 schiebe man vor „to discover" ein „the method in question serves".
„ 479, „ 7 v. u. statt „this definition" lese man „the definition of minimum founded on this restriction".
„ 485, „ 2 v. o. „ „408 695" lese man „408 692".
„ 485, „ 6 v. u. „ „so that" „ „ „that is to say".
„ 485, „ 3 „ „ „ „decrease" „ „ „*increase*".

116073

STORAGE AREA

